PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 39 (53), 1986, pp. 187–192

ОБ ОЦЕНКАХ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ АР-ПОЛЕЙ

Й. Малишич

Резюме. Рассматривается авторегрессивнное поле $\eta(u,v)$ типа (p,q) с параметрами θ_1 и θ_2

$$\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{jk}\eta(u-j\theta_1, v-k\theta_2)=\xi(u,v)$$

где $\xi(u,v)$ непрерывно в среднем квадратичном однородное случайное поле с рациональной спектральной плотностью. Изучается, по методу А. М. Яглома, вид спектральной характеристики найлучшей несмещенной оценки среднего значения поля η по известным значениям этого поля на прямогольнике.

Пусть случайные поля $\{\xi(u,v),(u,v)\in R^2\}$, $\{\eta(u,v),(u,v)\in R^2\}$, такие что

$$\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q} a_{jk}\eta(u-j\theta_1, v-k\theta_2)=\xi(u,v), \tag{1}$$

$a_{jk}\in R$, $a_{00}=1$, $\theta_1>0$, $\theta_2>0$, $p\in N$, $q\in N$. Тогда случайное поле η будет авторегрессионным полем типа (p,q) с параметрами θ_1 и θ_2. Это мы будем обозначать: $\eta\sim AP(\xi;p,q,\theta_1,\theta_2)$.

Будем считать, что поле $\xi(u,v)$ однородное, непрерывно в среднем квадратичном, с спектральным представлением

$$\xi(u,v)=\iint\limits_{R^2}\exp\{i(\lambda u+\mu v\}Z_\xi(d\lambda,d\mu) \tag{2}$$

и спектральной плотностью

$$g_\xi(\lambda,\mu)=|P_2(\lambda,\mu)|^2/|P_1(\lambda,\mu)|^2. \tag{2'}$$

AMS Subject Classification (1980): Primary 60G60.

Многочлены $P_1(\lambda,\mu)$ и $P_2(\lambda,\mu)$ в $(2')$ такие что при любом действительном $\lambda=\lambda_0$ (или $\mu=\mu_0$ соответственно) все их нули лежат в верхней μ-полуплоскости (в верхней λ-полуплоскости сответственно). Кроме того, мы будем предполагать что все корни характеристических уравнений по модулю меньше 1. Тогда можно найти [**5**] коэффициенты b_{jk} такие, что

$$\eta(u,v)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} b_{jk}\xi(u-j\theta_1,v-k\theta_2). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что тогда и поле $\eta(u,v)$ будет однородным, что допускает спектральное разложение

$$\eta(u,v)=\iint\limits_{k^2} \exp\{i(\lambda u+\mu v\} Z_\eta(d\lambda,d\mu), \tag{3'}$$

где

$$Z_\eta(d\lambda,d\mu)=\left[\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q} a_{jk}\exp\{-i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}\right]^{-1} Z_\xi(d\lambda,d\mu)$$

и что

$$g_\eta(\lambda,\mu)=g_\xi(\lambda,\mu)\cdot\left|\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q} a_{jk}\exp\{-i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}\right|^{-2} \tag{3'}$$

его спектральная плотность.

Если нашейзадачей будет отыскание найлучшей несмещенной оценки среднего значения m_ξ поля ξ по известным значениям на прямоугаольнике $S=\{(u,v): -x\le u\le 0, -t\le v\le 0\}$, оценку а смисле метода А. М. Яглома будем искать в виде

$$\eta_\xi=\iint_{R^2}\Phi_\xi(\lambda,\mu)Z_\xi(d\lambda,d\mu), \tag{4}$$

где спектральная характеристика $\Phi_\xi(\lambda,\mu)$-функция в пространстве $L^2(S)$, натянутом на функции $\exp\{i(\lambda u+\mu v)\}$, $(u,v)\in S$, так что

$$\iint_{R^2}|\Phi_\xi(\lambda,\mu)|^2 g_\xi(\lambda,\mu)d\lambda d\mu<+\infty. \tag{4'}$$

Тогда [**2**] имеет место следующее условие (Я):

– функция $\Phi_\xi(\lambda,\mu)$ такая что при любом действительном значении λ она будет целой функцией комплексной переменной μ, априлюбом действительном значении μ она будет целой функций переменной λ;

