PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 41 (55), 1987, pp. 79–82

ВХОЖДЕНИЕ В СКОЛЬЗЯЩИЙ РЕЖИМ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. И. Алидема

Резюме. Приведено математическое исследование устойчивости многомерных неавтономных дифференциальных уравнений с релеьными многомерными операторами. Доказаны частотные критерии вхождения системы (1) в скользящий режим. При доказательстве этого критерия наряду с построением семейств бесконтактных элипсоидальных поверхностей использована частотная теорема Якубовича-Калмана для разрешимости некоторых специальных матричных соотношений.

1. В [1] проведено математическое исследование устойчивости многомерных дифференциальных уравнений с релейными многомерными операторами.

В данной стаье эти резулмтати распространяются на системы с аддитивно входящими внешним воздействием и операторной релејиной нелинейностью, поведение которой описывается неавтономными уравнениями

$$\dot{x} = Ax + b\varphi[\sigma(t), \varphi_0]_t + f(t), \quad \sigma = c^* x, \tag{1}$$

где $\varphi[\sigma(t), \varphi_0]_t$ – многозначный релейный оператор, удовлетворяющий соотношению $\varphi(\sigma(t_1) = \varphi(\sigma(t_2))$ если $\sigma(t) \neq 0$ при $t \in [t_1, t_2]$ и $\varphi(\sigma) \in [\alpha_1, \alpha_2]$, $\forall \sigma > 0$, $\varphi(\sigma) \in [-\alpha_2, -\alpha_1]$, $\forall \sigma > 0$ (рис. 1), α_1, α_2 – положительные числа; зесь $\varphi(\sigma(t))$ – функция, являющаяся значением этого оператора, $f(t)$ – дифференцируемая вектор-функция, удовлетворяющая условию $|f(t)| \leq c_1 e^{-\varepsilon t}$, $\varepsilon > 0$ A – гурвицева $n \times n$-матрица, b, c – постоянные n-мерные векторы, $(^*)$ – транспонированые, $x(t)$ – n-мерный вектор.

Пусть задача Коши для любых начльных данных системмы (1) разрешима на интервале $(t_0, +\infty)$ [2]. Примем определение решения, такое ж, как в работе [1].

2. Сформулируем результат, полученный в работе.

AMS Subject Classification (1980): Primary 34D99.

Теорема. *Пусть выполнены условия: $\chi(0) \neq$) и существуют $\theta_1, \theta_2 > 0$ такие что*

$$\Re\left[\theta_1 \frac{\chi(i\omega) - \chi(0)}{i^{\omega}} + \theta_2 \chi(i\omega)\right] > 0, \quad \forall \omega \geq 0. \tag{2}$$

Тогда любое решение системы (1) *либо стремится при $t \to +\infty$ к пластинке скользящих режимов, либо бесконечное число раз при $t \to \infty$ входит с скользящий режим.*

Доказательство. Пусть для данной системы виполнены условия теоремы. Тогда существует вещественная $n \times n$ матрица $H > 0$ такая, что

$$HA^* + AH < 0 \quad HA^{-1}b = \theta_1 c + \theta_2 A^* c. \tag{3}$$

Из невырожденности $\chi(p)$, легко видеть, что имеет место равенство

$$c^*(A - pl)^{-1}A^{-1} = (\chi(p) - \chi(0)/p$$

Оцюда и по теореме 1.2.10 [2] очевидным образом вытекаем (3).

