PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 51 (65), 1992, 55–61

APPROXIMATION VON NICHTANALYTISCHEN FUNKTIONEN DURCH EINE p-POLYANALYTISCHE FUNKTION*

Miloš Čanak

Abstract. We introduce and prove a fundamental theorem on approximation of any non-analytic infinitely differentiable complex function by a p-polyanalytic function with constant characteristic. An estimation of the approximation error is also given.

Ralević [**1**] und Čanak [**2**] haben auf verschiedene Art und Weise den Begriff der p-polyanalytischen Funktionen eingeführt. In dieser Arbeit betrachtet man die p-polyanalytischen Funktionen in der Form

$$P_n(z,\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^k \cdot f_k(z,\bar{z})$$

wobei $f_k(z,\bar{z})$ beliebige, p-analytische Funktionen sind, die durch das bekannte partielle Gleichungssystem von Položij

$$u'_x = v'_y/p, \qquad u'_y = -v'_x/p, \qquad (f = u + iv)$$

definiert werden.

Dieses System können wir auch in der Form

$$u'_x - v'_y = ((1-p)/p)v'_y, \qquad u'_y + v'_x = -((1-p)/p)v'_x \tag{1}$$

schreiben. Wenn man die zweite Gleichung (1) mit i multipliziert und mit der ersten addiert, so erhält man die folgende komplexe Gleichung

$$pDf + i(1-p)Dv = 0, \qquad (p \neq 0) \tag{2}$$

wobei

$$Df = (u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x) = 2f'_{\bar{z}}, \qquad (f = u + iv)$$

der bekannte Operator von Kolossov (die sgn. areoläre Ableitung) ist.

---

*Aus Anlass des 80 Geburtstages von Lothar Collatz

AMS Subject Classification (1990): Primary 30 G 20

In der Gleichung (2) ist die Charakteristik $p = p(x,y)$ eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen x und y. Im speziellen Fall $p = c = \text{const.}$ geht die Gleichung (2) in

$$D[pf + i(1-p)v] = 0 \tag{3}$$

über. Daraus folgt $pf + i(1-p)v = \varphi(z)$ oder

$$\frac{p+1}{2} f + \frac{p-1}{2} \bar{f} = \varphi(z) \tag{4}$$

wobei $\varphi(z)$ eine beliebige analytische Funktion ist.

Aus (4) erhalten wir durch Konjugation nach einer kürzeren Rechnung auch die Formel

$$\frac{p+1}{2p}\varphi - \frac{p-1}{2p}\bar{\varphi} = f(z,\bar{z}). \tag{5}$$

Es sei K die Menge der stetigen komplexen Funktionen, P_c die Menge der p-analytischen Funktionen mit der konstanten Charakteristik $p = c$ und $\mathcal{A}$ die Menge der analytischen Funktionen ($\mathcal{A} \subset P_c \subset K$). Auf Grund der Formeln (4) und (5) führen wir auf der Menge K folgende Operatoren

$$R_c w = \frac{(c+1)w - (c-1)\bar{w}}{2c}, \qquad R_c^{-1} w = \frac{(c+1)w + (c-1)\bar{w}}{2} \tag{6}$$

ein. Leicht sehen wir dass $R_c^{-1} R_c w = R_c R_c^{-1} w = w(z,\bar{z})$.

Jeder analytischen Funktion $\varphi(z)$ entspricht auf eine einzige Art und Weise eine p-analytische Funktion $f(z,\bar{z})$ mit der konstanten Charakteristik $p = c$ mittels des Operators

$$R_c\varphi = \frac{c+1}{2c}\varphi - \frac{c-1}{2c}\bar{\varphi} = f(z,\bar{z}).$$

Anderseits entspricht jeder p_c-analytischen Funktion $f(z,\bar{z})$ eine analytische Funktion, mittels des Operators

$$R_c^{-1} f = \frac{c+1}{2} f + \frac{c-1}{2}\bar{f} = \varphi(z).$$

Betrachten wir jetzt folgende komplexe Polynome

$$F(z,\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^k \cdot f_{k_c}(z,\bar{z}), \qquad \Phi(z,\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^k \cdot \varphi_k(z),$$

wobei f_{k_c} beliebige p-analytische Funktionen mit der konstanten Charakteristik $p = c$ sind und $\varphi_k(z)$ beliebige analytische Funktionen darstellen. Dabei ist $F(z,\bar{z})$ eine p-polyanalytische Funktion und $\Phi(z,\bar{z})$ eine gewöhnliche polyanalytische Funktion. Leicht sehen wir, dass die folgenden Eigenschaften

$$R_c^{-1} F = R_c^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^k \cdot f_{k_c}\right] = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^k R_c^{-1} f_{k_c}$$

$$R_c \Phi = R_c\left[\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^k \cdot \varphi_k\right] = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^k R_c \varphi_k$$

gelten.

