PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 76(90) (2004), 149–156

АСИМПТОТИКА МАТРИЧНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

М. С. Сгибнев

Communicated by Slobodanka Janković

REZYUME. Исследуется асимптотика матричной обобщенной функции восстановления.

1. Введение

Пусть F — вероятностное распределение, $F^{0*} := \delta$ — мера единичной массы, сосредоточенная в нуле, $F^{1*} := F$, $F^{(k+1)*} := F * F^{k*}$, $k \geqslant 1$. *Мера восстановления* $H := \sum_{k=0}^{\infty} F^{k*}$ является классическим объектом исследований в теории вероятностей (см., например, [**1**, гл. XI]). Большое внимание в вероятностной литературе [**2**]–[**12**] было уделено также и *обобщенной мере восстановления* $U := \sum_{k=0}^{\infty} \phi(k) F^{k*}$, где $\{\phi(k)\}$ — последовательность положительных чисел, обычно правильно меняющаяся.

Другое направление исследований в теории восстановления связано в переходом от распределений к матрицам мер. Пусть $\mathbf{F} = (F_{ij})$ и $\mathbf{G} = (G_{ij})$ — матрицы порядка $n \times n$, элементы которых суть конечные неотрицательные меры на прямой $\mathbb{R}$. Сверткой $\mathbf{F} * \mathbf{G}$ называется матрица с элементами $(\mathbf{F} * \mathbf{G})_{ij} := \sum_{l=1}^{n} F_{il} * G_{lj}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\mathbf{I}$ и $\mathbf{0}$ единичную и нулевую матрицы порядка $n \times n$. Матрица мер $\mathbf{H} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{F}^{k*}$ называется *матричной мерой восстановления*; здесь $\mathbf{F}^{1*} := \mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{(k+1)*} := \mathbf{F}^{k*} * \mathbf{F} = \mathbf{F} * \mathbf{F}^{k*}$, $k \geqslant 1$, $\mathbf{F}^{0*} := \delta \mathbf{I}$. *Обобщенной матричной мерой восстановления* называется матрица мер $\mathbf{U} := \sum_{k=0}^{\infty} \phi(k) \mathbf{F}^{k*}$, где $\{\phi(k)\}$ — последовательность положительных чисел.

Асимптотические свойства матричной меры восстановления $\mathbf{H}$ исследовались, например, в [**13**]–[**16**]; при этом предполагалось, что исходная матричная мера $\mathbf{F}$ сосредоточена на $[0, \infty)$.

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 60K05; Secondary 40E05.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотики *матричной обобщенной функции восстановления* $\mathbf{U}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi(k)\mathbf{F}^{k*}((-\infty, t])$, где последовательность положительных чисел $\{\phi(k)\}$ образована значениями в целочисленных точках некоторой правильно меняющейся функции $\phi(x)$. В отличие от [**13**]–[**16**] мы не будем предполагать, что матричная мера $\mathbf{F} = (F_{ij})$ сосредоточена на $[0, \infty)$, заменяя это требование менее ограничительным условием $\int_{\mathbb{R}} e^{qx}\, F_{ij}(dx) < \infty$ при некотором $q < 0$, $i, j = 1, \dots, n$.

2. Тауберова теорема

Сначала остановимся на одном несложном и, по-видимому, уже известном обобщении тауберовой теоремы [**1**, гл. XIII, § 5, теорема 1], в которой речь идет о связи асимптотического поведения на бесконечности функции распределения $U(x) := U((0, x])$ неотрицательной меры U, сосредоточенной на $(0, \infty)$, и асимптотикой в нуле ее преобразования Лапласа $\omega(\lambda) := \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, U(dx)$, $\lambda > 0$. Предлагаемое обобщение состоит в том, что требование сосредоточенности U на $(0, \infty)$ заменяется существованием экспоненциального момента с отрицательным показателем меры U: $\int_{\mathbb{R}} e^{qx}\, U(dx) < \infty$ при некотором $q < 0$. Поскольку для мер на всей прямой присутствие знака “минус” в экспоненте преобразования Лапласа теряет смысл, мы будем использовать следующее определение преобразования Лапласа меры U: $\hat{U}(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{sx}\, U(dx)$ при условии, что выписанный интеграл сходится абсолютно. Другой общепринятый, но более громоздкий термин: $\hat{U}(s)$ — *производящая функция моментов* меры U.

