PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 55 (69), 1994, 75–88

ИНВАРИАНТЫ И КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В n–МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. Л. Певзнер

Abstract. The complete solution of the problem of finding invariants and canonical equations of quadrics (hypersurfaces of second order) in n-dimensional Euclidean space is given. The square matrix A of the coefficients of second order terms of a quadric equation, and the rectangular matrix D obtained from A by adding of the column of the coefficients of first order terms, are considered. The ranks r and q of these matrices are invariants of a quadric; if $r = q$, then the quadric is central, if $r + 1 = q$ it is parabolic. An invariant Γ_q, which is a coefficient of a polynomial, is introduced. All the coefficients of the canonical equation of a quadric are expressed through eigenvalues of the matrix A and the invariant Γ_q. The problem is solved without "semi-invariants".

Резюме. Дается полное решение задачи, обозначенной в заглавии, отличающееся от известных набором используемых инвариантов. Рассматривается матрица A, составленная из коэффициентов старших членов уравнения гиперповерхности второго порядка (квадрики), и прямоугольная матрица D, получающаяся из A добавлением столбца коэффициентов членов первой степени. Ранги этих матриц, r и q соответственно, – инварианты квадрики. При $r = q$ квадрика называется центральной, при $r + 1 = q$ – параболической. Далее вводится еще один инвариант Γ_q – коэффициент некоторого многочлена. Все коэффициенты канонических уравнений квадрик выражаются через характеристические числа матрицы A и инвариант Γ_q. В использовании так называемых "условных инвариантов" необходимости нет.

Настоящая заметка посвящена вопросу, который в литературе освещен, на нас взгляд, не лучшим образом. Автор вынужден признаться, что ему известно лишь одно полное изложение вопроса о канонических представлениях и инвариантах гиперповерхности второго порядка (квадрики) в n-мерном евклидовом пространстве, приведенное в книгах Шилова [**1**] и Розенфельда [**2**]. Наше изложение представляется более предпочтительным ввиду следующих его особенностей.

Во-первых, вводится инвариант q – ранг некоторой прямоугольной матрицы, который позволяет сразу, то есть не приступая к приведению

AMS Subject Classification (1991): Primary 53A07, 53A55 уравненя гиперповерхости к каноническому виду, ввести признак, позволяющий различать центральные и параболические квадрики. Во-вторых, применяется инвариант Γ_q, что позволяет обойтись без так называемых условных инвариантов, значительно усложняющих изложение. Условные инварианты обычно используются в курсах аналитической геометрии (см., например, [**3**]), исползуются они также и в упомянутых книгах [**1**] и [**2**], хотя самого термина "условные инварианты" там нет.

Применение инвариантов q и Γ_q позволяет столь просто и четко формулировать окончательный результат, что завершающая сводка результатов фактически не нужна. Она приводится в нашей заметке лишь как дань традиции.

Предлагаемое здесь изложение основано на работах автора [**4**] и [**5**], где решена более общая задача – задача классификации квадрик в квазиэллиптическом пространстве.

1. Инварианты уравнения квадрики.

В этом параграфе устанавливается полная система инвариантов уравнения квадрики относительно преобразования ортонормированной системы координат.

1.1. Преобразование уравнения гиперповерхности второго порядка к новым координатам. Уравннение квадрики в n-мерном вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{E}_n$

$$\sum_{i;j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + c = 0, \tag{1}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, запишем в матричной форме:

$$X^TAX + a^TX + X^Ta + c = 0. \tag{2}$$

Здесь обозначено:

$$X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|, \quad a = \left\| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} \right\|, \quad A = \|a_{ij}\|.$$

Матрица A – квадратная симметрическая, то есть $A = A^T$, где T – знак транспонирования. Система координат ортонормированная.

Уравнение перехода к другой ортонормированной системе с координатными векторами той же длины имеет вид

$$X = QX' + h, \tag{3}$$

где X и X' координатные столбцы текущей точки в старых и новых координатах, Q – ортогональная матрица порядка n (то есть $QQ^T = Q^TQ = E$,

E – единичная матрица), h – столбец высоты n. При $Q = E$ преобразование координат называется *переносом*, при $h = 0$ – *поворотом*.