Auf der Menge der differenzierbaren komplexen Funktionen im Sinne von Kolossov führen wir einen neuen Operator A_c als Komposition der Operatoren R_c, R_c^{-1} und D durch folgende Formel

$$A_c w(z,\bar z) = R_c D R_c^{-1} w$$

ein. Dieser Operator stellt die Verallgemeinerung des Operators von Kolossov D dar und reduziert sich im speziellen Fall ($c=1$) auf denselben. Leicht sehen wir dass die folgenden Eigenschaften dieses Operators

(I) $\quad A^{(0)}w = R_c R_c^{-1} w = w, \quad A^{(1)}w = Aw, \quad \dots, \quad A^{(k)}w = A[A^{(k-1)}w]$

(II) $\quad A[w_1(z,\bar z) \pm w_2(z,\bar z)] = A[w_1(z,\bar z)] + A[w_2(z,\bar z)]$

(III) $\quad A[f_p(z,\bar z)] = 0, \qquad (f_p \in P_c)$

(IV) $\quad A\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z-\bar z}{2i}\right)^k \cdot f_{k_c}\right] = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{z-\bar z}{2i}\right)^{k-1} \cdot R_c(i\varphi_k)$

gelten.

Es sei $w = w(z,\bar z)$ eine stetige, beliebig oft differenzierbare Funktion im Sinne von Kolossov. Wir entwickeln jetzt formal diese Funktion in eine komplexe Reihe der Form

$$w(z,\bar z) = f_{0_c}(z,\bar z) + \left(\frac{z-\bar z}{2i}\right) f_{1_c}(z,\bar z) + \cdots + \left(\frac{z-\bar z}{2i}\right)^n f_{n_c}(z,\bar z) + \cdots \tag{8}$$

wobei $f_{0_c}, f_{1_c}, \dots, f_{n_c}, \dots$ unbekannte p-analytische Funktionen mit der gegebenen konstanten Charakteristik $p = c$ sind.

Führen wir zuerst eine Abbildung $\alpha_{g(z)}$ ($g(z)$ ist eine beliebige analytische Funktion) der Menge K auf die Menge $\mathcal{A}$ auf folgende Art und Weise ein: Die Funktion $\Omega = \alpha_{g(z)} w$ ($w = w(z,\bar z) \in K$, $\Omega(z) \in \mathcal{A}$) kann aus der Funktion $w = w(z,\bar z)$ entstehen, wenn man den Wert $\bar z$ mit $g(z)$ vertauscht und den Wert z unveränderlich lässt. Die Funktion $\Omega = \alpha_{g(z)} w$ enthält keine Veränderliche $\bar z$ und darum ist sie analytisch. Der geometrische Sinn dieses Operators ist wie folgt: Wenn $\bar z = g(z)$ die Gleichung einer glatten, einfachen, geschlossenen oder nichtgeschlossenen Kontur ist, so besitzen die Funktionen $w(z,\bar z)$ und $\alpha_{g(z)} w$ den gleichen Randwert auf dieser Kontur.

Wenn wir auf der beiden Seite von (8) den Operator α_z anwenden, so erhalten wir

$$\alpha_z w(z,\bar z) = \alpha_z f_{0_c}(z,\bar z) = \alpha_z[(c+1)\varphi_0(z) - (c-1)\overline{\varphi_0(z)}]/(2c). \tag{9}$$

Aber wir batrachten jene Untermenge A_r der Menge $\mathcal{A}$, derer Taylorsche Entwicklung nur reelle Koeffizienten besitzt. In diesem Falle gilt

$$\overline{\varphi(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \bar z^k = \varphi(\bar z),$$

und die Formel (9) geht in

$$\begin{aligned}\alpha_z w(z,\bar z) &= \alpha_z \frac{(c+1)\varphi_c(z) - (c-1)\varphi_c(\bar z)}{2c} \\ &= \frac{(c+1)\varphi_c(z)}{2c} - \frac{(c-1)\varphi_c(z)}{2c} = \frac{\varphi_0(z)}{c}\end{aligned}$$

über. Daraus folgt $\varphi_0(z) = c\alpha_z w(z,\bar{z})$ und $f_{0_c} = R_c[c\alpha_z w(z,\bar{z})]$.