Напомним [**17**, гл. 1], что положительная функция $R(x)$ *правильно меняется на бесконечности*, если она измерима на $[A, \infty)$, $A > 0$, и существует такое $\beta \in \mathbb{R}$, что для произвольного $\lambda > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(\lambda x)}{R(x)} = \lambda^{\beta}. \tag{1}$$

Число β называется *показателем* правильного изменения функции $R(x)$. Если $\beta = 0$, то такая правильно меняющаяся функция называется *медленно меняющейся функцией* и обычно обозначается через $L(x)$. Очевидно, что если правильно меняющаяся функция $R(x)$ имеет показатель β, то $R(x) = x^{\beta} L(x)$, где $L(x)$ медленно меняется.

Введем положительную переменную t и отрицательную переменную s, связанные соотношением $ts = -1$. Тогда $s \to 0-$ при $t \to +\infty$ и наоборот. Для произвольной меры U на всей прямой положим $U(x) := U((-\infty, x])$.

Теорема 1. *Пусть U — мера на всей прямой такая, что $\hat{U}(q) < \infty$ при некотором $q < 0$. Тогда для фиксированного $\beta \in [0, \infty)$ каждое из следующих соотношений влечет остальные:*

$$\frac{\hat{U}(s\lambda)}{\hat{U}(s)} \to \frac{1}{\lambda^{\beta}}, \qquad s \to 0-, \tag{2}$$

$$\frac{U(tx)}{\hat{U}(s)} \to \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)}, \qquad t \to +\infty, \tag{3}$$

$$\frac{U(tx)}{U(t)} \to x^\beta, \qquad t \to +\infty. \tag{4}$$

Доказательство. Если $U(\mathbb{R}) < \infty$, то утверждение теоремы тривиально. Предположим поэтому, что $U(\mathbb{R}) = \infty$. Пусть U_+ — сужение U на $(0, \infty)$. Обозначим через $(2')$–$(4')$, соотношения (2)–(4), в которых U заменено на U_+. Согласно [**1**, гл. XIII, §5, теорема 1] каждое из соотношений $(2')$–$(4')$ влечет остальные. С другой стороны, (2) и $(2')$, (3) и $(3')$, (4) и $(4')$ попарно эквивалентны. Действительно, рассмотрим, например, соотношения (2) и $(2')$. Имеем $\hat{U}(s) = (U - U_+)^\wedge(s) + \hat{U}_+(s)$ и $(U - U_+)^\wedge(s) \to U((-\infty, 0]) < \infty$ при $s \to 0-$. Следовательно, $\hat{U}(s) \sim \hat{U}_+(s)$ при $s \to 0-$. Теорема 1 доказана. □

3. Основной результат

Обозначим через $\varrho(\mathbf{A})$ спектральный радиус произвольной числовой матрицы $\mathbf{A}$. По теореме Перрона–Фробениуса [**18**, теорема 9.2.1] любая неотрицательная неприводимая матрица $\mathbf{A}$ имеет положительное собственное значение кратности 1, равное $\varrho(\mathbf{A})$, и существуют положительные правый и левый собственные векторы, соответствующие этому собственному значению. Условимся: все операции над матрицами мер и векторами осуществляются по-элементно; например, $\hat{\mathbf{F}}(s) := (\hat{F}_{ij}(s))$ или еще:

$$\int_{\mathbb{R}} x\, \mathbf{F}(dx) := \left(\int_{\mathbb{R}} x\, F_{ij}(dx) \right).$$

Аналогичное соглашение относится и к неравенствам, в которых участвуют матрицы и векторы.

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{F}$ — матрица порядка $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры на $\mathbb{R}$. Предположим, что матрица $\mathbf{F}(\mathbb{R})$ неприводима и $\varrho[\mathbf{F}(\mathbb{R})] = 1$. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\mathbf{F}(\mathbb{R})$ так, чтобы $\mathbf{lr} = 1$. Допустим, что $\mu := \mathbf{l} \int_{\mathbb{R}} x\, \mathbf{F}(dx)\mathbf{r} \in (0, +\infty)$ и $\int_{\mathbb{R}} e^{qx} \mathbf{F}(dx) < \infty$ при некотором $q < 0$. Пусть функция $\phi(x)$, $x \geqslant 0$, правильно меняется на бесконечности с показателем $\alpha > -1$. Тогда для матричной обобщенной функции восстановления $\mathbf{U}(t) = \sum_{k=0}^\infty \phi(k)\mathbf{F}^{k*}(t)$ выполняется следующее соотношение:*

$$\mathbf{U}(t) \sim \frac{t\phi(t)}{(\alpha+1)\mu^{\alpha+1}} \mathbf{rl}, \qquad t \to +\infty. \tag{5}$$

