

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И ГОЛОМОРФНО-ПРОЕКТИВНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЯХ ОБОБЩЕННО
РЕКУРРЕНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Й. Микеш, Ж. Радулович

Communicated by Mileva Prvanović

Резюме. Для многих римановых пространств было показано, что не допускают нетривиальные геодезические и нетривиальные голоморфно-проективные отображения или преобразования. Однако эти результаты часто повторялись в явном, а часто в неявном виде.

В первой части показываем, что некоторые пространства, которые изучали П. Венци, Л. Николеску, Д. Флориа, совпадают с пространствами Й. Микеша. Поэтому результаты указанных выше авторов для геодезических отображений некоторых специальных пространств вытекают из работы Й. Микеша. Далее выделяются специальные обобщенно рекуррентные пространства, не допускающие нетривиальные геодезические и голоморфно-проективные отображения.

Настоящая статья посвящена изучению геодезических и голоморфно-проективных отображений специальных классов римановых пространств V_n . Сначала даем анализ существования ранее исследуемых пространств, а затем выделяем новые классы римановых пространств, которые не допускают нетривиальные геодезические и нетривиальные голоморфно-проективные отображения. Исследования носят локальный характер, рассматриваемые геометрические объекты считаем достаточно гладкими.

1. В 1953 г. Такено и Икеда [1] доказали, что центрально симметрические пространства V_4 непостоянной кривизны не допускают нетривиальные геодезические отображения (НГО). Этот результат был в 1954 г. обобщен Синюковым [2] для симметрических (S_n^1) и рекуррентных (K_n^1) пространств, которые, как известно, характеризуются соответственно

условиями на тензор Римана $R_{ijk,l}^h = 0$, $R_{ijk,l}^h = \varphi_l R_{ijk}^h$, где φ_l – некоторый ненулевой вектор; запятой обозначаем ковариантную производную в V_n .

Несколько авторов этот результат обобщило для проективно симметрических (WS_n^1) и проективно рекуррентных (WK_n^1) пространств, которые характеризуются условиями: $W_{ijk,l}^h = 0$, $W_{ijk,l}^h = \varphi_l W_{ijk}^h$, где $W_{ijk}^h \equiv R_{ijk}^h - \frac{1}{n-1} (\delta_k^h R_{ij} - \delta_j^h R_{ik})$ – тензор проективной кривизны Вейля, $R_{ij} \equiv R_{ij\alpha}^\alpha$ – тензор Риччи, δ_i^h – символы Кронекера. Однако можно доказать (см. например [3]), что $WS_n^1 \equiv S_n^1$ и $WK_n^1 \equiv K_n^1 \cup \text{ППК}$, где ППК – пространства постоянной кривизны. В работе [3] доказано, что НГО не допускают полусимметрические пространства, в которых имеет место

$$W_{ijk,lm}^h = a_{lm} W_{ijk}^h + b_m W_{ijk}^h, \quad (1)$$

где a_{lm} и b_m – некоторые тензоры.

Венци [4] доказал, что НГО не допускают пространства, в которых выполняются условия (1) при $b_m = 0$. Николеску [5], [6] и Флореа [7] рассматривали ГО пространства, которые охватываются условиями

$$T_{ijk,lm}^h = a_{lm} T_{ijk}^h, \quad (2)$$

где $T_{ijk}^h \equiv R_{ijk}^h + \alpha (\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik})$ и α – некоторый инвариант, a_{lm} – некоторый тензор.

Указанные пространства Венци, Николеску и Флореа являются полусимметрическими пространствами, удовлетворяющими условиям (1). Таким образом, приведенные результаты вытекают из [3].

Сначала докажем, что пространства Венци [4], удовлетворяющие условиям (1) при $b_m = 0$, являются также полусимметрическими. Для этого проальтернируем (1) по l и m . В силу предположения, получим

$$W_{ijk,[lm]}^h = 0, \quad (3)$$

где $[lm]$ обозначает альтернирование по l и m .