Durch Anwendung des Operators A und der Eigenschaft (IV) auf (8) erhält man

$$Aw(z,\bar{z}) = R_c(i\varphi_1) + 2\Big(\frac{z-\bar{z}}{2i}\Big)R_c(i\varphi_2) + \cdots + n\Big(\frac{z-\bar{z}}{2i}\Big)^{n-1} R_c(i\varphi_n) + \cdots$$

und

$$\alpha_z Aw(z,\bar{z}) = \alpha_z R_c(i\varphi_1) = \alpha_z[(c+1)i\varphi_1 - (c-1)\overline{i\varphi_1(z)}]/2c = (i\varphi_1)/c, \quad (i\varphi_1 \in A_r).$$

Daraus folgt

$$\varphi_1 = \frac{c}{i}\alpha_z Aw(z,\bar{z}) \quad \text{und} \quad f_{1_c} = R_c\Big[\frac{c}{i}\alpha_z Aw(z,\bar{z})\Big].$$

Auf eine gleiche Art und Weise erhält man

$$\alpha_z A^{(2)}w = \alpha_z 2R_c[i^2\varphi_2] = 2!i^2\varphi_2/c, \qquad (\varphi_2 \in A_r).$$

Daraus folgt

$$\varphi_2 = \frac{c}{2!i^2}\alpha_z A^{(2)}w \quad \text{und} \quad f_{2_c} = R_c\Big[\frac{c}{2!i^2}\alpha_z A^{(2)}w\Big].$$

Im allgemeinen Fall gilt

$$f_{k_c} = R_c\Big[\frac{c}{k!i^k}\alpha_z A^{(k)}w\Big] \qquad (\varphi_{2k} \in A_r,\ i\cdot\varphi_{2k+1} \in A_r). \tag{10}$$

Wenn wir die Werte f_{k_c} aus (10) in (8) einsetzen, so erhalten wir die formale Entwicklung der Funktion $w(z,\bar{z})$ in die areoläre Reihe der Form

$$w(z,\bar{z}) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{z-\bar{z}}{2i}\Big)^k \cdot R_c\Big[\frac{c\alpha_z A^{(k)}w}{k!\,i^k}\Big].$$

Wir betrachten den Streifen $-\delta/2 \le \operatorname{Im} z \le \delta/2$ und schätzen den Fehler bei Approximation der Funktion $w(z,\bar{z})$ mit der p-polyanalytischen Funktion

$$\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{z-\bar{z}}{2i}\Big)^k \cdot R_c\Big[\frac{c}{k!\,i^k}\alpha_k A^k w\Big]$$

in diesem Streifen ab. Zuerst beweisen wir die folgenden Lemmata.

Lemma 1. *Wenn die Funktion $\varphi(z)$ analytisch und beschränkt im Streifen $-\delta/2 \le \operatorname{Im} z \le \delta/2$ ist und wenn $|\varphi(z)| \le \beta$ gilt, so gilt auch $|R_c\varphi| \le \beta$ für jede reelle Zahl $c > 1$.*

Beweis.

$$|R_c\varphi| = \Big|\frac{(c+1)\varphi - (c-1)\bar{\varphi}}{2c}\Big| \le \frac{c+1}{2c}|\varphi| + \frac{c-1}{2c}|\bar{\varphi}| \le \frac{c+1}{2c}\beta + \frac{c-1}{2c}\beta = \beta.$$

Lemma 2. *Wenn die Funktion $w(z,\bar{z})$ stetige areoläre Ableitung im δ-Streifen besitzt und wenn $|Dw| \le \gamma_1$ gilt, so ist auch die verallgemeinerte areoläre Ableitung Aw in dem gleichen Streifen beschränkt.*

Beweis. Unmittelbar sehen wir dass

$$\begin{aligned}|A_c w| &= |R_c D R_c^{-1} w| = \left| R_c D \left[\frac{(c+1)w + (c-1)\bar{w}}{2} \right] \right| \\ &= \left| R_c \frac{(c+1)Dw + (c-1)D\bar{w}}{2} \right| \\ &= \left| \frac{c+1}{2c} \left[\frac{(c+1)Dw + (c-1)D\bar{w}}{2} \right] - \frac{c-1}{2c} \left[\frac{(c+1)\overline{Dw} + (c-1)\overline{D\bar{w}}}{2} \right] \right| \\ |Dw| &= |D(u+iv)| = |(u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x)| \\ &= [u'^2_x + v'^2_y + u'^2_y + v'^2_x + 2(u'_y v'_x - u'_x v'_y)]^{1/2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}|D\bar{w}| &= |D(u-iv)| = |(u'_x + v'_y) + i(u'_y - v'_x)| \\ &= [u'^2_x + v'^2_y + u'^2_y + v'^2_x - 2(u'_y v'_x - u'_x v'_y)]^{1/2}\end{aligned}$$

gilt.

