PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 54 Fasc. 2 – 1997

LOI ASYMPTOTIQUE DES ERREURS QUADRATIQUES INTÉGRÉES DES ESTIMATEURS À NOYAU DE LA DENSITÉ ET DE LA RÉGRESSION SOUS DES CONDITIONS DE DÉPENDANCE*

Carlos Tenreiro

Résumé: On établit des théorèmes de limite centrale pour les erreurs quadratiques intégrées des estimateurs non paramétriques par noyau de la densité et de la régression, dans un cadre d'indépendance asymptotique, comme application de théorèmes de limite centrale pour des U-statistiques dégénérées. La stabilité relative en probabilité de ces erreurs quadratiques intégrées est aussi établie. Ces résultats généralisent ceux obtenus par Hall en 1984 dans un cadre d'échantillonnage.

Abstract: Central limit theorems for integrated squared errors of nonparametric kernel estimators of density and regression functions are established under asymptotic independence conditions as an application of central limit theorems for degenerated U-statistics. The relative stability in probability for these integrated squared errors is also established. These results generalize the corresponding ones obtained by Hall in 1984 in the independence context.

1 – Introduction

Soit $(X_i, Y_i), i \in \mathbb{Z}$ un processus stochastique fortement stationnaire et géométriquement absolument régulier (cf. [2]) à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. On suppose que

Received: January 27, 1996.
Classification AMS 1991: 62G20, 62G07.
Keywords and Phrases: Kernel estimator, Integrated squared error, Central limit theorem, U-statistic, Mixing.
* Ce travail a bénéficié de l'appui de la JNICT et du Gouvernement Français.

X_0 admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Soient pour $x \in \mathbb{R}^d$

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) , \tag{1}$$

l'estimateur par noyau de la densité $f(x)$ (Rosenblatt [16] et Parzen [15]), et

$$\mu_n(x) = \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^{n} Y_i \, K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) / f_n(x) , \tag{2}$$

l'estimateur par noyau de la fonction de régression $\mu(x) = E[Y_0|X_0 = x]$ (Nadaraya [12] et Watson [22]). K est un noyau sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire, une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} K(x)\,dx = 1$, et (h_n) est une suite de nombres réels strictement positifs tendant vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Dans ce papier nous nous intéressons au comportement asymptotique des erreurs quadratiques intégrées (pondérées) correspondantes à chacun des estimateurs précédents. Elles sont définies par

$$\begin{aligned} I_n &= \int_A \Big\{ f_n(x) - f(x) \Big\}^2 \omega(x)\,dx , \\ J_n &= \int_A \Big\{ \mu_n(x) - \mu(x) \Big\}^2 f_n^2(x)\,\omega(x)\,dx , \end{aligned} \tag{3}$$

où A est un borélien de $\mathbb{R}^d$ et ω est une fonction de poids.

Des théorèmes de limite centrale pour ces variables ont été obtenus par divers auteurs quand les variables (X_i, Y_i), $i \in \mathbb{Z}$, sont indépendantes. Ce sont les cas de Bickel et Rosenblatt [1], Rosenblatt [17] et Hall [7], pour la variable I_n, et Nadaraya [13], Konakov [10], Nadaraya [14] et Hall [8] pour la variable J_n. Dans le cas mélangeant, la normalité asymptotique de la variable I_n avec $\omega = 1$ et $A = \mathbb{R}^d$, a été obtenue par Takahata et Yoshihara [18]. Dans ces références nous trouvons quatre types de démarches. La première, introduite dans [1], utilise des approximations fortes des processus empiriques pour obtenir un théorème de limite centrale pour I_n. Cette procédure a été employée aussi dans [13] et [10]. Une autre démarche qui se sert d'une technique de Poissonisation de la taille n, a été utilisée dans [17] et [14]. Ces démarches imposent cependant des conditions assez restrictives sur la fenêtre h_n. Telles conditions peuvent être affaiblies en utilisant la démarche introduite dans [7] où la normalité asymptotique de I_n est dérivée à partir de théorèmes limites pour des U-statistiques dégénérées. Une dernière démarche, qui est en effet très proche de la démarche précédente, a été utilisée dans [8] et [18], et est basée sur l'utilisation directe des théorèmes de limite centrale de Brown [3] ou Dvoretzky [6] pour des suites triangulaires appliqués à des développements asymptotiques des écarts I_n et J_n.

Dans cet article, nous présentons une approche qui permet d'unifier le problème de la détermination des lois limite pour les erreurs quadratiques intégrées des estimateurs non paramétriques par noyau de la densité et de la régression dans un cadre multivarié et de dépendance. De la même façon que dans le cas d'échantillonnage (cf. [7] et [8]), les variables $I_n - EI_n$ et $J_n - EJ_n$ peuvent asymptotiquement s'écrire comme la somme de deux U-statistiques dégénérées: une d'ordre 1 et l'autre d'ordre 2. La normalité asymptotique des écarts centrés précédents est alors obtenue en utilisant des théorèmes limites pour des U-statistiques dégénérées engendrées par un processus fortement stationnaire et géométriquement absolument régulier. De plus nous montrons que I_n et J_n sont relativement stables en probabilité. Ces résultats, que nous présentons dans la Section 3, généralisent au cas mélangeant, ceux obtenus par Hall [7] et [8].

La théorie sur les U-statistiques dégénérées, dont on aura besoin, est développée dans la Section 2, où, en utilisant une technique de démonstration basée en Takahata et Yoshihara [18], on généralise au cas mélangeant le Théorème 1 de Hall [7]. L'ensemble d'hypothèses considéré, étant de même moins restrictif que celui introduit par Hall, permet de dériver la loi limite de l'erreur quadratique intégrée pour l'estimateur par noyau de la densité ainsi que pour celui de la régression. Signalons enfin que des résultats voisins peuvent être trouvés dans la littérature. Ce sont par exemple les cas de Khashimov [9] et Yoshihara [24] et [25]. Ils sont cependant assez restrictifs pour les applications que nous présentons ici.

Toutes les démonstrations sont données dans les Sections 4, 5 et 6.

2 – U-statistiques dégénérées. Loi asymptotique

Soit $(Z_i, i \in \mathbb{Z})$ un processus stochastique fortement stationnaire et géométriquement absolument régulier, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. On admet ainsi qu'il existe $C > 0$ et $\rho \in]0,1[$ tels que

$$\beta(n) \leq C\rho^n, \qquad \text{pour tout } \ n \in \mathbb{N}^* \ ,$$

où le coefficient de mélange $\beta(n)$ est défini par (cf. [20] et [21])

$$\beta(n) = E\Big[\sup_{A\in F_n^{+\infty}} \Big|P(A|F_{-\infty}^0) - P(A)\Big|\Big] \tag{4}$$

et F_n^m, $n, m \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, est la tribu engendrée par les variables Z_n, Z_{n+1}, ..., Z_m.

Soient $(g_n(\cdot),\, n\in\mathbb{N}^*)$ et $(h_n(\cdot,\cdot),\, n\in\mathbb{N}^*)$, des suites d'applications mesurables de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p$, respectivement, dans $\mathbb{R}$. Dans cette section nous établissons la normalité asymptotique du couple $(\mathcal{G}_n,\mathcal{H}_n)$, où

$$\mathcal{G}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} g_n(Z_i)\ , \tag{5}$$

$$\mathcal{H}_n = \frac{1}{n}\sum_{1\le j<i\le n}\Big\{h_n(Z_i,Z_j)-E[h_n(Z_i,Z_j)]\Big\}\ , \tag{6}$$

et on suppose que $E[g_n(Z_0)]=0$, $E[h_n(Z_0,y)]=0$ et $h_n(x,y)=h_n(y,x)$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x,y\in\mathbb{R}^p$. $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{H}_n$ sont donc des U-statistiques dégénérées, respectivement d'ordres 1 et 2.

Pour $r>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, introduisons les notations suivantes:

$$\begin{aligned}
u_n(r) &= \max\Big\{\max_{1\le i\le n}\|h_n(Z_i,Z_0)\|_r,\ \|h_n(Z_0,\overline{Z}_0)\|_r\Big\}\ ,\\
v_n(r) &= \max\Big\{\max_{1\le i\le n}\|G_{n0}(Z_i,Z_0)\|_r,\ \|G_{n0}(Z_0,\overline{Z}_0)\|_r\Big\}\ ,\\
w_n(r) &= \|G_{n0}(Z_0,Z_0)\|_r\ ,\\
z_n(r) &= \max_{\substack{0\le i\le n\\1\le j\le n}}\max\Big\{\|G_{nj}(Z_i,Z_0)\|_r,\ \|G_{nj}(Z_0,Z_i)\|_r,\ \|G_{nj}(Z_0,\overline{Z}_0)\|_r\Big\}\ ,
\end{aligned} \tag{7}$$

où $G_{nj}(u,v)=E[h_n(Z_j,u)\,h_n(Z_0,v)]$, pour $j\in\mathbb{N}$ et $u,v\in\mathbb{R}^p$, $\overline{Z}_0$ est une copie de Z_0 qui lui est indépendante, et $\|\xi\|_r=E^{\frac{1}{r}}|\xi|^r$, pour toute variable aléatoire réelle ξ telle que $E|\xi|^r<\infty$.