Свернув (3) с g^{ij} (компоненты матрицы обратной к $\|g_{ij}\|$), убедимся что тензор Риччи удовлетворяет условию $R_{ij,[lm]} = 0$. Но тогда из (3) вытекает соотношение $R_{ijk,[lm]}^h = 0$, которое характеризует полусимметрические пространства, что требовалось доказать.

Далее покажем, что пространства Флореа (2) удовлетворяют условиям (1) при $b_m = 0$. Очевидно, соотношения (2) можно записать в форме:

$$R_{ijk,lm}^{h-} = a_{lm} R_{ijk}^h + b_{lm} (\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik}), \quad (4)$$

где $b_{lm} \equiv a_{lm} - \alpha_{,lm}$. Свертывая (4) по индексам h и k , находим

$$R_{ij,lm} = a_{lm} R_{ij} + (n-1) b_{lm} g_{ij}. \quad (5)$$

Учитывая определение тензора проективной кривизны Вейля и формулы (5), получим формулы (1) при $b_m = 0$.

2. Отметим, что большая часть выделенных ранее пространств V_n , не допускающих нетривиальные геодезические отображения (НГО), являлись полусимметрическими или Риччи полусимметрическими, а те которые допускают НГО, являются пространствами $V_n(0)$, введенными нами в [11], [14].

Пространством $V_n(0)$ нами названо [11], [14] риманово пространство V_n допускающее НГО, при котором справедлива система уравнений

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i}g_{j)k}; \quad \lambda_{i,j} = \mu g_{ij} \quad (6)$$

относительно неизвестных невырожденного симметрического тензора a_{ij} , ненулевого вектора λ_i и инварианта μ (этот инвариант по необходимости – постоянная). Здесь запятой обозначена ковариантная производная в V_n , g_{ij} – метрический тензор, (ij) – симметрирование по указанным индексам.

Известно [11], [14], что римановы пространства V_n , допускающие НГО, являются пространствами $V_n(0)$, если выполняется одно из условий:

(а) $R_{ij} = 0$, где R_{ij} – тензор Риччи;

(б) $T_{i,[lm]} = 0$, где $T_i (\neq 0)$ – некоторый вектор;

(в) $T_{ij,[lm]} = 0$, где $T_{ij} (\neq \overset{0}{T}g_{ij})$ – некоторый вектор второй валентности; $\overset{\sigma}{T}$ – здесь и в дальнейшем некоторые инварианты (такие соотношения выполняются в приводимых, келеровых и неэйнштейновых Риччи полусимметрических ($R_{ij,[lm]} = 0; R_{ij} \neq \overset{0}{T}g_{ij}$) пространствах);

(г) $T_{hijk,[lm]} = 0$, где $T_{hijk} (\neq \overset{0}{T}g_{hi}g_{jk} + \overset{1}{T}g_{hj}g_{ik} + \overset{2}{T}g_{hk}g_{ij})$ – некоторый тензор, при $n > 4$ и при $n = 4$, если T обладает алгебраическими свойствами тензора Римана;

(д)

$$(A_{[i}^h \delta_{j]}^k - A_{[i}^k \delta_{j]}^h)_{,[lm]} = R_{[\gamma}^h \delta_{\delta]}^k S_{ijlm}^{\gamma\delta}; \quad \text{Rank} \|A_i^h - A_\alpha^\alpha/n\delta_i^h\| > 2 \quad (7)$$

где $A_i^h \equiv \overset{0}{T}\delta_i^h + \overset{1}{T}R_i^h + \overset{2}{T}R_j^h R_i^j + \dots + \overset{s}{T}R_{j_1}^h R_{j_2}^{j_1} \dots R_i^{j_s-1}$; $R_i^h \equiv R_{\alpha i} g^{\alpha h}$, $S_{ijlm}^{\alpha\delta}$ – производный тензор указанной валентности.