– функция $\Phi_\xi(\lambda,\mu)$ представима в виде

$$\begin{aligned}\Phi_\xi(\lambda,\mu)&=\Phi_1^{(\xi)}(\lambda,\mu)+\Phi_2^{(\xi)}(\lambda,\mu)\exp\{-i\lambda x\}+\\&+\Phi_3^{(\xi)}(\lambda,\mu)\exp\{-i\mu t\}+\Phi_4^{(\xi)}(\lambda,\mu)\exp\{-i(\lambda x+\mu t)\},\end{aligned}$$

где $\Phi_j^{(\xi)}$-рациональные функции, такие что условие $(4')$ удовлетворяется и $\Phi_\xi(0,0)=1$;

– функция

$$\psi_\xi(\lambda,\mu)=\Phi_\xi(\lambda,\mu)g_\xi(\lambda,\mu)-\delta(1-e^{-i\lambda x})(1-e^{-i\mu t})/\lambda\mu \tag{5}$$

имеет вид

$$\begin{aligned}\psi_\xi(\lambda,\mu)&=\psi_1(\lambda,\mu)+\psi_2(\lambda,\mu)\exp\{-i\lambda x\}+\\&+\psi_3(\lambda,\mu)\exp\{-i\mu t\}+\psi_4(\lambda,\mu)\exp\{-i(\lambda x+\mu t)\},\end{aligned} \tag{5'}$$

где ψ_j следующие функции

$$\psi_j(\lambda,\mu)=\Phi_j^{(\xi)}(\lambda,\mu)\cdot g_\xi(\lambda,\mu)-\delta_j/\lambda\mu \tag{5''}$$

и $\delta_1=\delta_4=\delta$, $\delta_2=\delta_3=-\delta$;

– при фиксированном значении одной переменной функция $\psi_1(\lambda,\mu)$ будет аналтической функцией в верхней полуплоскости другой переменной;

– при $\lambda=\lambda_0$ функция $\psi_2(\lambda,\mu)$ будет аналитической функцией в верхней полуплоскости μ, а при $\mu=\mu_0$ аналитической функцией в нижней полуплоскости λ

– при $\mu=\mu_0$ функция $\psi_3(\lambda,\mu)$ будет аналитической функцией в верхней полуплоскости λ, а при $\lambda=\lambda_0$ аналитической функцией в нижней полуплоскости μ

– при фиксированном значении λ функция $\psi_4(\lambda,\mu)$ будет аналитической функцией в нижней полуплоскости μ, а при при фиксированном значении μ она будет аналтической функцией в нижней полуплоскости λ;

– все функции ψ_j в соответствующих полуплоскостьях достаточно бистро убывают когда аргумент по модулю стремится к $(+\infty)$ [**6**].

Нетрудно заметить, что оценку среднего значения m_η однородного поля η из (1) и (2) можно найти пользуясь тем что $m_\eta=\sum_j\sum_k a_{jk}m_\xi$. Здесь мы покажем что оценку $\tilde m_\eta$ можно найти модифицируя условия налатаемые на спектральную характеристику оценки $\tilde m_\xi$. Оказывается, что в этом смысле имеют место следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть известны значения случайного поля η на прямоугольнике $S=\{(u,v):-x\le u\le 0,-t\le v\le 0\}$ и пусть $[x/\theta_1]=m$ т.е. $m\theta_1\le x<(m+1)\theta_1$ и $[t/\theta_2]=n$, т.е. $n\theta_2\le t<(n+1)\theta_2$ и $m\ge p$, $n\ge q$. Тогда спектральная характеристика $\Phi_\eta(\lambda,\mu)$ найлучшей несмещенно{ји оценки $\tilde m_\eta$ значения m_η будет иметь вид*

(6)

$$\Phi_\eta(\lambda,\mu) = h_1(\lambda,\mu)\cdot\sum_{l=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{q}\tilde a_{l\nu}^{(1)}\exp\{-i(\lambda l\theta_1+\mu\nu\theta_2)\}+$$
$$+ h_2(\lambda,\mu)\cdot\sum_{l=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{q}\tilde a_{l\nu}^{(2)}\exp\{i(l\theta_1+\mu\nu\theta_2)\}\exp\{-i\lambda x\}+$$
$$+ h_3(\lambda,\mu)\cdot\sum_{l=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{q}\tilde a_{l\nu}^{(3)}\exp\{i(-\lambda l\theta_1+\mu\nu\theta_2)\}\exp\{-i\mu t\}+$$
$$+ h_4(\lambda,\mu)\cdot\sum_{l=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{q}\tilde a_{l\nu}^{(4)}\exp\{i(\lambda l\theta_1+\mu\nu\theta_2)\}\exp\{-i(\lambda x+\mu t)\},$$

где $h_j(\lambda,\mu)$, $j=1,2,3,4$ *рациональные функции, такие что функция* $\Phi_\eta(\lambda,\mu)$ *удовлетворяет условию* (4).