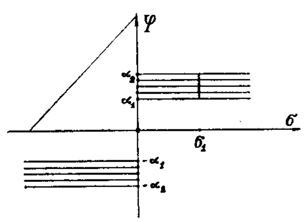

Рис. 1

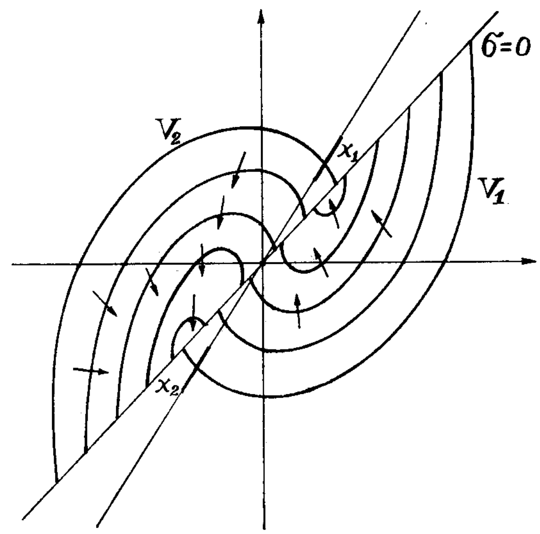

Рис. 2

Для того, чтобы установить частотый критерий вхождения в скользящий режим достаточно рассмотреть семейство n-мерных эллипсоидов в виде функции Ляпунова, с некоторым видоизменением ее, соответствующим разрывному случаю,

$$0 < V_k(x) = (x - x_k)^* H(x - x_k), \;\; H > 0, \;\; k = 1, 2,$$

где

$$x_1 = -A^{-1}b\varphi(+0), \qquad \varphi_k = \begin{cases} \varphi(+0), & k_1 = 1, \\ \varphi(-0), & k_1 = 2. \end{cases} \tag{4}$$
$$x_1 = -A^{-1}b\varphi(-0),$$

Здесь $\varphi(+0)$ и $\varphi(-0)$ — некоторые числа из промежутка (α_1, α_2) и $(-\alpha_1, -\alpha_2)$.

При движении изображающей точки по траектории системмы (1) выполняется соотношение

$$\dot{V}_k(x) = 2(x-x_k)^* H(x-x_k)^{\cdot} = 2(x-x_k)^* H(Ax + b\varphi(\sigma)) + f(t) = \\ = 2(x-x_k)^* H(A(x-x_k) + Ax_k + b\varphi(\sigma)) + f(t).$$

Далее, из условия (4) следует, что

$$\dot{V}_k \le 2(x-x_k)^* Hb(-\varphi_k + \varphi(\sigma)) - \varepsilon |x-x_k|^2 + 2(x-x_k)^* Hf(t).$$

Так как справедливы равенства $-\varphi_1 + \varphi(\sigma) = 0$ при $\sigma \ge 0$ и $-\varphi_2 + \varphi(\sigma) = 0$ при $\sigma \le 0$, то выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\le -\varepsilon |x-x_k|^2 + 2(x-x_k)^* Hf(t) \ \text{ при } \ \sigma \ge 0 \\ \dot{V}_2 &\le -\varepsilon |x-x_k|^2 + 2(x-x_k)^* Hf(t) \ \text{ при } \ \sigma \ge 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Покажем, что существует $\delta > 0$ такое, что, $\dot{V}_1 \le -\delta$ при $\sigma(t) > 0$ и $\dot{V}_2 \le -\delta$ при $\sigma(t) < 0$. Действительно, на основании условия (5) выполняется неравенство

$$\dot{V} = -\varepsilon |x-x_k|^2 + 2(x-x_k)^* Hf(t) \le -\varepsilon |x-x_k|^2 + f(t)(|H|^2 + |x-x_k|^2).$$

Поэтому при достатачно большом t

$$V_k = -\varepsilon |x-x_k|^2/2 + |H|^2 |f(t)|. \tag{6}$$

Из рисунка 2 видно, что $\exists \delta_1 > 0$:

$$|x-x_1| \ge \delta_1, \ \forall x \in \{x | \, c^* x \ge 0\}, \quad |x-x_2| \ge \delta_1, \ \forall x \in \{x | \, c^* x \le 0\},$$

и согласно (6), получаем оценку $\dot{V} \le -\varepsilon \delta_1^2/2 + |H|^2 |f(t)|$. Оцюда, так как $f(t) \to 0$ при достаточно большом t,

$$\dot{V}_k \le -\varepsilon \delta_1^2/4 < 0, \quad (\delta = \varepsilon \delta_1^2/4). \tag{7}$$

Рассмотрим два случая.