Доказательство. Чтобы утверждение теоремы имело смысл, необходимо, прежде всего, установить конечность $\mathbf{U}(t)$ при всех t. С этой целью докажем две леммы.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда найдется $q_1 \in (q, 0)$ такое, что $\hat{\mathbf{U}}(s) := \sum_{k=0}^\infty \phi(k)\hat{\mathbf{F}}(s)^k$, $q_1 < \operatorname{Re} s < 0$, — преобразование Лапласа меры $\mathbf{U}$.*

Доказательство леммы 1. Не ограничивая общности, можно считать, что длина вектора $\mathbf{r}$ равна единице. Эта нормировка, наряду с условием $\mathbf{lr} = 1$, *однозначно* определяет собственные векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ матрицы $\mathbf{F}(\mathbb{R})$.

Пусть $s \in (q, 0)$. Поскольку матрица $\hat{\mathbf{F}}(s) \geqslant \mathbf{0}$ неприводима (так же, как и $\hat{\mathbf{F}}(0) = \mathbf{F}(\mathbb{R})$), она имеет положительное собственное значение $\lambda(s)$ кратности 1, равное $\varrho[\hat{\mathbf{F}}(s)]$.

Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l}(s)$ и $\mathbf{r}(s)$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению $\lambda(s)$ матрицы $\hat{\mathbf{F}}(s)$, так, чтобы $\mathbf{l}(s)\mathbf{r}(s) = 1$ и длина $\mathbf{r}(s)$ равнялась единице. По теореме об аналитических возмущениях некратного собственного значения [**18**, теорема 7.7.1] в достаточно малой окрестности $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - s| < \delta\}$ точки $s \in (q, 0)$ существует такое некратное собственное значение $\mu(\zeta; s)$ матрицы $\hat{\mathbf{F}}(s)$, что

$$\mu(\zeta; s) = \lambda(s) + \zeta\mu^{(1)}(s) + \zeta^2\mu^{(2)}(s) + \cdots .$$

Далее, существуют правый и левый собственные векторы $\mathbf{x}(\zeta; s)$ и $\mathbf{y}(\zeta; s)$ с собственным значением $\mu(\zeta; s)$, для которых $\mathbf{y}(\zeta; s)\mathbf{x}(\zeta; s) = 1$ и

$$\mathbf{x}(\zeta; s) = \mathbf{x}(s) + \zeta\mathbf{x}^{(1)}(s) + \zeta^2\mathbf{x}^{(2)}(s) + \cdots ,$$

$$\mathbf{y}(\zeta; s) = \mathbf{y}(s) + \zeta\mathbf{y}^{(1)}(s) + \zeta^2\mathbf{y}^{(2)}(s) + \cdots .$$