Условия интегрируемости уравнений (6) и их дифференциальные продолжения имеют вид [11]:

$$a_{\alpha(i} R_{j)kl}^\alpha = 0; \quad (8_0)$$

$$a_{\alpha(i} R_{j)kl,l_1}^\alpha + \lambda_{(i} R_{j)l_1 lk} = 0; \quad (8_1)$$

...

$$a_{\alpha(i} R_{j)kl,l_1 \dots l_m}^\alpha + \lambda_{(i} \overset{m}{T}_{j)kl l_1 l_2 \dots l_m} = 0, \quad (8_m)$$

где $R_{hijk} \equiv g_{h\alpha} R_{ijk}^\alpha$;

$$T_{ijkl_1 l_2 \dots l_m} \equiv \sum_{s=1}^m R_{kjil_s, l_1 \dots l_{s-1} l_{s+1} \dots l_m}. \quad (9)$$

Легко убедиться в справедливости следующих лемм:

Лемма 1. *Имеем $T_{ijkl_1 l_2 \dots l_m}^m = 0$ тогда и только тогда, когда $R_{hijk, l_1 l_2 \dots l_m} = 0$.*

Лемма 2. *Имеем $g^{kl_1} T_{ijkl_1 l_2 \dots l_m}^m = 0$ тогда и только тогда, когда $R_{ij, l_1 l_2 \dots l_{m-1}} = 0$.*

Доказательство этих лемм сводится к многократному альтернированию соответствующих равенств, при этом учитываются тождества Риччи тензора Римана.

Имеет место

Теорема 1. *Не существует неплоских пространств $V_n(0)$, в которых выполняется рекуррентное условие:*

$$R_{ijk, l_1 l_2 \dots l_m}^h = R_{i\alpha\beta}^h S_{jkl_1 l_2 \dots l_m}^{\alpha\beta}, \quad (m \geq 1), \quad (10)$$

где S – некоторый тензор.

Доказательство. Пусть существуют неплоские пространства $V_n(0)$, в которых справедливы формулы (10). В таких пространствах выполняются условия (6) и (8). Сначала рассмотрим случай, когда $m = 1$. Свернем (10) с a_{sh} , а затем просимметрируем по s и i ; учитывая (8₀) и (8₁), получим $\lambda_{(s} R_{i)l_1 l_k} = 0$. Так как $\lambda_s \neq 0$, то $R_{hijk} = 0$, что является противоречием предположению, что $V_n(0)$ не является плоским. Таким образом, теорема 1 справедлива для $m = 1$.

Предположив, что теорема верна для $m-1$ ($m > 1$), покажем, что она верна и для m . Свернем выражение (9) с a_{sh} , а затем просимметрируем по s и i . На основании (8₀) и (8_m) легко убедиться, что $T_{jkl_1 l_2 \dots l_m}^m = 0$. Из леммы 1 следует, что $R_{hijk, l_1 l_2 \dots l_m} = 0$. Это условие гарантирует выполнение соотношений (10) при $m-1$. В силу нашего предположения на основании теоремы 1 при $m-1$ таких пространств не существует, следовательно теорема справедлива и для m . Теорема доказана.

Далее имеет место

Теорема 2. *Не существует неизнштейновых пространств $V_n(0)$, в которых имеет место условие:*

$$R_{h[i, j]l_1 l_2 \dots l_m} = R_{\beta ij}^\alpha S_{\alpha h l_1 l_2 \dots l_m}^\beta \quad (m \geq 1). \quad (11)$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, но вместо условий (8) используются модифицированные соотношения, полученные из (8) путем их свертывания с g^{ll_1} и того, что

$$R_{hij\alpha,\beta}g^{\alpha\beta} = R_{j[h,i]}.$$

3. Аналогичные теоремы имеют место и для нетривиальных голоморфно-проективных отображений (НГПО) келеровых пространств K_n .

Четномерное пространство называется келеровым K_n , если в нем наряду с метрическим тензором g_{ij} существует структура F_i^h , удовлетворяющая условиям:

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = e\delta_i^h; \quad F_{(ij)} = 0; \quad F_{i,j}^h = 0, \quad \text{где} \quad F_{ij} \equiv g_{i\alpha} F_j^\alpha.$$

При $e = -1$ K_n называется эллиптическим, а при $e = +1$ – гиперболическим.