Непосредственым подсчетом убеждаемся, что в результате преобразования (3) уравнение (2) принимает вид

$$X^{T'} A' X' = a^{T'} X' + X^{T'} a' + c' = 0, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} A' &= Q^T A Q, \\ a' &= Q^T A h + Q^T a, \\ c' &= h^T A h + a^T h + h^T a + c. \end{aligned} \tag{5}$$

Наша задача состоит в том, чтобы выбрать преобразование координат (то есть выбрать Q и h) таким образом, чтобы в результате перехода к новым координатам уравнение (1) было приведено к возможно более простому (каноническому) виду, и выразить коэффициенты канонического уравнения через коэффициенты исходного.

1.2. Уточнение понятия инварианта Ортогональный *инвариант уравнения квадрики* – это такая функция $I(a_{ij}, a_k, c)$ коэффициентов ее уравнения, которая не меняется при преобразовании данной ортонормированной системы координат к другой ортонормированной системе с базисными векторами той же длины, то есть при преобразовании уравнения (2) по формуле (3). Инвариант уравнения квадрики может изменяться при умножении всех коэффициентов уравнения (2) на одно и то же число $\mu \neq 0$, то есть, вообще говоря, $I(a_{ij}, a_k, c) \neq I(\mu a_{ij}, \mu a_k, \mu c)$. Во многих случаях (а мы будем иметь дело только с такими) инварианты являются однородными функциями коэффициентов уравнения квадрики. В таких случаях

$$I(\mu a_{ij}, \mu a_k, \mu c) = \mu^p \cdot I(a_{ij}, a_k, c).$$

Число p – степень однородной функции – будем называть *порядком инварианта*. Важно заметить, что при $p = 0$ инвариант уравнения квадрики будет инвариантом самой квадрики. Такой инвариант имеет геометрический смысл.

Пусть I_k – инварианты уравнения квадрики порядков p_k, а α_k – какие-либо числа; $k = 1, 2 \ldots, m$. Тогда $I = I_1^{\alpha_a} \cdot I_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot I_m^{\alpha_m}$ есть тоже инвариант уравнения квадрики, а его порядок равен $p = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_m\alpha_m$.

Из двух или большего числа инвариантов уравнения квадрики легко сконструировать инвариант порядка 0, то есть инвариант самой квадрики. Для этого достаточно так подобрать α_k, чтобы в предыдущей формуле получилось $p = 0$. Заметим также, что если I – инвариант уравнения квадрики четного порядка, то его знак $\operatorname{sign} I$ будет инвариантом порядка 0, то есть знак инварианта четного порядка имеет геометрический смысл. Инвариант нечетного порядка имеет геометрический смысл лишь в том случае, когда он равен нулю. Далее в пунктах 1.3 и 1.4 мы установим ряд инвариантов уравнения квадрики, которые позволяют во всех случаях записать каноническое уравнение квадрики. Мы будем говорить,что они образуют *полную систему инвариантов* уравнения квадрики.

1.3. Основные инварианты. (1) В обозначениях пункта 1.1 положим $\Delta = \det A$ и соответственно $\Delta' = \det A'$. Тогда в силу первого уравнения (5)

$$\Delta' = \det A' = \det(Q^T AQ) = \det Q^T \cdot \det A \cdot \det Q = \det A = \Delta,$$

так как $\det Q = \det Q^T = \pm 1$.

Таким образом, *определитель* Δ *матрицы* A, *составленной из коэффициентов старших членов уравнения квадрики, есть инвариант ее уравнения.* Легко видеть что *порядок этого инварианта равен* n.

(2) Обозначим через B и B' матрицы $(n+1)$-го порядка, составленные из всех коэффициентов уравнений (2) и (4) соответственно. В блочной форме эти матрицы записываются так:

$$B = \begin{Vmatrix} A & a \\ a^T & c \end{Vmatrix}, \qquad B' = \begin{Vmatrix} A' & a' \\ a^{T\prime} & c' \end{Vmatrix}.$$

Нам нужна будет еще одна матрица того же порядка:

$$P = \begin{Vmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Так как $\det P = \pm 1$ и в силу (5) $B' = P^T BP$, то

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \det B' = \det(P^T BP) \\ &= \det P^T \cdot \det B \cdot \det P = \det B = \Gamma \end{aligned}$$

и, следовательно, *определитель* Γ *матрицы* B, *составленной из коэффициентов уравнения квадрики, есть инвариант этого уравнения. Порядок инварианта* Γ *равен* $n+1$.