Чтобы исключить произвол в выборе $\mathbf{x}(\zeta; s)$ и $\mathbf{y}(\zeta; s)$, будем считать, что длина $\mathbf{x}(\zeta; s)$ равна единице (нормируя $\mathbf{x}(\zeta; s)$ в случае необходимости). Тогда $\mathbf{x}(s) = \mathbf{r}(s)$ и $\mathbf{y}(s) = \mathbf{l}(s)$. Поскольку $\mu(\zeta; s)$ — возмущение некратного максимального по модулю собственного значения $\lambda(s)$ матрицы $\hat{\mathbf{F}}(s)$, имеем $\mu(\zeta; s) = \lambda(\zeta)$ для вещественных ζ. Итак, $\lambda(s)$ аналитична в любой точке $s \in (q, 0)$. То же самое можно сказать и о вектор-функциях $\mathbf{l}(s)$ и $\mathbf{r}(s)$. Известно, что собственные значения непрерывно зависят от элементов матрицы. Поэтому $\lambda(s) \to 1$ при $s \to 0-$. Теперь покажем, что $\mathbf{r}(s) \to \mathbf{r}$ и $\mathbf{l}(s) \to \mathbf{l}$ при $s \to 0-$. Пусть $r_1^{(0)} := \limsup_{s\to 0-} r_1(s)$. Выберем последовательность $\{s_k\} \subset (q, 0)$ таким образом, чтобы $s_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $\lim_{k\to\infty} r_1(s_k) = r_1^{(0)}$. Переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $\exists \lim_{k\to\infty} \mathbf{r}(s_k) := \mathbf{r}^{(0)}$. Имеем $\lim_{k\to\infty} \hat{\mathbf{F}}(s_k)\mathbf{r}(s_k) = \lim_{k\to\infty} \lambda(s_k)\mathbf{r}(s_k) = \mathbf{r}^{(0)}$. С другой стороны, $\lim_{k\to\infty} \hat{\mathbf{F}}(s_k)\mathbf{r}(s_k) = \hat{\mathbf{F}}(0)\mathbf{r}^{(0)}$. Таким образом, $\mathbf{r}^{(0)}$ — неподвижный вектор матрицы $\hat{\mathbf{F}}(0) = \mathbf{F}(\mathbb{R})$. Так как длина $\mathbf{r}^{(0)}$ равна единице, справедливо равенство $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{r}$. Итак, $\limsup_{s\to 0-} r_1(s) = r_1$. Аналогично доказывается, что $\liminf_{s\to 0-} r_1(s) = r_1$. Следовательно, $r_1(s) \to r_1$, $s \to 0-$. Эти рассуждения применимы также и к остальным координатам вектора $\mathbf{r}(s)$. В итоге, $\exists \lim_{s\to 0-} \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}$. Аналогично, $\exists \lim_{s\to 0-} \mathbf{l}(s) = \mathbf{l}$.

Теперь покажем, что найдется $q_1 \in (q, 0)$ такое, что $\lambda(s) < 1$ $\forall s \in (q_1, 0)$. Для этого вычислим производную $\lambda'(s)$. Воспользуемся аргументацией из доказательства теоремы 6.3.12 [**19**]. Имеем $\mathbf{l}(s)\hat{\mathbf{F}}(s)\mathbf{r}(s) = \lambda(s)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\lambda'(s) &= \mathbf{l}'(s)\hat{\mathbf{F}}(s)\mathbf{r}(s) + \mathbf{l}(s)\hat{\mathbf{F}}'(s)\mathbf{r}(s) + \mathbf{l}(s)\hat{\mathbf{F}}(s)\mathbf{r}'(s) \\ &= \lambda(s)[\mathbf{l}'(s)\mathbf{r}(s) + \mathbf{l}(s)\mathbf{r}'(s)] + \mathbf{l}(s)\hat{\mathbf{F}}'(s)\mathbf{r}(s)\end{aligned} \tag{6}$$

$$= \mathbf{l}(s)\hat{\mathbf{F}}'(s)\mathbf{r}(s) \to \mathbf{l}\int_{\mathbb{R}} x\,\mathbf{F}(dx)\mathbf{r} = \mu > 0, \qquad s \to 0-;$$

здесь мы воспользовались тождеством $\mathbf{l}(s)\mathbf{r}(s) \equiv 1$. Таким образом, в некоторой левосторонней окрестности $(q_1, 0)$ нуля функция $\lambda(s)$ возрастает и, поскольку $\lambda(0) = 1$, $\lambda(s) < 1$ при $s \in (q_1, 0)$.

При этих же значениях s определена также матричная функция $\hat{\mathbf{U}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi(k)\hat{\mathbf{F}}(s)^k$, поскольку ряд сходится по-элементно. Действительно, умножая $\hat{\mathbf{U}}(s)$ справа на $\mathbf{r}(s)$, получим

$$\hat{\mathbf{U}}(s)\mathbf{r}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi(k)\lambda(s)^k \mathbf{r}(s).$$