Le résultat suivant est démontré dans la Section 4. Pour des résultats voisins voir Hall [7] et Yoshihara [24] et [25].

Théorème 1. *On suppose qu'il existe $\delta_0>0$, $\gamma_0<\frac{1}{2}$ et $\gamma_1>0$, tels que:*

(i) $\|g_n(Z_0)\|_4=O(1)$;

(ii) $E[g_n(Z_j)\,g_n(Z_0)]=c_j+o(1)$, *pour tout* $j=0,1,2,...$;

(iii) $u_n(4+\delta_0)=O(n^{\gamma_0})$;

(iv) $v_n(2)=o(1)$;

(v) $w_n(2+\frac{\delta_0}{2})=o(n^{\frac{1}{2}})$;

(vi) $z_n(2)\,n^{\gamma_1}=O(1)$;

(vii) $E[h_n(Z_0,\overline{Z}_0)]^2=2\sigma_2^2+o(1)$.

Alors le vecteur aléatoire $(\mathcal{G}_n, \mathcal{H}_n)$ est asymptotiquement normal de moyenne zéro et de matrice de covariance donnée par $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$, *où* $\sigma_1^2 = c_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty} c_j$.

Remarque 1. Contrairement au cas d'échantillonnage, le terme $\frac{1}{n} \sum_{1 \le j < i \le n} E[h_n(Z_i, Z_j)]$, n'est pas nécessairement nul. La vérification de la condition $\lim_{n\to+\infty} u_n(r) = 0$, pour un $r > 1$, entraîne sa convergence vers zéro (voir Section 4).

3 – Hypothèses et résultats principaux

Nous établissons dans cette section la normalité asymptotique et la stabilité relative en probabilité des erreurs quadratiques intégrées I_n et J_n, correspondantes aux estimateurs par noyau de la densité (1) et de la régression (2), respectivement, dans le cas où (X_i, Y_i), $i \in \mathbb{Z}$ est un processus stochastique fortement stationnaire et géométriquement absolument régulier à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Telles erreurs sont définies par (3), où A est un borélien de $\mathbb{R}^d$ dont la frontière est de mesure de Lebesgue nulle.

3.1. Hypothèses et notations

Les hypothèses introduites dans les points suivants concernent le processus, le noyau, la fenêtre h_n et la fonction de poids. Par simplicité d'exposition nous ne considérons que le cas où K est un noyau d'ordre 2. Si K est un noyau d'ordre $m > 2$, des résultats analogues peuvent facilement être obtenus.

H$_1$) Les lois des vecteurs (X_i, X_0), $i \ge 1$, admettent des versions des densités $f_{(X_i,X_0)}$ qui satisfont les contraintes: il existe $\epsilon > 0$ tel que,

$$\sup_{x\in A^\epsilon} f(x) < \infty$$

et

$$\sup_{i\in\mathbb{N}^*} \sup_{\substack{x\in A^\epsilon\cap\{u\in\mathbb{R}^d \mid f(u)>0\} \\ y\in A^\epsilon}} \frac{f_{(X_i,X_0)}(y,x)}{f(x)} < \infty ,$$

où f désigne la densité de la loi de X_i, et A^ϵ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ dont les distances à A sont inférieures à ϵ.

Notons que la deuxième condition est, dans un cadre d'échantillonnage, conséquence de la première. S'il y a dépendance, elle est par exemple satisfaite dans le cas d'un processus gaussien stationnaire, parce que la variance conditionnelle ne dépend pas de la variable conditionante.

H$_2$) Le noyau K, supposé borné à support borné, est tel que

$$\int_{\mathbb{R}^d} K(z)\, z_i\, dz = 0\,, \qquad i = 1, ..., d \ \text{ et } \ z = (z_1, ..., z_d)\ .$$

H$_3$) La suite (h_n) satisfait les conditions classiques

$$h_n \to 0 \ \text{ et } \ nh_n^d \to +\infty, \qquad \text{lorsque} \ \ n \to +\infty\ ,$$

et, de plus, on admet qu'il existe $\gamma \in\ ]0,1[$ tel que

$$\limsup_n n^\gamma\, h_n^d < \infty\ .$$

Cette dernière condition est peu restrictive et est vérifiée par exemple si $h_n = O(n^{-\delta})$, $0 < \delta < \frac{1}{d}$, dès qu'on choisit $\gamma \in\ ]0, \delta d]$.

H$_4$) La fonction de poids ω est une fonction bornée sur A^ϵ et continue sur l'intérieur de A.

On désigne par $i(\cdot)$ et $j(\cdot)$ les applications réelles définies pour $\lambda \in [0, +\infty]$, par $i(\lambda) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\lambda)$ et $j(\lambda) = 1 - i(\lambda) + \lambda \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(\lambda)$, où $\mathbb{1}_R$ est la fonction indicatrice de R. On notera par $\xrightarrow[n\to+\infty]{p}$ la convergence en probabilité, et par $\xrightarrow[n\to+\infty]{d} N(0, \sigma^2)$ la convergence vers la loi normale de moyenne zéro et de variance σ^2.

3.2. L'erreur quadratique I_n. Théorèmes limites

On établit maintenant la normalité asymptotique et la stabilité relative en probabilité de l'écart I_n. Les démonstrations des résultats suivants sont données dans la Section 5. Des résultats voisins ont été obtenus dans [18] et [11], dans le cas particulier où $\omega = 1$ et $A = \mathbb{R}^d$.

Théorème 2. *Sous les hypothèses* H$_1$),...,H$_4$), *on suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues et bornées sur A^ϵ. Notons*

$$\nu_1^2 = \operatorname{var}\Big((\gamma\, \omega)(X_0)\Big) + 2 \sum_{j=1}^{+\infty} \operatorname{cov}\Big((\gamma\, \omega)(X_j), (\gamma\, \omega)(X_0)\Big)\ ,$$

et

$$\nu_2^2 = \int_A f^2(x)\,\omega^2(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} K(u+z)\,K(u)\,du\Big)^2\,dz\ ,$$

où

$$\gamma(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} u_i\,u_j\,K(u)\,du\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x)\,\mathbb{1}_A(x)\ .$$

(**1**) *Si* $nh_n^{d+4} \to \lambda \in [0,+\infty[$, $n \to +\infty$, *alors*

$$nh_n^{d/2}\{I_n - EI_n\} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} N(0, 4\lambda\nu_1^2 + 2\nu_2^2)\ .$$

(**2**) *Si* $nh_n^{d+4} \to \lambda = +\infty$, $n \to +\infty$, *alors*

$$\sqrt{n}\,h_n^{-2}\{I_n - EI_n\} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} N(0, 4\nu_1^2)\ .$$

Théorème 3. *Sous les conditions du Théorème 2, si on admet que*

$$\int_A \gamma^2(x)\,\omega(x)\,dx < \infty\ ,$$

alors

$$EI_n = \frac{1}{nh_n^d} \int_A f(x)\,\omega(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)\,du + h_n^4 \int_A \gamma^2(x)\,\omega(x)\,dx + o\Big(\frac{1}{nh_n^d} + h_n^4\Big)\ .$$

Si de plus $nh_n^{d+4} \to \lambda \in [0,+\infty]$, $n \to +\infty$, *et*

$$i(\lambda) \int_A f(x)\,\omega(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)\,du + j(\lambda) \int_A \gamma^2(x)\,\omega(x)\,dx \neq 0\ ,$$

alors, l'erreur quadratique intégrée I_n *est relativement stable en probabilité:*

$$\frac{I_n}{EI_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p} 1\ .$$

3.3. L'erreur quadratique J_n. Théorèmes limites

Les résultats suivants concernent la normalité asymptotique et la stabilité relative en probabilité de l'écart J_n. Ils sont démontrés dans la Section 6.