(3) Многочлен

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + \Delta_1 \cdot (-\lambda)^{n-1} + \ldots + \Delta_{n-1}(-\lambda) + \Delta_n$$

называется *характеристическим многочленом матрицы* A. Так как

$$\begin{aligned} \Delta'(\lambda) &= \det(A' - \lambda E) = \det(Q^T AQ - \lambda E) \\ &= \det(Q^T \cdot (A - \lambda E) \cdot Q) = \det Q^T \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det Q \\ &= \det(A - \lambda E) = \Delta(\lambda), \end{aligned}$$

то *характеристический многочлен матрицы* A *инвариантен относительно преобразования коодринат.* Из этого тривиально вытекают два важных следствия.

(3а) *Коэффициенты* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ *характеристического многочлена* $\Delta(\lambda)$ *являются инвариантами уравнения квадрики.* Они преставляют собой суммы главных миноров матрицы A соответствующего порядка: инвариант Δ_k – это сумма миноров k-го порядка, $k = 1, 2, \ldots, n$; в частности, $\Delta_n = \Delta$. *Порядок инварианта* Δ_k *равен* k.

(3б) Корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$, то есть *характеристические числа матрицы* A, *являются инвариантами уравнения квадрики.* Выясним, каков порядок этих инвариантов.

С этой целью рассмотрим характеристические многочлены матриц A и μA, обозначив переменную в первом многочлене через λ, а во втором – $\tilde{\lambda}$. Эти многочлены таковы: $\det(A - \lambda E)$ и $\det(\mu A - \tilde{\lambda} E)$. Второй многочлен преобразуем:

$$\det(\mu A - \tilde{\lambda} E) = \mu^n \cdot \det\left(A - \tilde{\lambda}\mu^{-1} E\right).$$

Таким образом, характеристические числа обеих матриц могут быть найдены из уравнений $\det(A - \lambda E) = 0$ и $\det(A - \tilde{\lambda}\mu^{-1} E)$. Поэтому они связаны соотношением $\lambda = \tilde{\lambda}/\mu$ или $\tilde{\lambda} = \mu\lambda$. Следовательно, при умножении коэффициентов уравнения квадрики на μ соответствующие характеристические числа умножаются тоже на μ. Это значит, что *характеристические числа матрицы* A *являются инвариантами порядка* 1.

(4) Наряду с уже встречавшимися квадратными матрицами A и B рассмотрим прямоугольную матрицу $D = \|Aa\|$, у которой n строк и $n+1$ столбцов; соответствующие матрицы, составленные из коэффициентов преобразованного уравнения будем отличать штрихом: A', B', D'. В силу (5)

$$A' = Q^T A Q, \quad B' = P^T B P, \quad D' = Q^T D P.$$

Так как матрицы Q и P неособенные, то ранги матриц A, B, D равны соответственно рангам матриц A', B', D'. Это значит, что ранги всех трех матриц не меняются при преобразовании координат. Не меняются они и при умножении коэффициентов квадрики на произвольное число. Поэтому *ранги матриц* A, B, D *являются инвариантами квадрики.*

1.4. Еще один инвариант. Перечисленных в предыдущем пункте инвариантов недостаточно для полной характеристики квадрики. Квадрика имеет еще один инвариант, не сводящийся к рассмотренным. Обозначим через $\Gamma(\lambda)$ определитель λ-матрицы

$$B(\lambda) = \begin{Vmatrix} A - \lambda E & a \\ a^T & c \end{Vmatrix}.$$

Этот определитель представляет собой многочлен n-ой степени относительно λ:

$$\Gamma(\lambda) = \det B(\lambda) = \Gamma_0 \cdot (-\lambda)^n + \Gamma_1 \cdot (-\lambda)^{n-1} + \cdots + \Gamma_{n-1} \cdot (-\lambda) + \Gamma_n.$$

Здесь Γ_k – сумма тех главных миноров $(k+1)$-го порядка матрицы B, которые содержат элемент c; их называют окаймленньими минорами матрицы A. Очевидно, что $\Gamma_0 = c$, $\Gamma_n = \Gamma$.

Теорема. (а) *Многочлен* $\Gamma(\lambda)$ *инвариантен относительно поворотов.*

(б) *Если* $\operatorname{rang} D = q$, *то* $n - q$ *последних (младших) членов многочлена* $\Gamma(\lambda)$ *равны нулю*: $\Gamma_{q+1} = \Gamma_{q+2} = \ldots = \Gamma_n = 0$.