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \phi(k)\lambda(s)^k$ сходится при $s \in (q_1, 0)$, поскольку $\lambda(s) < 1$ и $\phi(x) = x^{\alpha}L(x)$, а медленно меняющаяся функция $L(x)$ растет медленнее любой степенной функции [**17**, §1.5, p. 1]: $x^{-\gamma}L(x) \to 0$, $x \to +\infty$, при любом $\gamma > 0$. Так как все координаты вектора $\mathbf{r}(s)$ положительны, $\hat{\mathbf{U}}(s) < \infty$. Наконец,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}(s) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \phi(k)\hat{\mathbf{F}}(s)^k \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \left[\sum_{k=0}^{m} \phi(k)\mathbf{F}^{k*}\right](dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{sx}\,\mathbf{U}(dx). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда* $\mathbf{U}(t) < \infty$ *для любого* $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство леммы 2. Из конечности $\hat{\mathbf{U}}(s)$ при $s \in (q_1, 0)$ вытекает σ-конечность меры $\mathbf{U}$, т.е. $\mathbf{U}(A) < \infty$ для всех ограниченных борелевских подмножеств $A \subset \mathbb{R}$. Далее, $\mathbf{U}((-\infty, 0]) \leqslant \int_{-\infty}^{0} e^{sx}\,\mathbf{U}(dx) < \infty$ при любом $s \in (q_1, 0)$. Лемма 2 доказана. □

Наша дальнейшая цель состоит в том, чтобы установить асимптотику $\hat{\mathbf{U}}(s)$ при $s \to 0-$ с тем, чтобы затем, воспользовавшись теоремой 1, доказать требуемое утверждение о поведении $\mathbf{U}(t)$ при $t \to +\infty$. В качестве промежуточного шага рассмотрим поведение вектора $\hat{\mathbf{U}}(s)\mathbf{r}(s)$ при $s \to 0-$ (см. обозначения из доказательства леммы 1). Обозначим $Q(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi(k)z^k$. Согласно тауберовой теореме для степенных рядов [**1**, гл. XIII, §5, теорема 5]

$$Q(z) \sim \frac{1}{(1-z)^{\beta}} L_1\left(\frac{1}{1-z}\right), \qquad z \to 0-,$$

тогда и только тогда, когда

$$\phi(0) + \phi(1) + \cdots + \phi(n) \sim \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} n^{\beta} L_1(n), \qquad n \to \infty;$$

здесь $\beta \geqslant 0$, $L_1(x)$ медленно меняется на бесконечности. Из условия $\phi(x) = x^\alpha L(x)$, $\alpha > -1$, вытекает, что

$$\phi(0) + \phi(1) + \cdots + \phi(n) \sim \frac{n^{\alpha+1}L(n)}{\alpha+1}, \qquad n \to \infty,$$

т.е. в нашем случае $\beta = \alpha + 1$ и

$$L_1(x) = \frac{L(x)\Gamma(\alpha+2)}{\alpha+1} = L(x)\Gamma(\alpha+1).$$

Таким образом,

$$Q(z) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-z)^{\alpha+1}} L\left(\frac{1}{1-z}\right), \qquad z \to 0-.$$

Имеем

$$\hat{\mathbf{U}}(s)\mathbf{r}(s) = Q[\lambda(s)]\mathbf{r}(s) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{[1-\lambda(s)]^{\alpha+1}} L\left(\frac{1}{1-\lambda(s)}\right)\mathbf{r}, \qquad s \to 0-. \tag{7}$$

Далее, так как $\lambda'(s) \to \mu$ при $s \to 0-$ (см. (6)), справедливо представление $1 - \lambda(s) = -\mu s + o(s)$. При всех $s < 0$, достаточно близких к 0, $|o(s)| < \mu|s|/2$, откуда вытекает $1 - \lambda(s) \in (\mu|s|/2, 3\mu|s|/2)$. Поэтому

$$L\left(\frac{1}{1-\lambda(s)}\right) \sim L\left(\frac{1}{|s|}\right), \qquad s \to 0-,$$

так как для медленно меняющихся функций соотношение (1) выполняется равномерно относительно λ из любого интервала $[a,b] \subset (0,\infty)$ [**17**, теорема 1.1, p. 1.2] (в нашем случае можно положить $a = 2/3\mu$, $b = 2/\mu$). С учетом вышесказанного соотношение (7) можно переписать в виде

$$\hat{\mathbf{U}}(s)\mathbf{r}(s) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\mu^{\alpha+1}(-s)^{\alpha+1}} L\left(\frac{1}{|s|}\right)\mathbf{r}, \qquad s \to 0-. \tag{8}$$

Обозначим $R_1(x)$ правильно меняющуюся функцию $\Gamma(\alpha+1)x^{\alpha+1}L(x)/\mu^{\alpha+1}$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$\mathbf{A} := \limsup_{s\to 0-} \frac{\hat{\mathbf{U}}(s)}{R_1(1/|s|)} = \mathbf{rl}.$$

