PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 41 (55), 1987, pp. 149–150

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ИВАНОВА ОТНОСЯЩЕСЯ НЕЛИНЕЙНИМ КВАЗИ-СЖИМАЮЩИМ ОТОБРАЖЕНИЯМ

Любомир Чирич

А. А. Ивановым в [2] доказана следующая теорема:

Теорема [2, стр. 43]. *Пусть (X,d) полное метрическое пространство, $T : X \to X$ такое отображение, что*

1° $\omega(r) < r$, *для* $r > 0$: 3° $\omega(r)$ *неубывающая функция*;

4° $\lim\limits_{r\to\infty}[r - \omega(r)] = +\infty$.

Тогда существует единственная неподвижная точка ξ отображения T и $\lim_n T^n x = \xi$ для любой точки $x \in X$.

Заметим что если в 1° $\omega(r) = k \cdot r$, где $0 < k < 1$, когда T называется квази-сжимающим отображением [1].

В связи с свойствами 3° и 4° функции $\omega(r)$ Иванов замечает [2, стр. 45]:

Замечание. "Мне неизвестно, является ли условия неубывания функции ω и условие $r - \omega(r) \to \infty$ при $r \to \infty$ существенными в формулировке доказанной теоремы или же от них можно освободится. Так как эти условия довольно обременительны, то желательно либо построить примеры, показивающие их существенность, либо найти не использующее эти условия доказательство соответствующей теоремы".

Здесь мы построим два примера. Пример 1 показывает что условие 3° существенно, а пример 2 показывает что и условие 4° существенно.

Пример 1. Пусть $X = (0, +\infty)$ с обычной метрикой $(d(x,y) = |x - y|)$ функция ω определена соотношением

$$\omega(r) = \begin{cases} r/2, & r \in [0,1), \\ r - 1/2, & r \in [1, +\infty) \end{cases}$$

AMS Subject Classification (1980): Primary 54H25.

и для отображения $T : X \to X$, $Tx = x + 1$.

Покажем что для отображения T выполнено условие 1°. Пусть, для определености, $x < y$. Тогда

$$d(Tx, Ty) = d(x, y) < [d(x, y) + 1] - 1/2 = \omega[d(Tx, Ty)].$$

Так как функция ω непреривна, возрастающая и $\omega(r) < r$, то в этом примере выполняются все условия 4°, а отображение T не имеет неподвижной точки.

Пример 2. Пусть $X =]0, +\infty)$ с метрикой определеной соотношением

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad (d(x, y) = |x - y|),$$

функция ω определена отношением

$$\omega(r) = \begin{cases} r/2, & r \in [0, 1/2) \cup [1, +\infty, \\ r - 1^2, & r \in [1/2, +1) \end{cases}$$

и для отображения $T : X \to X$, $Tx = x + 1$.

Тогда функция ω полунепрерывна справа, $\omega(r) < r$, $\lim_r [r - \omega(r)] = +\infty$, но ω не является неубывающей функцией. Напомним что (X, δ) есть полное пространство.

Покажем теперь что для отображения T выполнено условие 1°. Пусть, для определености, $x < y$. Положим $d(x, y) = r$. Тогда

$$\delta(Tx, Ty) = \delta(x, y) = \frac{r}{1 + r}, \quad \omega[\delta(x, Ty)] = \frac{1 + r}{2 + r} - \left(1 - \frac{1 + r}{2 + r}\right)^2.$$

Так как $\dfrac{r}{1 + r} < \dfrac{1 + r}{2 + r} - \left(1 - \dfrac{1 + r}{2 + r}\right)^2$ то $\delta(Tx, Ty) < \omega[\delta(x, Ty)]$.

Таким образом, в построенном здесь примере выполняются все условия данной теоремы кроме условия неубывания функции ω, а отображение T не имеет неподвижной точки.

Замечание. Напомним здесь что Иванов в [2, стр. 33] для теормы, в которой условие 1° замененно следующим условием:

$$1^\circ \quad d(T^{n(x)}x, T^{n(y)}y) \le \omega[d(x, y)]$$

построил пример (стр. 32–33) который показывает, что условие 4° является существенным условием в этой теоремы, а также построил и пример (стр. 37–40) который показывает, что и условие 3° является существенным условием в этой теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Љ. Чирич, *A generalization of Banach's contraction principle*; Проц. Амер. Матх. Соц. **45** (1974), 267–273.

[2] А.А. Иванов, *Неподвижные точки отображений метрических пространствов, Исследования по топологии*, II Наука, Ленинград, 1976, стр. 5–102.

(Поступила 27 05 1985)