Théorème 4. *Sous les hypothèses* H_1),...,H_4), *on suppose que* f *et* μ *admettent des dérivées partielles, respectivement d'ordre 1 et d'ordre 1 et 2, continues et bornées sur* A^ϵ *et que* $\sigma^2 f$ *est continue sur l'intérieur de* A *et bornée sur* A^ϵ, *où* $\sigma^2(x)$ *est la variance de la loi de* Y_0 *conditionnée par* $X_0 = x$. *On admet aussi que* $E|Y_0|^{8+\delta} < \infty$, *pour un* $\delta > 0$. *Notons*

$$\begin{aligned}\eta_1^2 &= \mathrm{var}\Big(\{Y_0 - \mu(X_0)\}(\phi\,\omega)(X_0)\Big)\\ &\quad + 2\sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{cov}\Big(\{Y_j - \mu(X_j)\}(\phi\,\omega)(X_j),\ \{Y_0 - \mu(X_0)\}(\phi\,\omega)(X_0)\Big)\end{aligned}$$

et

$$\eta_2^2 = \int_A \sigma^4(x)\, f^2(x)\, \omega^2(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} K(u+z)\, K(u)\, du\Big)^2 dz\ ,$$

où

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} u_i\, u_j\, K(u)\, du \left\{ \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i\, \partial x_j}(x)\, f(x) + 2\frac{\partial \mu}{\partial x_i}(x)\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right\} \mathbb{1}_A(x)\ .$$

(**1**) *Si* $nh_n^{d+4} \to \lambda \in [0, +\infty[$, $n \to +\infty$, *alors*

$$nh_n^{d/2}\{J_n - EJ_n\} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} N(0, 4\lambda\eta_1^2 + 2\eta_2^2)\ .$$

(**2**) *Si* $nh_n^{d+4} \to \lambda = +\infty$, $n \to +\infty$, *alors*

$$\sqrt{n}\, h_n^{-2}\{J_n - EJ_n\} \xrightarrow[n\to+\infty]{d} N(0, 4\eta_1^2)\ .$$

Théorème 5. *Sous les conditions du Théorème 4, si on admet que*

$$\int_A \phi^2(x)\, \omega(x)\, dx < \infty\ ,$$

alors

$$\begin{aligned}EJ_n &= \frac{1}{nh_n^d}\int_A \sigma^2(x)\, f(x)\, \omega(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)\, du\\ &\quad + h_n^4 \int_A \phi^2(x)\, \omega(x)\, dx + o\Big(\frac{1}{nh_n^d} + h_n^4\Big)\ .\end{aligned}$$

Si de plus $nh_n^{d+4} \to \lambda \in [0, +\infty]$, $n \to +\infty$, *et*

$$i(\lambda)\int_A \sigma^2(x)\, f(x)\, \omega(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)\, du + j(\lambda)\int_A \phi^2(x)\, \omega(x)\, dx \neq 0\ ,$$

alors, l'erreur quadratique intégrée J_n est relativement stable en probabilité:

$$\frac{J_n}{EJ_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p} 1 \ .$$

4 – Démonstration du Théorème 1

De façon à faciliter la lecture de la démonstration du Théorème 1, nous commençons par énoncer quelques résultats auxiliaires qui y sont souvent utilisés.

Etant donné $(Z_i,\, i \in \mathbb{Z})$ un processus stochastique fortement stationnaire, $\beta(n)$ son coefficient de mélange d'ordre n de type β (cf. (4)) et des indices $i_1, i_2, ..., i_j, i_{j+1}, ..., i_k$ satisfaisant $i_1 < i_2 < ... < i_j < i_{j+1} < ... < i_k$, on désigne par Q, R et P respectivement, les lois des vecteurs $X = (Z_{i_1}, ..., Z_{i_j})$, $Y = (Z_{i_{j+1}}, ..., Z_{i_k})$ et $(Z_{i_1}, ..., Z_{i_j}, Z_{i_{j+1}}, ..., Z_{i_k})$, et par $Q \times R$ la mesure produit de Q par R.

Lemme 1 (Yoshihara [24])**.** *Soit h une application mesurable réelle. S'il existe $M > 0$ et $\gamma > 0$ tels que*

$$\int |h|^{1+\gamma}\, dP \le M \quad \text{ et } \quad \int |h|^{1+\gamma}\, d(Q\times R) \le M \ ,$$

alors

$$E\Big|E\Big[h(X,Y)|X\Big] - H(X)\Big| \le 4\, M^{\frac{1}{1+\gamma}}\, \beta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(i_{j+1} - i_j) \ ,$$

où $H(u) = E[h(u,Y)]$.

Les résultats suivants sont des conséquences immédiates du lemme précédent:

Corollaire 1 (Yoshihara [23])**.** *Sous les hypothèses du Lemme 1, on a*

$$\Big|E[h(X,Y)] - E[H(X)]\Big| \le 4\, M^{\frac{1}{1+\gamma}}\, \beta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(i_{j+1} - i_j) \ .$$

Corollaire 2. *Soient g et h sont des applications mesurables réelles telles que $E|g(X)|^s < \infty$ et $E|h(Y)|^t < \infty$, où $s,t > 1$ et $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} < 1$. Alors*

$$\Big|E[g(X)\, h(Y)] - E[g(X)]\, E[h(Y)]\Big| \le 4\, \beta^{1-\frac{1}{s}-\frac{1}{t}}(i_{j+1} - i_j)\, \|g(X)\|_s\, \|h(Y)\|_t \ .$$

Corollaire 3. *Soit g une application mesurable réelle telle que $E|g(Y)|^{1+\gamma} < \infty$, pour un $\gamma > 0$. Alors*

$$E\Big|E[g(Y)|X] - E[g(Y)]\Big| \le 4\, \beta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(i_{j+1} - i_j)\, \|g(Y)\|_{1+\gamma} \ .$$

La démonstration du Théorème 1 est basée sur des adéquats développements asymptotiques des variables $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{H}_n$ définies dans la Section 2. Ces développements sont présentés dans les lemmes suivants.

On commence par celui de la U-statistique dégénérée d'ordre 1 $\mathcal{G}_n$, définie par (5).

Lemme 2. *Sous les conditions* (i) *et* (ii) *du Théorème 1, la variable aléatoire* $\mathcal{G}_n$ *est asymptotiquement équivalente à* $\sum_{\alpha=1}^{k} T_{\alpha,n}$, *où pour* $\alpha = 1, 2, ..., k$,

$$T_{\alpha,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=\alpha(r+m)-m+1}^{\alpha(r+m)} g_n(Z_i) \ , \tag{8}$$

avec $k = k(n) = [\frac{n}{m+r}]$, $m = m(n) = [n^{\delta_1}]$, $r = r(n) = [n^{\delta_2}]$ ($[x]$ désigne la partie entière du réel x), *et* $0 < \delta_2 < \delta_1 < \frac{1}{3}$. *De plus, on a:*

$$G1) \quad \sum_{\alpha=1}^{k} E[T_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}] = o_p(1) \ ,$$

$$G2) \quad \sum_{\alpha=1}^{k} \mathrm{var}[T_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}] = \sigma_1^2 + o_p(1)$$

et

$$G3) \quad \sum_{\alpha=1}^{k} E|T_{\alpha,n}|^4 = o(1) \ ,$$

où σ_1^2 *est donné par* $c_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty} c_j$, *et pour* $\alpha = 1, 2, ..., k$, $F_{\alpha,n}$ *désigne la tribu* $F_1^{\alpha(r+m)+1}$.

Démonstration: Considérons la décomposition

$$\mathcal{G}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i=a_\alpha}^{b_\alpha} g_n(Z_i) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\alpha=0}^{k} \sum_{i=b_\alpha+1}^{a_{\alpha+1}-1} g_n(Z_i) \ ,$$

où $b_0 = 0$, $a_i = b_{i-1} + r + 1$, $b_i = a_i + m - 1$ ($i = 1, 2, ..., k$) et $a_{k+1} = n + 1$. Cette décomposition introduit des sommes comportant respectivement des paquets de termes successifs de tailles m et r respectivement et distants de r et m. On conclut facilement que le terme correspondant aux paquets de taille petite converge en probabilité vers zéro, lorsque n tend vers l'infini. Ainsi, on a

$$\mathcal{G}_n = \sum_{\alpha=1}^{k} T_{\alpha,n} + o_p(1) \ ,$$

où pour $\alpha = 1, 2, ..., k$, $T_{\alpha,n}$ est défini par (8).

Etablissons maintenant les conditions G1), G2) et G3).