Вопросам НГПО келеровых пространств было посвящено много работ. В [8], [10], [11], [13] выделены K_n , не допускающие НГПО. В [11] нами введен аналог пространств $V_n(0)$ для эллиптических келеровых пространств – пространства $K_n[0]$. В [16] пространства $K_n[0]$ введены и для гиперболических K_n .

Пространство K_n нами названо [11], [16] пространством $K_n[0]$, если оно допускает НГПО, при котором основные уравнения НГПО имеют форму

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i} g_{j)k} + e\bar{\lambda}_{(i} F_{j)k}; \quad \lambda_{i,j} = \mu g_{ij}, \quad (12)$$

где μ -константа, a_{ij} -симметрический невырожденный тензор, удовлетворяющий условиям $\alpha_{\alpha\beta} F_i^\alpha F_j^\beta = -ea_{ij}$, λ_i -ненулевой вектор.

Келеровы пространства K_n , допускающие НГПО, являются пространствами $K_n[0]$, если в них выполняется одно из условий:

1. $T_{i,[lm]} = 0$, где $T_i (\neq 0)$ некоторый вектор;
2. $T_{i,j,[lm]} = 0$, где $T_{ij} (\neq \overset{1}{T}g_{ij} + \overset{2}{T}F_{ij})$ – некоторый тензор;
3. $T_{hijk,[lm]} = 0$, где $T_{hijk} (\neq \overset{0}{T}(g_{h[j}g_{k]i} + eF_{h[j}F_{k]i} - 2eF_{hi}F_{jk}))$ – тензор, удовлетворяющий алгебраическим свойствам тензора голоморфно-проективной кривизны;
4. пространства, в которых выполняются условия (7), причем $A_i^h - A_\alpha^\alpha/n\delta_i^h \neq 0$.

В частности, указанные условия выполняются в полусимметрических непостоянной кривизны и неэйнштейновых Риччи полусимметрических пространствах.

Условия интегрируемости уравнений (12) и их дифференциальные продолжения имеют вид:

$$a_{\alpha(i} R_{j)kl}^\alpha = 0; \quad (13)$$

$$a_{\alpha(i)R_j^\alpha}{}_{kl,l_1} + \lambda_{(i)R_j}{}_{kll_1} - e\bar{\lambda}_{(i)F_j^\alpha}R_{\alpha kll_1} = 0; \quad (13_1)$$

$$\dots$$

$$a_{\alpha(i)R_j^\alpha}{}_{kl,l_1\dots l_m} \lambda_{(i)T_j^m}{}_{kll_1\dots l_m} - \bar{\lambda}_{(i)F_j^\alpha}T_{\alpha kll_1\dots l_m}^m = 0, \quad (13_m)$$

где тензор T^m определяется формулами (9). Эти формулы подобны соотношениям (8).

Убедимся в справедливости следующей теоремы:

Теорема 3. *Не существует неплоских келеровых пространств $K_n[0]$, для которых справедливы условия (10).*

Доказательство. Пусть существуют неплоские пространства в которых справедливы формулы (10). В таких пространствах выполняются условия (12) и (13). Сначала рассмотрим случай, когда $m = 1$. Свернем (10) с a_{sh} , а затем просимметрируем по s и i ; учитывая (13₀) и (13₁), получим

$$\lambda_{(s)R_i}{}_{l_1lk} - e\bar{\lambda}_{(s)F_i^\alpha}R_{\alpha l_1lk} = 0. \quad (14)$$

Пусть векторы λ_i и $\bar{\lambda}_i$ неколлинеарны. Тогда $R_{hijk} = \lambda_h S_{ijk} + \bar{\lambda}_h \bar{S}_{ijk}$, где S, \bar{S} – некоторые тензоры. Подставив последнее в (14) убедимся, что $S_{ijk} = 0$. Следовательно $R_{hijk} = \bar{\lambda}_h \bar{S}_{ijk}$. Отсюда вытекает $R_{hijk} = 0$, что является противоречием неплоскости $K_n[0]$. В случае, когда $\lambda_i = \rho\lambda_i$, из (14) следует $R_{il_1lk} - e\rho F_i^\alpha R_{\alpha l_1lk} = 0$. Проальтернируем это выражение по индексам i и l_1 ; получим $R_{hijk} = 0$. Таким образом, теорема 3 справедлива для $m = 1$.