1°. $x(t)$ такое, что $\sigma(t) = c^* x(t) > 0$, $\forall t \ge 0$. Тогда $\dot{V}_1(x(t)) < 0$ и $x(t) \to x_1$ при $t \to \infty$.

Аналогично рассматривается случай, когда $\sigma(t) < 0$ и $\dot{V}_2(x(t)) < 0$. Ясно при этом, что $x(t) \to x_2$ при $t \to \infty$.

2°. Предположим, что $\sigma(t) = c^* x(t)$ меняет знак, т.е. существуют t_j такие, что $\sigma(t_j) = 0$ и, при малых h, $\sigma(t_j - h)(t_j + h) < 0$.

Рассмотрим произвольную точку $x(t_j)$. Допустим теперь, что $\sigma(t_j - h) < 0$, $\sigma(t_j + h) > 0$. Тогда, из сделанных предположений следует, что справедливы неравенства

$$\dot{\sigma}(t_j - 0) > 0, \quad \dot{\sigma}(t_j + 0) > 0. \tag{8}$$

Следовательно, всилу (4) и (8), следует, что

$$\begin{aligned}
\Delta V_{2,1}(t_j) &\overset{\text{def}}{=\!=} V_2(x(t_j-0)) - V_1(x(t_j+0)) = \\
&= (x(t_j)-x_2)^* H(x(t_j)-x_2) - (x(t_j)-x_1)^* H(x(t_j)-x_1) = \\
&= (-A^{-1}b\varphi(-0))^* H(-A^{-1}b\varphi(-0) - (-A^{-1}b\varphi(+0))^* \times \\
&\times H(-A^{-1}b\varphi(+0) - 2x(t_j)^* H(-A^{-1}b\varphi(-0)) + 2x(t_j)^* \times \\
&\times H(-A^{-1}b\varphi(+0)) = -2x(t_j)^* H(A^{-1}b)[\varphi(+0) - \varphi(-0)],
\end{aligned}$$

откуда, при условии (3),

$$\Delta V_{2,1}(t_j) = -2\theta_2 c^* Z x(t_j)[\varphi(+0) - \varphi(-0)].$$

Пусть $\dot\sigma(t_j \pm 0) > 0$. Тогда $\dot\sigma(t_j \pm 0) = c^* A x(t_j) + c^* b\varphi(\pm 0) > 0$ и, следовательно, $c^* A x(t_j) > -c^* b\varphi(\pm 0)$. Поэтому $c^* A x(t_j) > |c^* b|$.

Итак, если $\theta_2 > 0$, то очевидно,

$$\Delta V_{2,1}(t_j) = -2\theta_2 c^* A x(t_j)[\varphi(=)) - \varphi(-0)] < 0.$$

Таким образом, мы убедились в том, что вне пластинки скользящих режимов разрывная функция

$$V_k(x) = \begin{cases} V_1(x) & \text{при} \quad c^* \geq 0, \quad k_1 = 1, \\ V_2(x) & \text{при} \quad c^* \geq 0, \quad k_2 = 2, \end{cases}$$

строго монотонно убывает вдоль не входящих в скольжение траекторий $x(t)$ системы (1). Оцю и из неравенств (7) следует, что если решение находится при $t \geq 0$ вне пластинки скользящих режимов, то $V_k(x(t)) \to -\infty$ при $t \to +\infty$. Последнее противречит неравенству $H > 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р.И. Алидема, *Частотные условия вхождения в скользящий режим нелинейных систем с разрывными характеристиками*, Дифференциальные уравнения **23** (1987), 510–512.

[2] А.Х. Гелиг, Г.А. Леонов, В.А. Якубович, *Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия*, Москва, 1978.

Природно-Математички Факултет
38000 Приштина
Југославија

(Поступила 14 05 1986)