Etablissement de la condition G3): D'après la stationnarité du processus Z_i, $i \in \mathbb{Z}$, l'hypothèse (i) et le choix de δ_1 avec $\delta_1 < \frac{1}{3}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{k} E|T_{\alpha,n}|^4 &= kE|T_{1,n}|^4 \\ &\leq k\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{m}\|g_n(Z_i)\|_4\Big)^4 \\ &= O(n^{3\delta_1-1}) = o(1) \ .\end{aligned}$$

Etablissement de la condition G1): Nous montrons la convergence L_1 qui impliquera la convergence en probabilité. Tenant en compte que du point précédent $\|T_{\alpha,n}\|_4 = O(\frac{m}{\sqrt{n}})$, l'application du Corollaire 3 avec $\gamma \leq 3$, nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}E\Big|\sum_{\alpha=1}^{k} E[T_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}]\Big| &\leq \sum_{\alpha=1}^{k} E\Big|E[T_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}] - E[T_{\alpha,n}]\Big| \\ &= O\Big(\sqrt{n}\,\beta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(r)\Big) \ ,\end{aligned}$$

et le majorant est négligeable d'après la convergence exponentielle vers zéro des coefficients de mélange, et le fait que r tend vers l'infini avec n.

Etablissement de la condition G2): Il résulte du point précédent qu'il suffit, pour établir la condition G2), de montrer que $\sum_{\alpha=1}^{k} E[T^2_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}] = \sigma_1^2 + o(1)$. Pour cela nous allons montrer que

$$\sum_{\alpha=1}^{k} E[T^2_{\alpha,n}] = \sigma_1^2 + o(1)$$

et

$$\sum_{\alpha=1}^{k}\Big\{E[T^2_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}] - E[T^2_{\alpha,n}]\Big\} = o_p(1) \ .$$

En effet, d'après les hypothèses (i) et (ii)

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{k} E[T^2_{\alpha,n}] &= kE[T^2_{1,n}] \\ &= \frac{km}{n}\,E\Big(\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m} g_n(Z_i)\Big)^2 \\ &= c_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty} c_j + o(1) = \sigma_1^2 + o(1) \ ,\end{aligned}$$

puisque $\frac{km}{n} \to 1$, $n \to +\infty$. De plus, tenant compte de l'égalité $\|T^2_{\alpha,n}\|_2 = O(\frac{m^2}{n})$, une nouvelle application du Corollaire 3 avec $\gamma \leq 1$, nous permet d'écrire

$$E\Big|\sum_{\alpha=1}^{k}\Big\{E[T^2_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}] - E[T^2_{\alpha,n}]\Big\}\Big| \leq \sum_{\alpha=1}^{k} E\Big|E[T^2_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}] - E[T^2_{\alpha,n}]\Big|$$
$$= O\Big(m\beta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(r)\Big) = o(1) \ ,$$

d'après la convergence exponentielle vers zéro des coefficients de mélange. ∎

Nous présentons dans le lemme suivant un développement asymptotique de la variable $\mathcal{H}_n$ définie par (6). La technique de démonstration que nous employons est fondée en Takahata et Yoshihara [18]. Si dans un cadre d'indépendance la variable aléatoire $\mathcal{H}_n$ est une martingale (cf. Hall [7]), dans le cas présent d'indépendance asymptotique, il découle du lemme suivant qu'elle est asymptotiquement équivalente à une martingale.

Lemme 3. *Sous les conditions* (iii)–(vii) *du Théorème 1, la variable aléatoire $\mathcal{H}_n$ est asymptotiquement équivalente à $\sum_{\alpha=1}^{k} U_{\alpha,n}$, où pour $\alpha = 1, 2, ..., k$,*

$$U_{\alpha,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=\alpha(r+m)-m+1}^{\alpha(r+m)} \ \sum_{j=1}^{(\alpha-1)(r+m)+1} h_n(Z_i, Z_j) \ , \tag{9}$$

avec $k = k(n) = [\frac{n}{m+r}]$, $m = m(n) = [n^{\delta_1}]$, $r = r(n) = [n^{\delta_2}]$ et $0 < \delta_2 < \delta_1 < \min(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{1}{3}(1 - 2\gamma_0))$. De plus, on a:

$$H1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{k} E[U_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}] = o_p(1) \ ,$$

$$H2) \qquad \sum_{\alpha=1}^{k} \mathrm{var}[U_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}] = \sigma_2^2 + o_p(1) \ ,$$

et

$$H3) \qquad \sum_{\alpha=1}^{k} E|U_{\alpha,n}|^4 = o(1) \ ,$$

où $F_{\alpha,n}$ est la tribu $F_1^{\alpha(r+m)+1}$, pour $\alpha = 1, 2, ..., k$.

Démonstration: Prenons la décomposition

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_n = &\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i=a_\alpha}^{b_\alpha}\sum_{j=1}^{a_\alpha-r}\bar{h}_n(Z_i,Z_j) + \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i=a_\alpha}^{b_\alpha}\sum_{j=a_\alpha-r+1}^{i-1}\bar{h}_n(Z_i,Z_j)\\ &+\frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{k}\sum_{i=b_\alpha+1}^{a_{\alpha+1}-1}\sum_{j=1}^{b_\alpha+1-r}\bar{h}_n(Z_i,Z_j) + \frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{k}\sum_{i=b_\alpha+1}^{a_{\alpha+1}-1}\sum_{j=b_\alpha+2-r}^{i-1}\bar{h}_n(Z_i,Z_j)\ ,\end{aligned}$$

où $\bar{h}_n(Z_i,Z_j)=h_n(Z_i,Z_j)-E[h_n(Z_i,Z_j)]$, $b_0=0$, $a_i=b_{i-1}+r+1$, $b_i=a_i+m-1$ $(i=1,2,...,k)$ et $a_{k+1}=n+1$.

Les trois derniers termes de l'égalité précédente contiennent des paquets de petite taille. Une démarche analogue à celle employée dans Yoshihara [24] nous permet de conclure que, d'après les hypothèses (iii), (vi), (vii) et le choix de δ_1 et δ_2, ces termes convergent en probabilité vers zéro. Ainsi, nous avons

$$\mathcal{H}_n = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i=a_\alpha}^{b_\alpha}\sum_{j=1}^{a_\alpha-r}\Big\{h_n(Z_i,Z_j)-E[h_n(Z_i,Z_j)]\Big\}+o_p(1)\ .$$

L'application du Corollaire 1 avec $\gamma\le 3+\delta_0$, l'hypothèse (iii) et la convergence exponentielle vers zéro du coefficient de mélange permettent de conclure que le terme deterministe intervenant dans l'égalité précédente est négligeable. En effet, en désignant par $(\overline{Z}_i,\ i\in\mathbb{Z})$ une copie du processus $(Z_i,\ i\in\mathbb{Z})$, qui lui est indépendante, on a

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i=a_\alpha}^{b_\alpha}\sum_{j=1}^{a_\alpha-r}E[h_n(Z_i,Z_j)]\Big| &\le\\ &\le \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i=a_\alpha}^{b_\alpha}\sum_{j=1}^{a_\alpha-r}\Big|E[h_n(Z_i,Z_j)]-E[h_n(Z_i,\overline{Z}_j)]\Big|\\ &\le \frac{4}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i=a_\alpha}^{b_\alpha}\sum_{j=1}^{a_\alpha-r}u_n(4+\delta_0)\,\beta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(r)\\ &= O\Big(n^{1+\gamma_0}\,\beta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(r)\Big)=o(1)\ .\end{aligned}$$

On a alors

$$\mathcal{H}_n=\sum_{\alpha=1}^{k}U_{\alpha,n}+o_p(1)\ ,$$

où pour $\alpha=1,2,...,k$, $U_{\alpha,n}$ est défini par (9).