Доказательство. Функция $\psi_\eta(\lambda,\mu)$ вида (5) будет следующей функцией

$$\psi_\eta(\lambda,\mu) = \Phi_\eta(\lambda,\mu)g_\eta(\lambda,\mu) - \delta[1-\exp(-i\lambda x)][1-\exp(-i\mu t)]/\lambda\mu =$$
$$= h_1^*(\lambda,\mu)\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{a}_{jk}^{(1)}\exp\{i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+$$
$$+ h_2^*(\lambda,\mu)\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{a}_{jk}^{(2)}\exp\{-i\lambda x+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+$$
$$+ h_3^*(\lambda,\mu)\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{a}_{jk}^{(3)}\exp\{-i\mu t+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+$$
$$+ h_4^*(\lambda,\mu)\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{a}_{jk}^{(4)}\exp\{-i(\lambda x+\mu t)+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}-$$
$$-\delta[1-\exp(-i\lambda x)][1-\exp(-i\mu t)]/\lambda\mu,$$

где $h_j^* = h_j\cdot g_\xi$ и $\overline{a}_{jk}^{(s)}$, пока, неизвестные коэффициенты. В функцие $\psi_\eta(\lambda,\mu)$ мы сделаем следующий выбор:

$$\psi_1(\lambda,\mu) = h_1^*(\lambda,\mu)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{a}_{jk}^{(1)}\exp\{i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+$$
$$+ h_2^*(\lambda,\mu)\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}\overline{a}_{jk}^{(2)}\exp\{-i\lambda x+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+$$
$$+ h_3^*(\lambda,\mu)\sum_{0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\overline{a}_{jk}^{(3)}\exp\{-i\mu t+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+$$

$$+h_4^*(\lambda,\mu)\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\overline{a}_{jk}^{(4)}\exp\{-i(\lambda x+\mu t)+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}-\delta/\lambda\mu,$$

$$\begin{aligned}\psi_2(\lambda,\mu)=h_1^*(\lambda,\mu)&\sum_{-\infty}^{-m-1}\sum_{0}^{\infty}\overline{a}_{jk}^{(1)}\exp\{i\lambda x+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+\\&+h_2^*(\lambda,\mu)\sum_{-\infty}^{-1}\sum_{0}^{\infty}\overline{a}_{jk}^{(2)}\exp\{i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+\\&+h_3^*(\lambda,\mu)\sum_{-\infty}^{-m-1}\sum_{n+1}^{\infty}\overline{a}_{jk}^{(3)}\exp\{i(\lambda x-\mu t)+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+\\&+h_4^*(\lambda,\mu)\sum_{-\infty}^{-1}\sum_{n+1}^{\infty}\overline{a}_{jk}^{(4)}\exp\{-i\mu t+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+\delta/\lambda\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_3(\lambda,\mu)=h_1^*(\lambda,\mu)&\sum_{0}^{\infty}\sum_{-\infty}^{-n-1}\overline{a}_{jk}^{(1)}\exp\{i\mu t+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+\\&+h_2^*(\lambda,\mu)\sum_{m+1}^{\infty}\sum_{-\infty}^{-n-1}\overline{a}_{jk}^{(2)}\exp\{i(-\lambda x+\mu t)+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+\\&+h_3^*(\lambda,\mu)\sum_{0}^{\infty}\sum_{-\infty}^{-1}\overline{a}_{jk}^{(3)}\exp\{i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+\\&+h_4^*(\lambda,\mu)\sum_{m+1}^{\infty}\sum_{-\infty}^{-1}\overline{a}_{jk}^{(4)}\exp\{-i\lambda x+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+\delta/\lambda\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_4(\lambda,\mu)=h_1^*(\lambda,\mu)&\sum_{-\infty}^{-m-1}\sum_{-\infty}^{-n-1}\overline{a}_{jk}^{(1)}\exp\{i(\lambda x+\mu t)+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+\\&+h_2^*(\lambda,\mu)\sum_{-\infty}^{-1}\sum_{-\infty}^{-n-1}\overline{a}_{jk}^{(2)}\exp\{i\mu t+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+\\&+h_3^*(\lambda,\mu)\sum_{-\infty}^{-m-1}\sum_{-\infty}^{-1}\overline{a}_{jk}^{(3)}\exp\{i\lambda x+i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}+\\&+h_4^*(\lambda,\mu)\sum_{-\infty}^{-1}\sum_{-\infty}^{-1}\overline{a}_{jk}^{(4)}\exp\{i(\lambda j\theta_1+\mu k\theta_2)\}-\delta/\lambda\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r(\lambda,\mu)=\psi_\eta(\lambda,\mu)-[&\psi_1(\lambda,\mu)+\exp\{-i\lambda x\}\psi_2(\lambda,\mu)+\\&+\exp\{-i\mu t\}\psi_3(\lambda,\mu)+\exp\{-i(\lambda x+\mu t)\psi_4(\lambda,\mu)].\end{aligned}$$