(в) *Коэффициент* Γ_q *инвариантен при переносах.*

Доказательство. (а) Первая часть теоремы доказаывается непосредственным подсчетом многочлена $\Gamma(\lambda)$ в новых координатах. Имеем в силу (5) при $h = 0$:

$$\begin{aligned} B'(\lambda) &= \left\| \begin{matrix} A' - \lambda E & a' \\ a^{T'} & c' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} Q^T A Q - \lambda E & Q^T a \\ a^T Q & c \end{matrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{matrix} Q^T & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} A - \lambda E & a \\ a^T & c \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} Q^T & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot B(\lambda) \cdot \left\| \begin{matrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|. \end{aligned}$$

А так как

$$\det \left\| \begin{matrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \pm 1,$$

то $\Gamma'(\lambda) = \det B'(\lambda) = \det B(\lambda) = \Gamma(\lambda)$.

Инвариантность многочлена $\Gamma(\lambda)$ относительно поворотов доказана.

(б) Если $q = n$, то второе утверждение теоремы тривиально, ибо членов, про которые утверждается, что они равны нулю, нет. Поэтому в дальнейшем считаем $q < n$. В этом случае имеется $n - q$ нулевых независимых линейных комбинаций из строк матрицы D. Поэтому существует квадратная неособенная матрица U порядка n, такая, что в матрице $U^T D = \| U^T A \;\; U^T a \|$ первые $n - q$ строк будут нулевыми:

$$U^T D = \begin{array}{c c} \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ \ast & \ast \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} n-q \\ q \end{matrix} \\ \begin{matrix} n & 1 \end{matrix} & \end{array}.$$

Можно для простоты положить $\det U = \pm 1$; если это не так, то вместо матрицы U можно взять матрицу $U / \sqrt[n]{|\det U|}$. Далее обозначим

$$V = \left\| \begin{matrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

и так как $\det V = \pm 1$, то $\Gamma(\lambda) = \det B(\lambda) = \det(V^T \cdot B(\lambda) \cdot V)$.

Подсчитываем произвдение матриц:

$$\begin{aligned} V^T \cdot B(\lambda) \cdot V &= \left\| \begin{matrix} U^T & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} A - \lambda E & a \\ a^T & c \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{matrix} U^T A U - \lambda U^T U & U^T a \\ a^T U & c \end{matrix} \right\|. \end{aligned} \tag{6}$$

Выделим нулевые блоки в матрицах $U^T a$ и $U^T AU$. В матрице-столбце $U^T a$ первые $n-q$ злементов - нули. Оставшуюся часть обозначим a_1. Так как в матрице $U^T A$ первые $n-q$ строк тоже нулевые, то и в матрице $U^T AU$ первые $n-q$ строк тоже нулевые, а в силу симметричности последней матрицы у нее будут нулевыми и первые $n-q$ столбцов; оставшуюся часть этой матрицы обозначим A_1. Таким образом получаем:

$$U^T a = \begin{array}{cc} \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline a_1 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} n-q \\ q \end{array} \\ 1 & \end{array} ; \qquad U^T AU = \begin{array}{cc} \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} n-q \\ q \end{array} \\ \begin{array}{cc} n-q & q \end{array} & \end{array} .$$

На блоки соответствующих размеров разобьем и матрицу $U^T U$:

$$U^T U = \left\| \begin{array}{c|c} u & u_2 \\ \hline u_2^T & u_1 \end{array} \right\| .$$

При таких обозначениях из (6) получаем:

$$V^T \cdot B(\lambda) \cdot V = \left\| \begin{array}{ccc} -\lambda u & -\lambda u_2 & 0 \\ -\lambda u_2^T & A_1 - \lambda u_1 & a_1 \\ 0 & a_1^T & c \end{array} \right\| \quad \begin{array}{c} n-q \\ q \\ 1 \end{array}$$

Поэтому

$$\Gamma(\lambda) = \det(V^T \cdot B(\lambda) \cdot V) = (-\lambda)^{n-q} \cdot \det \left\| \begin{array}{ccc} u & u_2 & 0 \\ -\lambda u_2^T & A_1 - \lambda u_1 & a_1 \\ 0 & a_1^T & c \end{array} \right\| . \qquad (7)$$

Таким образом, многочлен $\Gamma(\lambda)$ делится на $(-\lambda)^{n-q}$, поэтому члены многочлена, содержащие $-\lambda$ в степенях с показателями, меньшими $n-q$, равни нулю. Этим доказано утверждение (б) теоремы.