Предположив что она справедлива для $m - 1$ ($m > 1$), покажем что теорема 3 верна и для m . Свернем (10) с a_{sh} , а затем просимметрируем по s и i . Учитывая (13₀) и (13_m) получим

$$\lambda_{(s)T_i^m}{}_{jkl_1\dots l_m} - e\bar{\lambda}_{(s)F_i^\alpha}T_{\alpha jkl_1\dots l_m}^m = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим случай, когда λ_i и $\bar{\lambda}_i$ неколлинеарны. Легко показать, что из (15) следует $T_{ijkl_1\dots l_m}^m = \bar{\lambda}_i S_{ijkl_1\dots l_m}$, где S – некоторый тензор. Проальтернировав последнее по i и l_1 , легко получить

$$2R_{hijk,l_2\dots l_m} + \sum_{s=2}^m R_{hijk,l_s l_2 \dots l_{s-1} l_{s+1} \dots l_m} = \bar{\lambda}_{[h} S_{i]jkl_2 \dots l_m}. \quad (16)$$

Свернув (16) с $F_p^h F_q^i$, учитывая тождество $R_{hijk} = -eR_{\alpha\beta jk} F_h^\alpha F_i^\beta$, получим $\bar{\lambda}_{[h} S_{i]jkl_2 \dots l_m} + \lambda_{[h} F_{i]}^\alpha S_{\alpha jkl_2 \dots l_m} = 0$. Отсюда $S_{ijkl_2 \dots l_m} = \bar{\lambda}_i \bar{S}_{jkl_2 \dots l_m}$, где \bar{S} – некоторый тензор. Тогда (16) принимает вид

$$2R_{hijk,l_2 l_3 \dots l_m} + \sum_{s=2}^m R_{hijk,l_s l_2 \dots l_{s-1} l_{s+1} \dots l_m} = 0.$$

Из этого условия можно установить, что

$$R_{hijk,l_1 l_2 \dots l_{m-1}} = 0. \quad (17)$$

Для этого случая, очевидно, теорема 3 справедлива.

Рассмотрим случай, когда $\bar{\lambda}_i = \rho \lambda_i$. Тогда по необходимости $e = 1$ и из (15) получим

$$T_{ijkl_1 \dots l_m} - \rho F_i^\alpha T_{\alpha jkl_1 \dots l_m} = 0.$$

Легко видеть, что либо $T = 0$ либо $\rho = \pm 1$. Первый случай, на основании леммы 1 приводит к (17). Рассмотрим второй случай когда $\rho = \pm 1$, т.е.

$$T_{ijkl_1 \dots l_m} \pm F_i^\alpha T_{\alpha jkl_1 \dots l_m} = 0. \quad (18)$$

После альтернирования (18) по i и l_1 , получим

$$2R_{hijk,l_2 \dots l_m} + \sum_{s=2}^m R_{hijk,l_s l_2 \dots l_{s-1} l_{s+1} \dots} \pm \sum_{s=2}^m R_{hijk,\alpha l_2 \dots l_{s-1} l_{s+1} \dots l_m} F_{l_s}^\alpha = 0.$$

Поочередным альтернированием этого соотношения убедимся что ковариантное дифференцирование тензора Римана до $m - 1$ порядка включительно не зависит от порядка дифференцирования. Таким образом,

$$(m + 1)R_{hijk,l_2 l_3 \dots l_m} \pm \sum_{s=2}^m R_{hijk,\alpha l_2 \dots l_{s-1} l_{s+1} \dots l_m} F_{l_s}^\alpha = 0.$$

Отсюда можно показать справедливость (17). На этом, как нетрудно видеть, доказательство теоремы 3 полностью завершается.