Etablissement de la condition H1): En appliquant le Lemme 1 avec $\gamma \leq 3+\delta_0$, on obtient comme ci-dessus

$$E\Big|\sum_{\alpha=1}^{k} E[U_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}]\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i=a_\alpha}^{b_\alpha}\sum_{j=1}^{a_\alpha-r} E\Big|E[h_n(Z_i,Z_j)|F_{\alpha-1,n}] - E[h_n(Z_i,\overline{Z}_j)]\Big|$$

$$\leq \frac{4}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i=a_\alpha}^{b_\alpha}\sum_{j=1}^{a_\alpha-r} u_n(4+\delta_0)\,\beta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(r) = o(1)\ .$$

Etablissement de la condition H3): On a

$$\sum_{\alpha=1}^{k} E[U_\alpha]^4 \leq \frac{1}{n^4}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i_1,\dots,i_4=a_\alpha}^{b_\alpha}\sum_{j_1,\dots,j_4=1}^{a_\alpha-r}\Big|E\Big[\prod_{t=1}^{4} h_n(Z_{i_t},Z_{j_t})\Big] - E\Big[\prod_{t=1}^{4} h_n(Z_{i_t},\overline{Z}_{j_t})\Big]\Big|$$
$$+\frac{1}{n^4}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i_1,\dots,i_4=a_\alpha}^{b_\alpha}\sum_{j_1,\dots,j_4=1}^{a_\alpha-r}\Big|E\Big[\prod_{t=1}^{4} h_n(Z_{i_t},\overline{Z}_{j_t})\Big]\Big|\ .$$

Le premier terme de la somme précédente est négligeable puisque d'après l'application du Corollaire 1 avec $\gamma \leq \delta_0/4$, on conclut qu'il est d'ordre $k\,m^4\,u_n^4(4+\delta_0)\,\beta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(r)$, car

$$\max\Big\{\Big\|\prod_{t=1}^{4} h_n(Z_{i_t},Z_{j_t})\Big\|_{1+\gamma}\,,\ \Big\|\prod_{t=1}^{4} h_n(Z_{i_t},\overline{Z}_{j_t})\Big\|_{1+\gamma}\Big\} \leq u_n^4(4+\delta_0)\ .$$

Pour l'étude du second terme, il nous faut analyser divers cas. Il est égale à

$$\frac{1}{n^4}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i_1,\dots,i_4=a_\alpha}^{b_\alpha}\sum_{j_1,\dots,j_4=1}^{a_\alpha-r}\Big|E\Big[g_{i_1,\dots,i_4}(Z_{j_1},\dots,Z_{j_4})\Big]\Big|\ ,$$

où pour $u_1,\dots,u_4\in\mathbb{R}^d$, $g_{i_1,\dots,i_4}(u_1,\dots,u_4) = E[\prod_{t=1}^4 h_n(X_{i_t n},u_t)]$. En supposant que les indices j_1,j_2,j_3,j_4 satisfont à $j_1\leq j_2\leq j_3\leq j_4$, on a:

(**a**) Si $\max(j_2-j_1,j_4-j_3) > r$, on trouve comme ci-dessus la majoration

$$\Big|E\Big[g_{i_1,\dots,i_4}(Z_{j_1},\dots,Z_{j_4})\Big]\Big| \leq 4\,u_n^4\,(4+\delta_0)\,\beta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(r)\ .$$

(**b**) Si $\max(j_2-j_1, j_4-j_3) \le r$ et $j_3-j_2>r$, on considère la décomposition

$$\Big|E\Big[g_{i_1,\ldots,i_4}(Z_{j_1},\ldots,Z_{j_4})\Big]\Big| \le$$

$$\le \Big|E\Big[g_{i_1,\ldots,i_4}(Z_{j_1},Z_{j_2},Z_{j_3},Z_{j_4})\Big] - E\Big[g_{i_1,\ldots,i_4}(Z_{j_1},Z_{j_2},\overline{Z}_{j_3},\overline{Z}_{j_4})\Big]\Big| + \Big|E\Big[g_{i_1,\ldots,i_4}(Z_{j_1},Z_{j_2},\overline{Z}_{j_3},\overline{Z}_{j_4})\Big]\Big| \ .$$

Pour le premier terme on obtient la même majoration que dans a). Pour le deuxième terme, qui est égal à $|E[G_{n,j_2-j_1}(Z_{i_2},Z_{i_1})\,G_{n,j_4-j_3}(Z_{i_4},Z_{i_3})]|$, on montre que:

(**b**$_1$) Si $\min(j_2-j_1,j_4-j_3)>0$, il est majoré par $z_n^2(2)$.

(**b**$_2$) Si $0=j_2-j_1<j_4-j_3$ (resp. $0=j_4-j_3<j_2-j_1$), il est majoré par $z_n(2)\,w_n(2)$ si $i_1=i_2$ (resp. $i_3=i_4$), et par $z_n(2)\,v_n(2)$ si $i_1\neq i_2$ (resp. $i_3\neq i_4$).

(**b**$_3$) Si $\max(j_2-j_1,j_4-j_3)=0$, il est majoré par $v_n(2)$ si $i_1\neq i_2$ et $i_3\neq i_4$, par $v_n(2)\,u_n^2(4)$ si $i_1\neq i_2$ et $i_3=i_4$ (ou $i_1=i_2$ et $i_3\neq i_4$), par $w_n^2(2)$ si $i_1=i_2=i_3=i_4$, et par $4\,\beta^{\frac{\delta_0}{4+\delta_0}}(|i_3-i_2|)\,w_n^2(2+\frac{\delta_0}{2})+E^2[h_n(Z_0,\overline{Z}_0)]^2$ si $i_1=i_2\neq i_3=i_4$.

Les majorations trouvées aux points a) et b), nous permettent de conclure, d'après les hypothèses (iii)–(vii) et le choix de δ_1 et δ_2 avec $\delta_2<\delta_1<\min(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{1}{3}(1-2\gamma_0))$, que la somme des termes correspondants est négligeable.

(**c**) Si $\max(j_2-j_1,\, j_3-j_2,\, j_4-j_3)\le r$, et étant donné que

$$\Big|E\Big[g_{i_1,\ldots,i_4}(Z_{j_1},\ldots,Z_{j_4})\Big]\Big| \le u_n^4(4+\delta_0) \ ,$$

on a, pour la somme des termes correspondants, d'après l'hypothèse (iii) et du choix de δ_1 et δ_2 avec $\delta_2<\delta_1<\frac{1}{3}(1-2\gamma_0)$, la majoration

$$O\bigg(\frac{m^3\,r^3\,u_n^4\,(4+\delta_0)}{n^2}\bigg) = O(n^{3\delta_1+3\delta_2+4\gamma_0-2}) = o(1) \ .$$

Comme l'ordre imposé aux indices $j_1,\ldots,j_4$ ne restreind pas la généralité de l'analyse précédente, la condition H3) est donc satisfaite.

Etablissement de la condition H2): Il résulte de la condition H1) qu'il suffit, pour établir la condition H2), de montrer que

$$\sum_{\alpha=1}^{k} E[U_{\alpha,n}^2|F_{\alpha-1,n}] = \sigma_2^2 + o_p(1) \ . \tag{10}$$

Notons pour $\alpha = 1, ..., k$

$$\tilde{E}[U_{\alpha,n}^2 | F_{\alpha-1,n}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i,i'=a_\alpha}^{b_\alpha} \sum_{j,j'=1}^{a_\alpha - r} G_{n,|i-i'|}(Z_j, Z_{j'}) \ ,$$

où G_{ni} est défini, pour $u, v \in \mathbb{R}^p$, par $G_{ni}(u, v) = E[h_n(Z_i, u)\, h_n(Z_0, v)]$. L'application du Lemme 1 avec $\gamma \le 2 + \delta_0/2$, permet de conclure qu'il suffit de montrer (10) avec $E[U_{\alpha,n}^2 | F_{\alpha-1,n}]$ remplacé par $\tilde{E}[U_{\alpha,n}^2 | F_{\alpha-1,n}]$. En effet

$$E\left|\sum_{\alpha=1}^{k} E[U_{\alpha,n}^2 | F_{\alpha-1,n}] - \sum_{\alpha=1}^{k} \tilde{E}[U_{\alpha,n}^2 | F_{\alpha-1,n}]\right| \le$$

$$\le \frac{1}{n^2} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i,i'=a_\alpha}^{b_\alpha} \sum_{j,j'=1}^{a_\alpha - r} E\left|E\Big[h_n(Z_i, Z_j)\, h_n(Z_{i'}, Z_{j'}) | F_{\alpha-1,n}\Big] - G_{n,|i-i'|}(Z_j, Z_{j'})\right|$$

$$= O\Big(k\, m^2\, u_n^2\, (4 + \delta_0)\, \beta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(r)\Big) = o(1) \ .$$

Considérons la décomposition

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \tilde{E}[U_{\alpha,n}^2 | F_{\alpha-1,n}] = S_{1n} + S_{2n} + 2S_{3n} \ ,$$

avec

$$S_{1n} = \frac{m}{n^2} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{j=1}^{a_\alpha - r} G_{n0}(Z_j, Z_j) \ ,$$

$$S_{2n} = \frac{m}{n^2} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\substack{j,j'=1 \\ j \ne j'}}^{a_\alpha - r} G_{n0}(Z_j, Z_{j'}) \ ,$$

et

$$S_{3n} = \frac{1}{n^2} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i=1}^{m-1} (m - i) \sum_{j,j'=1}^{a_\alpha - r} G_{ni}(Z_j, Z_{j'}) \ .$$