(в) Итак, младший коэффициент многочлена $\Gamma(\lambda)$, который может быть отличен от нуля – это Γ_q. Докажем его инвариантность при переносах. Как отмечалось, при $q = n$ будет $\Gamma_q = \Gamma$, а инвариантность этого определителя уже доказана в пункте 1.3. Поэтому, как и в предыдущей части доказательства, считаем $q < n$. Так как Γ_q есть коэффициент многочлена $\Gamma(\lambda)$ при $(-\lambda)^{n-q}$, а коэффициенты младших членов равны нулю, то $\Gamma_q = \Gamma(\lambda)/(-\lambda)^{n-q}|_{\lambda=0}$. Подставив сюда значение $\Gamma(\lambda)$ из формулы (7), получаем:

$$\Gamma_q = \det \left\| \begin{array}{ccc} u & u_2 & 0 \\ 0 & A_1 & a_1 \\ 0 & a_1^T & c \end{array} \right\| = \det u \cdot \det \left\| \begin{array}{cc} A_1 & a_1 \\ a_1^T & c \end{array} \right\| . \qquad (8)$$

Для доказательства инвариантности коэффициента Γ_q при переносах достаточно подсчитать этот коэффициент в новых координатах и сравнить с (8). В силу (5) с учетом того, что $Q = E$, имеем:

$$B'(\lambda) = \left\| \begin{matrix} A' - \lambda E & a' \\ a'^T & c' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} A - \lambda E & Ah + a \\ h^T A + a^T & c' \end{matrix} \right\|,$$

где $c' = h^T Ah + a^T h + h^T a + c$. Поэтому

$$\Gamma'(\lambda) = \det \left\| \begin{matrix} A - \lambda E & Ah + a \\ h^T A + a^T & c' \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \Gamma'_q = \Gamma'(\lambda)/(-\lambda)^{n-q}|_{\lambda=0}.$$

Чтобы подсчитать опредилитель $\Gamma'(\lambda)$, выполним в нем два преобразования. Во-первых, первую блочную строку умножим слева на строку h^T и вычтем из второй. Потом первый блочный столбец умножим справа на столбец h и вычтем из второго. В результате получим:

$$\Gamma'(\lambda) = \det \left\| \begin{matrix} A - \lambda E & a + \lambda h \\ a^T + \lambda h^T & c - \lambda h^T h \end{matrix} \right\|.$$

Во-вторых, полученный определитель представим в таком виде:

$$\Gamma'(\lambda) = \det \left(\left\| \begin{matrix} U^T & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} A - \lambda E & a + \lambda h \\ a^T + \lambda h^T & c - \lambda h^T h \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \right),$$

где U – матрица, введенная в предыдущей части доказательства, определитель которой, напомним, равен ± 1. После умножения получаем:

$$\Gamma'(\lambda) = \det \left\| \begin{matrix} U^T AU - \lambda U^T U & U^T a - \lambda U^T h \\ a^T U - \lambda h^T U & c - \lambda h^T h \end{matrix} \right\|.$$

Применяя использованные ранее обозначения блоков матриц $U^T AU$, $U^T U$, $U^T a$ и обозначая дополнительно

$$U^T h = \begin{array}{c} \left\| \begin{matrix} h_1 \\ \\ h_2 \end{matrix} \right\| \end{array} \begin{array}{c} n-q \\ \\ q \end{array},$$

можем представить $\Gamma'(\lambda)$ так:

$$\Gamma'(\lambda) = \det \left\| \begin{matrix} -\lambda u & -\lambda u_2 & \lambda h_1 \\ -\lambda u_2^T & A_1 - \lambda u_1 & a_1 + \lambda h_2 \\ \lambda h_1^T & a_1^T + \lambda h_2^T & c - \lambda h^T h \end{matrix} \right\| \begin{array}{c} n-q \\ q \\ 1 \end{array}.$$

Поэтому

$$\Gamma'(\lambda) = (-\lambda)^{n-q} \cdot \det \left\| \begin{matrix} u & u_2 & (-1)^{n-q} h_1 \\ -\lambda u_2^T & A_1 - \lambda u_1 & a_1 + \lambda h_2 \\ \lambda h_1^T & a_1^T + \lambda h_2^T & c - \lambda h^T h \end{matrix} \right\|$$