Доказательство леммы 3. Очевидно, что $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ и

$$\limsup_{s\to 0-} \frac{\hat{\mathbf{F}}(s)\hat{\mathbf{U}}(s)}{R_1(1/|s|)} \leqslant \mathbf{F}(\mathbb{R})\mathbf{A}.$$

Согласно уже упоминавшейся теореме о равномерном медленном изменении [**17**, теорема 1.1, p. 1.2] $L(k+1) \sim L(k)$ при $k \to \infty$ (в указанной теореме достаточно положить $a = 1$, $b = 2$). Следовательно, $\phi(k+1) \sim \phi(k)$, $k \to \infty$. Используя это свойство, покажем что

$$\limsup_{s\to 0-} \frac{\hat{\mathbf{F}}(s)\hat{\mathbf{U}}(s)}{R_1(1/|s|)} = \mathbf{A}. \tag{9}$$

Обозначим, временно, левую часть (9) через $\mathbf{A}_1$. Числитель допредельного соотношения разобьем на два слагаемых:

$$\hat{\mathbf{F}}(s)\hat{\mathbf{U}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi(k)\hat{\mathbf{F}}(s)^{k+1} = \sum_{k=0}^{N-1} + \sum_{k=N}^{\infty}.$$

Поскольку $R_1(x) \to \infty$, $x \to +\infty$, и $\hat{\mathbf{F}}(s)^{k+1} \to \hat{\mathbf{F}}(0)^{k+1} < \infty$, $s \to 0-$, можно пренебречь слагаемым $\sum_{k=0}^{N-1}$ при доказательстве (9). По тем же самым причинам из определения матрицы $\mathbf{A}$ вытекает

$$\mathbf{A} = \limsup_{s \to 0-} \frac{\sum_{k=N}^{\infty} \phi(k+1)\hat{\mathbf{F}}(s)^{k+1}}{R_1(1/|s|)}.$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Выберем N так, чтобы $1-\varepsilon < \phi(k)/\phi(k+1) < 1+\varepsilon$ при всех $k \geqslant N$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \limsup_{s \to 0-} \frac{\sum_{k=N}^{\infty} \phi(k)\hat{\mathbf{F}}(s)^{k+1}}{R_1(1/|s|)} \\ &\leqslant (1+\varepsilon) \limsup_{s \to 0-} \frac{\sum_{k=N}^{\infty} \phi(k+1)\hat{\mathbf{F}}(s)^{k+1}}{R_1(1/|s|)} = (1+\varepsilon)\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Аналогично, $\mathbf{A}_1 \geqslant (1-\varepsilon)\mathbf{A}$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$, и соотношение (9) доказано.

Таким образом, $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{F}(\mathbb{R})\mathbf{A}$. На самом же деле здесь должен стоять знак равенства. Действительно, если допустить противное, то одновременно $\mathbf{l}[\mathbf{F}(\mathbb{R})\mathbf{A} - \mathbf{A}] \neq (0,\dots,0)$ (все координаты $\mathbf{l}$ положительны) и $\mathbf{l}[\mathbf{F}(\mathbb{R})\mathbf{A} - \mathbf{A}] = \mathbf{l}\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{A} = (0,\dots,0)$, что невозможно. Итак, $\mathbf{A} = \mathbf{F}(\mathbb{R})\mathbf{A}$. Аналогично доказывается, что $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{F}(\mathbb{R})$. Эти равенства означают, что строки матрицы $\mathbf{A}$ суть левые собственные векторы матрицы $\mathbf{F}(\mathbb{R})$, отвечающие ее собственному значению 1, а столбцы $\mathbf{A}$ — правые неподвижные векторы $\mathbf{F}(\mathbb{R})$. Пусть $\mathbf{a}_i = (a_{i1},\dots,a_{in})$ — i-я строка $\mathbf{A}$. Тогда существуют числа $\alpha_i \geqslant 0$ такие, что $\mathbf{a}_i = \alpha_i\mathbf{l}$, $i = 1,\dots,n$, поскольку кратность собственного значения 1 матрицы $\mathbf{F}(\mathbb{R})$ равна единице. Аналогично, если $\mathbf{b}_j = (a_{1j},\dots,a_{nj})^T$ — j-й столбец $\mathbf{A}$, то существуют числа $\beta_j \geqslant 0$ такие, что $\mathbf{b}_j = \beta_j\mathbf{r}$, $j = 1,\dots,n$. Обозначим через $\boldsymbol{\alpha}$ вектор-столбец $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)^T$ а через $\boldsymbol{\beta}$ — вектор-строку $(\beta_1,\dots,\beta_n)$. Тогда $\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{l} = \mathbf{r}\boldsymbol{\beta}$. Следовательно, $\beta_j = l_j(\alpha_i/r_i)$ $\forall i,j$. Поскольку $\boldsymbol{\beta} \neq (0,\dots,0)$, число $\gamma := \alpha_i/r_i$ положительно и не зависит от i. Следовательно, $\boldsymbol{\alpha} = \gamma\mathbf{r}$. В силу (8) имеем $\mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{r}$. Кроме того, $\mathbf{A}\mathbf{r} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{l}\mathbf{r} = \boldsymbol{\alpha}$. Итак, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$. Лемма 3 доказана. □