Chacun des termes $S_{1n} - E[S_{1n}]$, S_{2n} et S_{3n} converge en probabilité vers zéro, lorsque n tend vers l'infini. Pour le premier terme ceci se déduit du développement

$$E[S_{1n} - ES_{1n}]^2 = \frac{m^2}{n^4} \sum_{\alpha,\alpha'=1}^{k} \sum_{j=1}^{a_\alpha - r} \sum_{j'=1}^{a_{\alpha'} - r} E\Big[\bar{G}_{n0}(Z_j)\, \bar{G}_{n0}(Z_{j'})\Big] \ ,$$

où pour $u \in \mathbb{R}^p$ on note $\bar{G}_{n0}(u) = G_{n0}(u, u) - E[G_{n0}(Z_0, Z_0)]$. En effet, l'application du Corollaire 2 avec $s = t = 2 + \delta_0/2$ nous permet d'écrire

$$\left|E\Big[\bar{G}_{n0}(Z_j)\, \bar{G}_{n0}(Z_{j'})\Big]\right| \le 16\, \beta^{\frac{\delta_0}{4+\delta_0}}(|j - j'|)\, w_n^2(2 + \tfrac{\delta_0}{2}) \ ,$$

et donc, d'après l'hypothèse (v) on obtient

$$E[S_{1n} - ES_{1n}]^2 = O\Big(\frac{w_n^2(2+\frac{\delta_0}{2})}{n}\Big) = o(1) \ .$$

Lorsqu'il s'agit des termes S_{2n} et S_{3n}, et en utilisant une technique de démonstration analogue à celle employée dans l'établissement de la condition H3) leur convergence en probabilité vers zéro se déduit des développements

$$E[S_{2n}]^2 = \frac{4m^2}{n^4} \sum_{\alpha,\alpha'=1}^{k} \sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1<j_2}}^{a_\alpha - r} \sum_{\substack{j_3,j_4=1\\ j_3<j_4}}^{a_{\alpha'}-r} E\Big[G_{n0}(Z_{j_1},Z_{j_2})\,G_{n0}(Z_{j_3},Z_{j_4})\Big]$$

et

$$E[S_{3n}]^2 = \frac{1}{n^4} \sum_{\alpha,\alpha'=1}^{k} \sum_{i,i'=1}^{m-1} \sum_{j_1,j_2=1}^{a_\alpha - r} \sum_{j_3,j_4=1}^{a_{\alpha'}-r} (m-i)\,(m-i')$$
$$\cdot\, E\Big[G_{ni}(Z_{j_1},Z_{j_2})\,G_{ni'}(Z_{j_3},Z_{j_4})\Big] \ .$$

La conclusion est maintenant une conséquence l'hypothèse (vii) puisque

$$E[S_{1n}] = \frac{m}{n^2} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{j=1}^{a_\alpha - r} E\Big[h_n(Z_0,\overline{Z}_0)\Big]^2 = \sigma_2^2 + o(1) \ . \ \blacksquare$$

Nous pouvons maintenant, en conséquence des résultats précédents, établir la démonstration du Théorème 1. Nous allons montrer que la variable $a\,\mathcal{G}_n + b\,\mathcal{H}_n$ converge en loi vers la loi normale de moyenne zéro et de variance $a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. D'après les Lemmes 2 et 3 nous savons que

$$a\,\mathcal{G}_n + b\,\mathcal{H}_n = \sum_{\alpha=1}^{k} (a\,T_{\alpha,n} + b\,U_{\alpha,n}) + o_p(1) \ ,$$

où pour $\alpha = 1, ..., k$, les variables aléatoires $T_{\alpha,n}$ et $U_{\alpha,n}$ sont définies respectivement par (8) et (9) avec $k = k(n) = [\frac{n}{m+r}]$, $m = m(n) = [n^{\delta_1}]$, $r = r(n) = [n^{\delta_2}]$, et δ_1 et δ_2 sont tels que $0 < \delta_2 < \delta_1 < \min(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{1}{3}(1-2\gamma_0))$, où γ_0 et γ_1 sont donnés respectivement dans les hypothèses (iii) et (vi) du Théorème 1.

Le théorème de limite centrale de Dvoretzky [6] appliqué à la suite doublement indéxée de variables $a\,T_{\alpha,n} + b\,U_{\alpha,n}$ et de tribus $F_1^{\alpha(r+m)+1}$, pour $\alpha = 1, 2, ..., k$, nous permettra d'obtenir la normalité asymptotique de la variable $a\,\mathcal{G}_n + b\,\mathcal{H}_n$.

Pour cela, nous allons montrer que les conditions suivantes sont satisfaites

$$S1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{k} E\Big[a\,T_{\alpha,n} + b\,U_{\alpha,n} \,|\, F_{\alpha-1,n}\Big] = o_p(1) \ ,$$

$$S2) \qquad \sum_{\alpha=1}^{k} \mathrm{var}\Big[a\,T_{\alpha,n} + b\,U_{\alpha,n} \,|\, F_{\alpha-1,n}\Big] = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + o_p(1) \ ,$$

et

$$S3) \qquad \sum_{\alpha=1}^{k} E\,|a\,T_{\alpha,n} + b\,U_{\alpha,n}|^4 = o(1) \ ,$$

où nous désignons par $F_{\alpha,n}$ la tribu $F_1^{\alpha(r+m)+1}$, pour $\alpha = 1,2,...,k$. Nous utiliserons alors le Théorème 2.2 de Dvoretzky en choisissant une suite de tribus plus fine que celle engendrée par les sommes partielles (voir la Remarque 3.1 de Dvoretzky) et la condition S3), sur les queues de distribution, impliquant la condition de Lindeberg conditionnelle imposée par Dvoretzky.

D'après les conditions G1)–G3) et H1)–H3) établies dans les Lemmes 2 et 3 on déduit que les conditions S1) et S3) sont satisfaites, et que pour établir la condition S2) il suffit de montrer que la somme des covariances conditionnelles est négligeable. Ceci se déduit des égalités

$$\sum_{\alpha=1}^{k} E[T_{\alpha,n}U_{\alpha,n} \,|\, F_{\alpha-1,n}] = o_p(1)$$

et

$$\sum_{\alpha=1}^{k} E[T_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}]\, E[U_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}] = o_p(1) \ ,$$

qu'on établit en conséquence des hypothèses (i) et (iii) du Théorème 1 et de l'application du Lemme 1 avec $\gamma \le 1$. En effet,

$$E\Big|\sum_{\alpha=1}^{k} E[T_{\alpha,n}U_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}]\Big| \le$$

$$\le \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i,i'=a_\alpha}^{b_\alpha} \sum_{j=1}^{a_\alpha-r} E\Big|E\Big[h_n(Z_i,Z_j)\,g_n(Z_{i'}) \,|\, F_{\alpha-1,n}\Big]\Big|$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i,i'=a_\alpha}^{b_\alpha} \sum_{j=1}^{a_\alpha-r} E\Big|E\Big[h_n(Z_i,Z_j)\,g_n(Z_{i'}) \,|\, F_{\alpha-1,n}\Big] - E\Big[h_n(Z_i,\overline{Z}_j)\,g_n(Z_{i'})\Big]\Big|$$

$$= O\Big(m\,n^{\frac{1}{2}+\gamma_0}\,\beta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(r)\Big) = o(1) \ .$$

D'autre part, de et façon analogue à ci-dessus

$$E\Big|\sum_{\alpha=1}^{k} E[T_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}]\,E[U_{\alpha,n}|F_{\alpha-1,n}]\Big| \le$$

$$\le \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i,i'=a_\alpha}^{b_\alpha}\sum_{j=1}^{a_\alpha-r} E\Big|E\Big[g_n(Z_{i'})\,E[h_n(Z_i,Z_j)|F_{\alpha-1,n}]\,|\,F_{\alpha-1,n}\Big]\Big| = o(1)\ .$$