и, следовательно,

$$\Gamma'_q = \frac{\Gamma'(\lambda)}{(-\lambda)^{n-q}} \bigg|_{\lambda=0} = \det \left\| \begin{matrix} u & u_2 & (-1)^{n-q} h_1 \\ 0 & A_1 & a_1 \\ 0 & a_1^T & c \end{matrix} \right\| = \det u \cdot \det \left\| \begin{matrix} A_1 & a_1 \\ a_1^T & c \end{matrix} \right\|.$$

Сравнивая полученный результат с формулой (8), получаем $\Gamma_q = \Gamma'_q$, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует, что Γ_q *есть инвариант уравнения квадрики.* Как отмечалось, он представляется в виде суммы миноров $(q+1)$ -го порядка матрицы B, поэтому *его порядок равен* $q+1$.

2. Приведение уравнения квадрики к каноническому виду

В этом параграфе мы наидем канонические уравнения квадрик во всех возможных случаях и выразим их коэффициенты через инварианты.

2.1. Центральные и параболические квадрики. В пункте 1.3. было доказано, что ранг матрицы A и ранг матрицы D являются инвариантами квадрики. Будем пользоваться обозначениями: $\operatorname{rang} A = r$, $\operatorname{rang} D = q$ (последнее обозначение уже применялось в пункте 1.4.) Очевидно, что $r \le n$, $q \le n$.

Так как матрица D отличается от A только одним лишним столбцом, то число q либо равно числу r, либо на единицу больше. Это позволяет множество всех квадрик разбить на два класса:

Центральные квадрики; их признак $q = r$,
Параболические квадрики; их признак $q = r + 1$.

Заметим, что в случае параболической квадрики всегда $r < n$.

2.2. Упрощение старших членов уравнения квадрики путем поворота. По первому уравнению (5) матрица A, составленная из коэффициентов старших членов уравнения квадрики, при переходе к новым координатам преобразуется в матрицу $A' = Q^T A Q$, где Q – некоторая ортогональная матрица. Из курса линейной алгебры (см., например, [**1**]) известно, что для любой симметрической матрицы A можно так подобрать ортогональную матрицу Q, что матрица $A_0 = Q^T A Q$ будет диагональной. Легко понять, что диагональные элементы матрицы A_0 – это характеристические числа матрицы A, которые, как известно из пункта 1.3, являются инвариантами первого порядка уравнения квадрики. Среди этих характеристических чисел λ_k могут быть нули, количество же ненулевых характеристических чисел равно r – рангу матрицы A.

Таким образом, получаем:

$$A_0 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, матрица B, составленная из всех коэффициентов уравнения квадрики, в результате такого поворота приводится к следующему виду:

$$B' = \begin{Vmatrix} A_0 & a' \\ a'^T & c \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

где столбец a' определяется второй формулой (5) при условии $h = 0$.

Дальнейшие упрощения уравнения квадрики (то есть упрощения ее матрицы) надо выполнять так, чтобы матрица A_0 больше не менялась. Вследствие формул (5) это будет, прежде всего, при произвольных переносах. Это будет также и при некоторых поворотах, например, когда ортогональная матрица Q имеет вид

$$\begin{array}{cc} \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & R \end{Vmatrix} & \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} \end{array},$$

где R – произвольная ортогональная матрица порядка $n - r$.

В следующих двух пунктах будем отдельно рассматривать преобразование к каноническому виду уравнений центральных параболических квадрик.

2.3. Канонические уравнения центральных квадрик. В случае центральной квадрики ранги матриц A и D равны. В силу инвариантности этих рангов это значит, что столбец a' в матрице (9) есть линейная комбинация столбцов матрицы A_0. Следовательно, существует такой столбец h, что $A_0 h + a' = 0$. Выполним теперь перенос $X' = X'' + h$. Клетка A_0, как отмечалось, не изменится, свободный член примет новое значение c', а по второй формуле (5) будет $a'' = A_0 h + a' = 0$. Поэтому матрица квадрики примет следующий (канонический) вид:

$$B_0 = \begin{Vmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & C' \end{Vmatrix} = \begin{array}{cc} \left\Vert \begin{array}{ccccc|c} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & \\ & & \lambda_r & & & 0 \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & 0 & \\ \hline & & 0 & & & c' \end{array} \right\Vert & \begin{array}{c} \\ \\ n \\ \\ \\ \\ 1 \end{array} \end{array},$$