Следующая лемма доказывается аналогично.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$\mathbf{B} := \liminf_{s \to 0-} \frac{\hat{\mathbf{U}}(s)}{R_1(1/|s|)} = \mathbf{r}\mathbf{l}.$$

Возвратимся к доказательству теоремы 2 и воспользуемся леммами 3 и 4. Имеем

$$\hat{\mathbf{U}}(s) \sim R_1\left(\frac{1}{|s|}\right)\mathbf{rl} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\mu^{\alpha+1}(-s)^{\alpha+1}}L\left(\frac{1}{|s|}\right)\mathbf{rl}, \qquad s \to 0-.$$

По теореме 1

$$\mathbf{U}(t) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha+1}L(t)}{\Gamma(\alpha+2)\mu^{\alpha+1}}\mathbf{rl} = \frac{t^{\alpha+1}L(t)}{(\alpha+1)\mu^{\alpha+1}}\mathbf{rl}, \qquad t \to +\infty.$$

Теорема 2 доказана полностью. □

Литература

[1] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения, 2*, Мир, Москва, 1967.
[2] C. C. Heyde, *Two probability theorems with applications to a first passage problem*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B. **4** (1964), 214–222.
[3] C. C. Heyde, *Some renewal theorems with applications to a first passage problem*, Ann. Math. Statist. **37** (1966), 699–710.
[4] J. M. Kalma, *Generalized renewal measures*, Thesis, Groningen Univ., Groningen, 1972.
[5] P. Greenwood, E. Omey, J. L. Teugels, *Harmonic renewal measures*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. **12** (1982), 391–409.
[6] P. Embrechts, M. Maejima, E. Omey, *A renewal theorem of Blackwell type*, Ann. Probab. **12** (1984), 561–570.
[7] P. Embrechts, M. Maejima, E. Omey, *Some limit theorems for generalized renewal measures*, J. London Math. Soc. (2) **31** (1985), 184–192.
[8] R. Grübel, *On harmonic renewal measures*, Probab. Theory Related Fields **71** (1986), 393–403.
[9] R. Grübel, *On subordinated distributions and generalized renewal measures*, Ann. Probab. **15** (1987), 394–415.
[10] R. Grübel, *Harmonic renewal sequences and the first positive sum*, J. London Math. Soc. (2) **38** (1988), 179–192.
[11] G. Alsmeyer, *Some relations between harmonic renewal measures and certain first passage times*, Statist. Probab. Lett. **12** (1990), 19–27.
[12] G. Alsmeyer, *On generalized renewal measures and certain first passage times*, Ann. Probab. **20** (1992), 1229–1247.
[13] K. S. Crump, *On systems of renewal equations*, J. Math. Anal. Appl. **30** (1970), 425–434.
[14] K. S. Crump, *On systems of renewal equations: the reducible case*, J. Math. Anal. Appl. **31** (1970), 517–528.
[15] Н. Б. Енгибарян, *Теоремы восстановления для системы интегральных уравнений*, Матем. Сб. **189**:12 (1998), 59–72.
[16] М. С. Сгибнев, *Разложение Стоуна для матричной меры восстановления на полуоси*, Матем. Сб. **193**:7 (2001), 97–106.
[17] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, Москва, 1985.
[18] П. Ланкастер, *Теория матриц*, Наука, Москва, 1982.
[19] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, Москва, 1989.

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирск
Россия
sgibnev@math.nsc.ru

(Поступила 01 12 2003)