В таком выборе функции ψ_j, $j = 1,2,3,4$ удовлетворяют условию (Я) и поэтому остаточный член $r(\lambda,\mu)$ будет равнятся нулю. Пользуясь линейноjи независимостью показательных функций мы получим что, неизвестные $\tilde{a}_{l\nu}^{(s)} = 0$, $l = \overline{0,p}$, $\nu = \overline{0,q}$ являются решениями системы линейных уравнений.

Функции h_1, h_2, h_3, h_4 определяются по такому же способу как и в случае рациональной спектральной плотности.

Теорема 2. *Пусть известны значения поля η в прямоугольнике S и пусть $0 \le [x/\theta_1] = m \le p$, $0 \le [t/\theta_2] = n \le q$. Тогда спектральная характеристика $\Phi_\eta(\lambda,\mu)$ оценки $\tilde{m}_\eta$ имеет вид* (6) *в котором суммируется по l до $l = m$ и по ν до $\nu = n$;*

Доказательство здесь совсем аналогично доказательству Теоремы 1.

Пример. Пусть

$$\eta(u,v) - \beta_1\eta(u-\theta_1,v) = \xi(u,v), \quad -1 < \beta_1 < 1,$$
$$g_\xi(\lambda,\mu) = B_0/(\lambda^2+\alpha^2)(\mu^2+\beta^2), \quad B_0 > 0, \beta > 0$$

и $[x/\theta_1] = m > 1$, $0 < t \le \theta_1$. Спектральную характеристику оценки $\tilde{m}_\eta$ по значениям на прямоугольнике S мы попробуем искать в виде

$$\begin{aligned}\Phi_\eta(\lambda,\mu) = \Big[&(\lambda-\alpha i)(\mu-\beta i)\sum_{j=0}^{m} a_j \exp\{-i\lambda\theta_1\} + \\ &+ (\lambda+\alpha i)(\mu-\beta i)\exp\{-i\lambda x\}\sum_{j=0}^{m} a_j \exp\{i\lambda j\theta_1\} + \\ &+ (\lambda-\alpha i)(\mu+\beta i)\exp\{-i\mu t\}\sum_{j=0}^{m} a_j \exp\{-i\lambda j\theta_1\} + \\ &+ (\lambda+\alpha i)(\mu+\beta i)\exp\{-i(\lambda x+\mu t)\}\sum_{j=1}^{m} a_j \exp\{i\lambda j\theta_1\}\Big]/\lambda\mu.\end{aligned}$$

Тогда получим что

$$a_0^{-1} = (2+\beta t)[(1-\beta_1)(2+\alpha x) + 2\alpha\theta_1\beta], \quad a_1 = -\beta_1 a_0$$

и что все остальные коэффициеты будут равнятся нулю.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Т. Андерсон, *Статистический анализ временных рядов*, Мир, Москва, 1976.

[2] С. Я. Виленкин, *Статистическая обработка результатов исследования случайных функций*, Советское радио, Москва, 1979.

[3] Й. Малишич, *Экстраполирование стационарных процессов с нерациональными спектральными плотностьями по значениям на конечном интервале*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **27 (41)** (1980), 169–174.

[4] V. Jevremović, J. Mališić, *Ocene srednjih vrednosti stacionarnih proces pokretnih sredina i proces autoregresivnog tipa*, Math. Vesnik **35 (2)** (1983), 107–119.

[5] A. M. Yaglom, *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*, Dover New York, 1962.

Институт за математику
Природно-математички факултет
Студентски трг 16
11000 Београд

(Поступила 07 01 1985)