а уравнение квадрики -

$$\lambda_1 x_1''^2 + \cdots + \lambda_r x_r''^2 + c' = 0. \tag{10}$$

При $c' \neq 0$ это уравнеие часто записывают в такой форме:

$$\varepsilon_1 x_1^2/d_1^2 + \cdots \varepsilon_r x_r^2/d_r^2 = 1,$$

где опущены штрихи у переменных и обозначено $d_k^2 = |c'/\lambda_k|$, $\varepsilon_k = \operatorname{sign}(-c'/\lambda_k)$. Нам осталось выразить коэффициенты уравнения (10) через инварианты. Собственно, выразить осталось только c' так как инвариантность характеристических чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ доказана ранее.

Подсчитаем для канонической матрицы B_0 инвариант Γ_r (напоминаем, что для центральных квадрик $r = q$). Это будет сумма окаймленных миноров r-го порядка матрицы A_0. Из этих миноров отличным от нуля может быть только один, поэтому

$$\Gamma_r = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda_r & \\ & 0 & & c' \end{vmatrix} = \lambda_1 \dots \lambda_r c',$$

откуда $c' = \Gamma_r / (\lambda_1 \dots \lambda_r)$.

Видим, что c' – инвариант первого порядка уравнения квадрики, как и характеристические числа λ_k. Поэтому d_k и ε_k – инварианты порядка 0, то есть инварианты самой квадрики. Обычно d_k называют *полуосью* квадрики, причем при $\varepsilon = +1$ – *вещественной*, а при $\varepsilon = -1$ – *мнимой*.

2.4. Канонические уравнения параболических квадрик. Мы возвращаемся к матрице (9), полученной в результате преобразования уравнения квадрики путем надлежащим образом подобранного поворота. В случае параболической квадрики столбец a' не может быть представлен в виде линейной комбинации столбцов матрицы A_0, поэтому он не может быть уничтожен переносом.

Блочню матрицу (9) разобьем на более мелкие блоки:

$$B' = \begin{array}{c} \left\| \begin{matrix} A_{00} & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ a_1^T & a_2^T & c \end{matrix} \right\| \end{array} \begin{matrix} r \\ n-r \\ 1 \end{matrix},$$

где

$$A_{00} = \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{matrix} \right\|, \qquad a' = \left\| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\|.$$

После этого упрощение матрицы B' осуществим в три шага.

Шаг 1. Так как A_{00} – неособенная матрица, то существует столбец h_1 высоты r такой, что $A_{00} h_1 + a_1 = 0$. Заметив это, выполним перенос $X' = X'' + h$, где

$$h = \left\| \begin{matrix} h_1 \\ 0 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}.$$

При этом в соответствии с (5) столбец a' преобразуется в столбец

$$a'' = A_0 h + a' = \left\| \begin{matrix} A_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} h_1 \\ 0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} A_{00} h_1 + a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ a_2 \end{matrix} \right\|,$$

свободный член примет новое значение c', а остальные блоки матрцы B' не изменятся. Поэтому матрица квадрики в результате первого шага примет следующий вид:

$$B'' = \begin{Vmatrix} A_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & a_2^T & c' \end{Vmatrix}.$$

Отметим, что столбец a_2 обязательно отличен от нулевого так как в противном случае квадрика не была бы параболической.

Шаг 2. Прежде чем выполнить следующее преобразование, докажем, что существует такая ортогональная матрица R порядка $n-r$, что в столбце $R^T a_2$ все элементы, кроме последнего, будут нули.

Для этого в $(n-r)$-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}_{n-r}$, в котором введен ортонормированный базис, рассмотрим вектор $\vec{u}$ с координатным столбцом a_2. Длину вектора $\vec{u}$ обозначим u, то есть $u = \sqrt{a_2^T a_2} \neq 0$. В этом же пространстве рассмотрим вектор $\vec{u}'$ с координатным столбцом $a_2{}' = \|0 \ldots 0 \;\; u\|^T$; длина этого вектора тоже равна u.

Ясно, что существует ортогональное преобразование пространства $\mathbf{E}_{n-r}$, преобразующее вектор $\vec{u}$ в вектор $\vec{u}'$. Это вытекает, например, из того, что каждый из этих векторов можно дополнить до ортонормированного базиса, а линейное преобразование, отображающее один из этих базисов на другой, - ортогональное. Отсюда следует, что существует такая ортогональная матрица R порядка $n-r$, что $R^T a_2 = a_2{}'$.