Далее справедлива

Теорема 4. *Не существует неэйштейновых келеровых пространств $K_n[0]$, в которых выполняются условия (11).*

Доказательство ввиду аналогии с предыдущим опускаем.

Справедлива

Теорема 5. *Полусимметрические непостоянной кривизны или неэйштейновы Риччи полусимметрические или неплоские приводимые пространства V_n ($n > 2$), в которых выполняются рекуррентные формулы (10) (либо (11), при $R_{ij} \neq Tg_{ij}$), не допускают ни нетривиальных геодезических отображений, ни нетривиальных проективных преобразований, ни нетривиальных голоморфно-проективных отображений, ни нетривиальных голоморфно-проективных преобразований.*

Доказательство теоремы 5 следует из того, что полусимметрические, Риччи полусимметрические, приводимые и другие римановы пространства, допускающие указанные отображения (или преобразования), как было

ранее сказано, являются либо пространствами $V_n(0)$ либо $K_n[0]$. Согласно теоремам 1–4 таких пространств, в которых дополнительно выполняются условия (10) или (11), не существует.

Указанные теоремы обобщают результаты [1]–[16].

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Takeno, M. Ikeda, *Theory of the spherically symmetric spaces-times*, VII, *Space-times with corresponding geodesics*, J. Sci. Hiroshima Univ. **17** (1953), 75–81.
2. Н.С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств*, Наука, Москва, 1979.
3. Й. Микеш, *О геодезических отображениях полусимметрических римановых пространств*, Деп. в ВИНТИ, 1977, № 3924–76
4. P. Venzi, *On geodesic mapping on Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds*, Tensor. **32** (1978), 192–198.
5. L. Nicolescu, *Les espaces de Riemann en représentation subgeodesique*, Tensor **32** (1978), 182–187.
6. L. Nicolescu, *Asupra spatilor pseudo-Riemannienne in correspondentia geodesica*, Lucr. coloc. nat. geom. topol., Busteni, 27–30 iun, 1981, Bucuresti, 1983, pp 249–257.
7. D. Florea, *Spatii Riemann in correspondentia geodesica*, Stud. si cerc. mat. **40** (1988), 467–470.
8. M. Pryanović, *Projective and conformal transformations in recurrent and Ricci recurrent Riemannian spaces*, Tensor **12** (1962), 219–226.
9. T. Sakaguchi, *On the holomorphically projective correspondence between Kählerian spaces preserving complex structure*, Hokkaido Math. J. **3** (1974), 203–212.
10. В.В. Домашев, Й. Микеш, *К теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств*, Матем. заметки **28** (1978), 297–303.
11. Й. Микеш, *Геодезические и голоморфно-проективные отображения специальных римановых пространств*, Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Одесса, 1979.
12. Й. Микеш, *О геодезических отображениях Риччи-2-симметрических римановых пространств*, Матем. заметки **28** (1980), 313–317.
13. И.Н. Курбатова, *О проблеме квазиголоморфно-проективных отображений K-пространств*, Деп. в ВИНТИ, № 2429–79
14. J. Mikeš, *Geodesic mappings of special Riemannian spaces*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 46 Topics in diff. geom., Debrecen (Hungary), 1984, 793–813.
15. В.С. Собчук, *О геодезическом отображении m -симметрических римановых пространств*, Тезисы сообщений, IX Всесоюзн. геометр. конф. Штиинца, Кишинев, 1988, 291.
16. J. Mikeš, *F-planar mappings and transformations*, Diff. Geom. Appl., Proc. Conf. 1986, Brno, Czechoslovakia, 245–254.

Josef Mikesh
Department of Mathematics
Faculty of Technology
Zlín
Czech Republik

Željko Radulović
Department of Mathematics
University of Odessa
Petra Velikogo 2
Odessa, Ukraine

(Received 11 10 1994)

(Revised 16 10 1995)