Wenn die partiellen Ableitungen u'_x, u'_y, v'_x und v'_y im δ-Streifen stetig und beschränkt sind und wenn die Majorante γ_1 von $|Dw|$ existiert, so muss auch eine reelle Konstante δ_1 existieren, so dass $|D\bar{w}| \le \delta_1$ gilt. Daraus folgt weiterhin

$$\begin{aligned}|A_c w| &\le \frac{(c+1)^2}{4c}\gamma_1 + \frac{c^2-1}{4c}\delta_1 + \frac{c^2-1}{4c}\gamma_1 + \frac{(c-1)^2}{4c}\delta_1 \\ &= \frac{c+1}{2}\gamma_1 + \frac{c-1}{2}\delta_1 = \theta_1.\end{aligned}$$

Bemerkung 1. Wenn ein beliebiger Punkt z zum δ-Streifen gehört, so muss auch der Punkt $\bar{z}$ dem gleichen Streifen, die symmetrisch im Bezug auf die Gerade $z = \bar{z}$ ist, gehören. Operator α_z bildet den Punkt $\bar{z}$ in den Punkt z ab. Wenn die Majorante θ_1 von $|A_c w|$ existiert, so muss auch eine reelle, positive. Zahl ζ_1 als Majorante von $|\alpha_z A_c w|$ existieren ($|\alpha_z A_c w \le \zeta_1|$).

Wenn die Funktion $w(z, \bar{z})$ stetige, areoläre Ableitungen beliebiger Ordnung in δ-Streifen besitzt, so existieren auf Grund des Lemmas 2 solche positive reelle Konstanten ζ_k dass

$$|\alpha_z A^k w| \le \zeta_k, \qquad (k = n+1, n+2, \ldots). \tag{11}$$

Dann gilt

$$|R| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{z-\bar{z}}{2i} \right)^k \cdot R_c \left[\frac{c}{k!\, i^k} \alpha_z A^k w \right] \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2} \right)^k \cdot \frac{c}{k!} \cdot \zeta_k.$$

Da die Werte ζ_k beschränkt sind, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2} \right)^k \cdot \frac{c}{k!} \cdot \zeta_k.$$

auf Grund des D'Alembert-schen Kriteriums und $|R| \to 0$ wenn $n \to \infty$. Daraus folgt der nächste

Satz. *Es sei $w(z,\bar{z})$ eine gegebene komplexe Funktion die beliebig oft im Streifen $-\delta/2 \le \operatorname{Im} z \le \delta/2$ differenzierbar ist, und deren areoläre Ableitungen in dem gleichen Streifen beschränkt sind. Dann lässt sich die Funktion $w(z,\bar{z})$ im δ-Streifen durch eine p-polyanalytische Funktion n-ter Ordnung der Form*

$$w(z,\bar{z}) \approx \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^k \cdot R_c\left[\frac{c\cdot \alpha_z A^{(k)} w}{k!\, i^k}\right] \tag{12}$$

approximieren. Für die Abschätzung des Approximationsfehlers können wir die Abschätzung vom Cauchyschen Typus für die Koeffizienten ausnützen und $|R| \to 0$ wenn $n \to \infty$.

Bemerkung 2. Im Falle wenn eine positive Zahl der Form $\zeta = \sup \zeta_k$ $(k = n+1, n+2, \dots)$ existiert, ergibt sich die Abschätzung des Approximationsfehlers in folgender einfachsten Form

$$|R| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2}\right)^k \frac{c\zeta_k}{k!} \le c\zeta \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\delta/2)^k}{k!} \le c\zeta \frac{(\delta/2)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\delta/2}. \tag{13}$$

Bemerkung 3. Wenn einige der $\alpha_z A^k w$ $(k = n+1, n+2, \dots)$ im δ-Streifen nicht beschränkt sind, so existiert kein endlicher Wert $\zeta = \sup \zeta_k$ und die Abschätzung (13) gilt nicht mehr. In diesem Falle können wir die Funktion $w(z,\bar{z})$ nur in dem endlichen Gebiet $-k_0 \le \operatorname{Re} z \le k_0$ $(k_0 < \infty)$, $-\delta/2 \le \operatorname{Im} z \le \delta/2$ approximieren.