Ceci permet de conclure la démonstration du Théorème 1. ∎

5 – Démonstration des Théorèmes 2 et 3

Démonstration du Théorème 2: On a

$$\begin{aligned} I_n = &\int_A \Big\{f_n(x) - Ef_n(x)\Big\}^2 \omega(x)\,dx \\ &+ 2\int_A \Big\{f_n(x) - Ef_n(x)\Big\}\Big\{Ef_n(x) - f(x)\Big\}\,\omega(x)\,dx \\ &+ \int_A \Big\{Ef_n(x) - f(x)\Big\}^2 \omega(x)\,dx\ . \end{aligned} \tag{11}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I_n - EI_n &= \frac{1}{\sqrt{n}\,h_n^{-2}}\,\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} G_n(X_i) \\ &\quad + \frac{1}{nh_n^{d/2}}\,\frac{2}{n}\sum_{1\le j<i\le n}\Big\{H_n(X_i,X_j) - EH_n(X_i,X_j)\Big\} \\ &\quad + \frac{1}{nh_n^{d/2}}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big\{H_n(X_i,X_i) - EH_n(X_i,X_i)\Big\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}\,h_n^{-2}}\,U_n + \frac{1}{nh_n^{d/2}}\,V_n + \frac{1}{nh_n^{d/2}}\,W_n\ , \end{aligned} \tag{12}$$

où pour $u, v \in \mathbb{R}^d$

$$G_n(u) = \frac{1}{h_n^d}\int_A \Big\{K\Big(\frac{x-u}{h_n}\Big) - EK\Big(\frac{x-X_0}{h_n}\Big)\Big\} h_n^{-2}\Big\{Ef_n(x) - f(x)\Big\}\,\omega(x)\,dx\ ,$$

et

$$\begin{aligned} H_n(u,v) = \frac{1}{h_n^{3d/2}}&\int_A \Big\{K\Big(\frac{x-u}{h_n}\Big) - EK\Big(\frac{x-X_0}{h_n}\Big)\Big\} \\ &\cdot\Big\{K\Big(\frac{x-v}{h_n}\Big) - EK\Big(\frac{x-X_0}{h_n}\Big)\Big\}\omega(x)\,dx\ . \end{aligned}$$

Normalité asymptotique de U_n: D'après les hypothèses sur le noyau K et sur f, un développement de Taylor nous permet d'écrire pour $x \in A$

$$\begin{aligned} h_n^{-2}\Big\{Ef_n(x) - f(x)\Big\} &= h_n^{-2}\int_{\mathbb{R}^d} K(u)\Big[f(x-uh_n) - f(x)\Big]\,du \\ &= \sum_{i,j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} K(u)\,u_i\,u_j\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x-uh_nt)\,(1-t)\,dt\,du\ . \end{aligned}$$

Ainsi, comme K est à support borné et les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont continues et bornées sur A^ϵ, on conclut d'après le théorème de la convergence dominée que pour $x \in A$

$$\lim_{n\to+\infty} h_n^{-2}\Big\{Ef_n(x) - f(x)\Big\} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} u_i\,u_j\,K(u)\,du\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x) = \gamma(x)\ .$$

La normalité asymptotique de U_n sera établie à l'aide du Théorème 1. Comme ω est borné sur A^ϵ ainsi que les dérivées partielles d'ordre 2 de f, nous avons

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\sup_{u\in\mathbb{R}^d}|G_n(u)| < \infty\ ,$$

et donc la condition (i) du Théorème 1 est satisfaite. De plus, comme ω est continue sur l'intérieur de A et la frontière de A est de mesure de Lebesgue nulle, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} E\Big[G_n(X_j)\,G_n(X_0)\Big] = \mathrm{cov}\Big((\gamma\omega)(X_j),\ (\gamma\omega)(X_0)\Big), \qquad \text{pour}\ \ j=0,1,2,\ldots\ .$$

D'après le Théorème 1, on déduit alors que U_n converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers la loi normale de moyenne zéro et de variance $4\nu_1^2$.

Normalité asymptotique de V_n: Soient pour $r>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n(r)$, $v_n(r)$, $w_n(r)$ et $z_n(r)$ définis par (7), pour le processus $(X_i,\ i\in\mathbb{Z})$, avec $h_n = H_n$. D'après les hypothèses sur le processus, le noyau et la fonction de poids, il existe $C>0$ tel que, pour $r\geq 1$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a:

$$\begin{aligned} u_n(r) &\leq C(h_n^d)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}}\ , \\ v_n(r) &\leq C(h_n^d)^{\frac{1}{r}}\ , \\ w_n(r) &\leq C\ , \\ z_n(r) &\leq Ch_n^d\ . \end{aligned} \tag{13}$$

On ne montrera que la première inégalité. Les autres s'obtiennent avec une technique analogue. En tenant en compte qu'uniformément par rapport à $u, v \in \mathbb{R}^d$, on a

$$H_n(u,v) = \frac{1}{h_n^{3d/2}} \int_A K\Big(\frac{x-u}{h_n}\Big) K\Big(\frac{x-v}{h_n}\Big) \omega(x)\, dx + O(h_n^{d/2}) \ , \tag{14}$$

on conclut que pour $r \geq 1$ et $i \geq 1$

$$h_n^{3d/2} \|H_n(X_i, X_0)\|_r \leq E^{\frac{1}{r}} \Big| \int_A K\Big(\frac{x-X_i}{h_n}\Big) K\Big(\frac{x-X_0}{h_n}\Big) \omega(x)\, dx \Big|^r + O(h_n^{2d}) \ ,$$

où, K étant borné à support borné, on a

$$E\Big| \int_A K\Big(\frac{x-X_i}{h_n}\Big) K\Big(\frac{x-X_0}{h_n}\Big) \omega(x)\, dx \Big|^r =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Big| \int_A K\Big(\frac{x-v}{h_n}\Big) K\Big(\frac{x-u}{h_n}\Big) \omega(x)\, dx \Big|^r f_{(X_i,X_0)}(v,u)\, dv\, du$$

$$\leq (h_n^d)^{r+1} \sup_{x \in A} |\omega(x)|^r \sup_{i \in \mathbb{N}^*} \sup_{x,y \in A^\epsilon} \frac{f_{(X_i,X_0)}(y,x)}{f(x)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |K|^r(y)\, |K|^r(y+z)\, dy\, dz \ .$$

Nous déduisons alors que $h_n^{3d/2} \|H_n(X_i, X_0)\|_r \leq C(h_n^d)^{1+\frac{1}{r}}$, avec $C > 0$. De même, si on remplace dans les développements précédents $f_{(X_i,X_0)}(v,u)$ par $f(v)f(u)$, on trouve pour $h_n^{3d/2} \|H_n(X_0, \overline{X}_0)\|_r$ une majoration du même ordre. Nous en déduisons alors que

$$u_n(r) \leq C(h_n^d)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}}, \quad \text{avec} \ \ C > 0 \ .$$

D'après les inégalités (13), les conditions (iii)–(vi) du Théorème 1 sont alors satisfaites avec $\delta_0 > 0$, fixé, $\gamma_0 = \frac{2+\delta_0}{8+2\delta_0} < \frac{1}{2}$ et $\gamma_1 \in \,]0, \gamma]$, où γ est tel que $\limsup_n n^\gamma h_n^d < \infty$ (hypothèse H_3). Il nous reste à déterminer la forme de la variance asymptotique. On a

$$E\Big[\frac{1}{h_n^{3d/2}} \int_A K\Big(\frac{x-X_0}{h_n}\Big) K\Big(\frac{x-\overline{X}_0}{h_n}\Big) \omega(x)\, dx \Big]^2 =$$

$$= \frac{1}{h_n^{3d}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_A K\Big(\frac{x-u}{h_n}\Big) K\Big(\frac{x-v}{h_n}\Big) \omega(x)\, dx \Big)^2 f(u)\, f(v)\, du\, dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} K(y)\, K(y+z)\, (\omega \cdot \mathbb{1}_A) \Big(v + (y+z)h_n\Big)\, dy \Big)^2 f(v + z h_n)\, f(v)\, dz\, dv$$

$$= \int_A f^2(x)\, \omega^2(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} K(u+z)\, K(u)\, du \Big)^2 dz + o(1) \ ,$$

d'après le théorème de la convergence dominée, en tenant en compte la continuité des fonctions ω et f sur l'intérieur de A, et le fait qu'elles sont bornées sur A^ϵ. Ainsi, d'après (14):

$$\lim_{n\to+\infty} E[H_n(X_0,\overline{X}_0)]^2 = \nu_2^2 = \int_A f^2(x)\,\omega^2(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} K(u+z)\,K(u)\,du\Big)^2 dz\ .$$

D'après le Théorème 1 on déduit que V_n converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers la loi normale de moyenne zéro et de variance $2\nu_2^2$.