Теперь возвратимся в исходное пространство $\mathbf{E}_n$ и выполним в нем преобразование системы координат (поворот) по формуле $X'' = QX'''$, где

$$Q = \begin{array}{c} \begin{Vmatrix} E & O \\ O & R \end{Vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array}.$$

В соответствии с формулами (5) получим матрицу B''' квадрики в новых координатах:

$$B''' = \begin{Vmatrix} A_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2' \\ 0 & a_2'^T & c' \end{Vmatrix}$$

или, возвращаясь к блокам прежних размеров,

$$B''' = \begin{Vmatrix} A_0 & a''' \\ a'''^T & c' \end{Vmatrix} \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array},$$

где

$$a''' = \begin{Vmatrix} 0 \\ a_2' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u \end{Vmatrix}.$$

Шаг 3. Теперь можно переносом $X''' = X'''' + h$ уничтожить свободный член C', для чего достаточно столбец h взять таким:

$$h = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -c'/2u \end{Vmatrix},$$

в этом убеждаемся с помощью последней формулы (5). Другие же блоки матрицы квадрики не меняются.

Окончательно получаем:

$$B_0 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & \lambda_r & & & & \vdots \\ & & & 0 & & & \\ & 0 & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & 0 & u \\ 0 & & \dots & & 0 & u & 0 \end{Vmatrix}.$$

Этой матрице соответствует каноническое уравнение параболической квадрики

$$\lambda_1 x_1''''^2 + \dots + \lambda_r x_r''''^2 + 2u x_n'''' = 0, \tag{11}$$

которое можно записать и в форме

$$\varepsilon_1 x_1^2/d_1^2 + \dots + \varepsilon_r x_r^2/d_r^2 = 2x_n;$$

здесь опущены штрихи у переменных и обозначено $d_k^2 = |u/\lambda_k|$, $\varepsilon_k = \operatorname{sign}(-u/\lambda_k)$.

Остается выразить коэффициент u через инварианты. Инвариант Γ_{r+1} (напоминаем, что $r+1 = q$) есть сумма окаймленных главных миноров $(r+1)$-го порядка матрицы A. Но отличен от нуля лишь один такой минор – это минор, образованный r первыми и двумя последними столбцами и строками матрицы B_0. Поэтому

$$\Gamma_{r+1} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & 0 & & \\ & & \lambda_r & & & \vdots \\ & 0 & & & & 0 \\ & & & & 0 & u \\ 0 & & \dots & 0 & u & 0 \end{Vmatrix} = -u^2 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_r,$$

откуда $u = \sqrt{-\Gamma_{r+1}/(\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_2)}$; мы берем положительное значение корня, но можно было бы взять и отрицательное, так как на втором шаге вектор $\vec{u}'$

можно заменить на вектор $-\vec{u}$. Отсюда видим, что u – инвариант первого порядка уравнения квадрики, а d_k и ε_k – инварианты самой квадрики.

3. Сводка результатов

Ранги $r = \operatorname{rang} A$ и $q = \operatorname{rang} D$ позволяют определить класс квадрики: при $r = q$ будет центральая квадрика, а при $r + 1 = q$ – параболическая.

Канонические уравнения центральной и параболической квадрик имеют вид соответственно:

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + c = 0 \text{ и } \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2ux_n = 0,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ – ненулевые характеристические числа матрицы A,

$$c = \frac{\Gamma_q}{\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \cdot \lambda_r}, \quad u = \sqrt{-\frac{\Gamma_q}{\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_r}}$$

и Γ_q – инвариант, определенный в пункте 1.4.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г.Е. Шилов, *Конечномерные линейные пространства* Наука, Москва, 1969.

[2] Б.А. Розенфельд, *Многомерные пространства*, Наука, Москва, 1966.

[3] Н.И. Мусхелишвили, *Курс аналитической геометрии*, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1947.

[4] С.Л. Певзнер, *Инварианты и канонические представления квадрик в квазиэллиптических пространствах*, ДАН СССР **149** (1963).

[5] С.Л. Певзнер, *Квадрики в квазинеевклидовых пространствах* Уч. зап. МГПИ им. Ленина "Вопросы дифф. и неевкл. геом." **243** (1965).

Тосударственный педагогический инстутут
Комсомолск-на-Амуре
Россия

(Поступила 05 01 1994)