Beispiel. Man soll die Funktion $w(z,\bar{z}) = (3z+\bar{z})i/(\bar{z}-z+2i)$ durch eine p-polyanalytische Funktion III Ordnung mit der gegebenen Charakteristik $p = 1/2$ approximieren und den Approximationsfehler im Gebiet σ: $-k_0 \le \operatorname{Re} z \le k_0$, $-\delta/2 \le \operatorname{Im} z \le \delta/2$, abschätzen.

Auf Grund der Formel (6), finden wir die Werte: $\alpha_z w = 2z$, $\alpha_z A w = 2iz$, $\alpha_z A^{(2)} w = 2\cdot 2!\cdot i^2 z$, $\alpha_z A^{(3)} w = 2\cdot 3!\cdot i^3 z$, $\dots$, $\alpha_z A^{(n)} w = 2\cdot n!\cdot i^n z$.

Im Gebiet σ gilt $|z| \le \sqrt{(\delta/2)^2 + k_0^2}$. Durch Ausnützung der Formel (10) erhalten wir die Werte

$$f_{0_c}(z,\bar{z}) = f_{1_c}(z,\bar{z}) = f_{2_c}(z,\bar{z}) = f_{3_c}(z,\bar{z}) = (3z+\bar{z})/2$$

und die gesuchte Approximation hat die Form

$$\frac{(3z+\bar{z})i}{\bar{z}-z+2i} \approx \frac{3z+\bar{z}}{2}\left[1 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^3\right].$$

Auf Grund (11) können wir die Approximationsfehler abschätzen. So haben wir

$$\begin{aligned}|R| &\le \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2}\right)^k \cdot \frac{c}{k!}\zeta_k \le \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2}\right)^k \cdot \frac{1/2}{k!} \cdot 2k! \cdot \sqrt{(\delta/2)^k + k_0^2} \\ &= \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2}\right)^k \sqrt{(\delta/2)^2 + k_0^2} = \frac{\sqrt{(\delta/2)^2 + k_0^2}}{1-\delta/2} \left(\frac{\delta}{2}\right)^4.\end{aligned}$$

Es ist klar, dass in diesem Beispiel wie auch im allgemeinen Fall, besitzen die Funktion $w(z,\bar{z})$ und das Approximationspolynom den gleichen Randwert auf der x-Achse.

Bemerkung 4. Die nichtanalytische Funktion $w(z, \bar{z})$, lässt sich durch die gewöhnliche polyanalytische Funktion wie auch durch die p-polyanalytische Funktion approximieren. Im ersten Fall hat der Approximationsfehler die Form

$$\zeta \cdot \frac{(\delta/2)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\delta/2}$$

(siehe [**3**]). Darum ist die andere Approximation (12) besser, weil wir die Charakteristik $p = c$ beliebig klein wählen können und dadurch auf die Abschätzung des Fehlers wirken.

Bemerkung 5. Im Falle $p = p(x, y)$ ist der Übergang von (2) nach (3) nicht möglich und darum ist die Verallgemeinerung des Satzes auf nicht-konstante Charkteristik sehr kompliziert. Aber, es ist möglich, anstatt der reellen Achse, eine einfache, glatte, geschlossene Kontur L in der Form $\bar{z} = g(z)$ zu wählen. Die günstigste Kontur ist der Kreis $\bar{z} = a^2/z$, denn sich die Funktion $w(z, \bar{z})$ in einem Kreisring $a - \delta/2 \leq a \leq a + \delta/2$ durch eine p-polyanalytische Funktion der Form (12) approximieren lässt.

LITERATUR

[**1**] N. Ralević, Ph. D. Thesis, Mat. Fak. Belgrade, 1986.

[**2**] M. Čanak, *Randwertaufgabe von Riemann-typus für die p-polyanalytischen Funktionen*, Mat. Vesnik **40** (1988), 197–203.

[**3**] M. Čanak, *Über die α–Approximation einer nichtanalytischen Funktion durch ein areoläres Polynom*, Z. Angew. Math. Mech. **69** (1989), 71–73.

Katedra za matematiku
Poljoprivredni fakultet
11090 Zemun
Jugoslavija

(Eingegangen den 26 12 1990)