Normalité asymptotique de $I_n - EI_n$: Comme le dernier terme de la décomposition (12) est tel que $W_n = o_p(1)$, elle peut donc se reécrire

$$I_n - EI_n = \frac{1}{\sqrt{n}\,h_n^{-2}}\,U_n + \frac{1}{nh_n^{d/2}}\,V_n + o_p\Big(\frac{1}{nh_n^{d/2}}\Big)\ .$$

La conclusion découle maintenant des points précédents et du Théoréme 1. ∎

Démonstration du Théorème 3: D'après (11) on conclut que

$$\begin{aligned}
EI_n - \int_A \Big\{Ef_n(x) - f(x)\Big\}^2 \omega(x)\,dx &= \\
&= E\int_A \Big\{f_n(x) - Ef_n(x)\Big\}^2 \omega(x)\,dx \\
&= \frac{1}{nh_n^{d/2}}\Big\{EH_n(X_0,X_0) + \frac{2}{n}\sum_{1\le j<i\le n} EH_n(X_i,X_j)\Big\}\ .
\end{aligned}$$

En tenant en compte que d'après la première des inégalités (13), le terme de covariance $\frac{2}{n}\sum_{1\le j<i\le n} EH_n(X_i,X_j)$ est négligeable (cf. Remarque 1), et que

$$\begin{aligned}
EH_n(X_0,X_0) &= \frac{1}{h_n^{3d/2}}\int_A\int_{\mathbb{R}^d} K^2\Big(\frac{x-y}{h_n}\Big) f(y)\,dy\,\omega(x)\,dx + O(h_n^{d/2}) \\
&= \frac{1}{h_n^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)\int_A f(x-uh_n)\,\omega(x)\,dx\,du + O(h_n^{d/2})\ ,
\end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
EI_n = {}& \frac{1}{nh_n^d}\int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)\int_A f(x-uh_n)\,\omega(x)\,dx\,du \\
&+ \int_A \Big\{Ef_n(x) - f(x)\Big\}^2 \omega(x)\,dx + o\Big(\frac{1}{nh_n^{d/2}}\Big)\ ,
\end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir le développement annoncé pour EI_n. Un tel développement et le Théorème 2 permettent d'établir la stabilité relative de I_n. ∎

6 – Démonstration des Théorèmes 4 et 5

Démonstration du Théorème 4: Soient, pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$

$$r_n(x,u) = \Big(u_2 - \mu(u_1)\Big)\, K\Big(\frac{x-u_1}{h_n}\Big)$$

et

$$s_n(x,u_1) = \Big(\mu(u_1) - \mu(x)\Big)\, K\Big(\frac{x-u_1}{h_n}\Big) \;.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{n^2 h_n^{2d}} \sum_{i,j=1}^n \int_A \Big\{r_n(x,Z_i) + \bar{s}_n(x,X_i)\Big\}\, \Big\{r_n(x,Z_j) + \bar{s}_n(x,X_j)\Big\}\, \omega(x)\, dx \\ &\quad + \frac{2}{n h_n^{2d}} \sum_{i=1}^n \int_A \Big\{r_n(x,Z_i) + \bar{s}_n(x,X_i)\Big\}\, E[s_n(x,X_0)]\, \omega(x)\, dx \\ &\quad + \frac{1}{n h_n^{2d}} \int_A E^2[s_n(x,X_0)]\, \omega(x)\, dx \;, \end{aligned} \tag{15}$$

où $\bar{s}_n(x,u_1) = s_n(x,u_1) - E[s_n(x,X_0)]$ et $Z_i = (X_i, Y_i)$, $i \in \mathbb{Z}$. L'écart centré $J_n - EJ_n$ peut être donc décomposé dans la somme de U-statistiques dégénérées d'ordre 1 et 2. En négligeant les termes d'ordre supérieur, on déduit

$$\begin{aligned} J_n - EJ_n &= \frac{1}{\sqrt{n}\, h_n^{-2}}\, \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n G_n^*(Z_i) \\ &\qquad + \frac{1}{n h_n^{d/2}}\, \frac{2}{n} \sum_{1 \le j < i \le n} \Big\{H_n^*(Z_i,Z_j) - EH_n^*(Z_i,Z_j)\Big\} + o_p\Big(\frac{1}{n h_n^{d/2}}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}\, h_n^{-2}}\, U_n^* + \frac{1}{n h_n^{d/2}}\, V_n^* + o_p\Big(\frac{1}{n h_n^{d/2}}\Big) \;, \end{aligned} \tag{16}$$

où pour $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} G_n^*(u) &= \frac{1}{h_n^{2d}} \int_A r_n(x,u)\, h_n^{-2}\, E[s_n(x,X_0)]\, \omega(x)\, dx \\ &= \frac{1}{h_n^d} (u_2 - \mu(u_1)) \int_A K\Big(\frac{x-u_1}{h_n}\Big) h_n^{-2}\, E\Big[\Big(\mu_n(x) - \mu(x)\Big)\, f_n(x)\Big]\, \omega(x)\, dx \;, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_n^*(u,v) &= \frac{1}{h_n^{3d/2}} \int_A r_n(x,u)\, r_n(x,v)\, \omega(x)\, dx \;, \\ &= \frac{1}{h_n^{3d/2}} \,(u_2 - \mu(u_1))\,(v_2 - \mu(v_1)) \int_A K\Big(\frac{x-u_1}{h_n}\Big) K\Big(\frac{x-v_1}{h_n}\Big) \omega(x)\, dx \;. \end{aligned}$$

Normalité asymptotique de U_n^*: D'après les hypothèses sur le noyau K, sur f et μ, nous avons pour $x \in A$

$$h_n^{-2}\, E\Big[(\mu_n(x)-\mu(x))\, f_n(x)\Big] = \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} K(u)\, u_i\, u_j \bigg\{ \frac{\partial \mu}{\partial x_i}(x) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-h_n ut)\, dt + f(x-h_n u) \int_0^1 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i\, \partial x_j}(x-h_n ut)\,(1-t)\, dt \bigg\}\, du.$$

Le théorème de la convergence dominée permet d'écrire que pour $x \in A$

$$\lim_{n\to+\infty} h_n^{-2}\, E\Big[(\mu_n(x)-\mu(x))\, f_n(x)\Big] = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} u_i\, u_j\, K(u)\, du \bigg\{ \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i\, \partial x_j}(x)\, f(x) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x_i}(x)\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \bigg\} = \phi(x)\ .$$

De plus comme les dérivées partielles d'ordre 1 de f et d'ordre 1 et 2 de μ sont continues et bornées sur A^ϵ, ω est continue sur l'intérieur de A, et la frontière de A est de mesure de Lebesgue nulle, nous avons

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} E|G_n^*(Z_0)|^4 < \infty\ ,$$

et pour $j=0,1,2,...$,

$$\lim_{n\to+\infty} E\Big[G_n^*(Z_j)\, G_n^*(Z_0)\Big] = \mathrm{cov}\Big(\{Y_j-\mu(X_j)\}(\phi\omega)(X_j),\ \{Y_0-\mu(X_0)\}(\phi\omega)(X_0)\Big)\ .$$

D'après le Théorème 1, on déduit que U_n^* converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers la loi normale de moyenne zéro et de variance $4\eta_1^2$.

Normalité asymptotique de V_n^*: Soient $u_n(r)$, $v_n(r)$, $w_n(r)$ et $z_n(r)$ les quantités définies pour $r>0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, par (7) avec $h_n = H_n^*$. De la même façon que dans la démonstration du Théorème 2, et en tenant en compte que $E|Y_0|^{8+\delta} < \infty$, il existe $C>0$ tel que pour $r \ge 1-\frac{2}{10+\delta}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$u_n(r) \le C(h_n^d)^{\frac{1}{r}-\frac{2}{8+\delta}-\frac{1}{2}}, \quad \text{si } r < 4+\frac{\delta}{2}\ ,$$

$$v_n(r) \le C(h_n^d)^{\frac{1}{r}-\frac{2}{8+\delta}}, \quad \text{si } r < 2+\frac{\delta}{4}\ ,$$

$$w_n(r) \le C, \quad \text{si } r < 2+\frac{\delta}{4}$$

et

$$z_n(r) \le C(h_n^d)^{\frac{4+\delta}{8+\delta}}, \quad \text{si } r < 2+\frac{\delta}{4}\ .$$

Les conditions (iii)–(vi) du Théorème 1 sont alors satisfaites avec $\delta_0 \in]0, \frac{\delta}{2}[$, $\gamma_0 = \frac{1}{2} + \frac{2}{8+\delta} - \frac{1}{4+\delta_0}$, $\gamma_1 \in]0, \frac{4+\delta}{8+\delta}\gamma]$, où γ est tel que $\limsup_n n^\gamma h_n^d < \infty$. Précisons maintenant la forme de la variance asymptotique. On a

$$
\begin{aligned}
&E[H_n^*(Z_0, \overline{Z}_0)]^2 = \\
&= \frac{1}{h_n^{3d}} E\left[(Y_0 - \mu(X_0))\,(\overline{Y}_0 - \mu(\overline{X}_0)) \int_A K\Big(\frac{x - X_0}{h_n}\Big) K\Big(\frac{x - \overline{X}_0}{h_n}\Big) \omega(x)\, dx\right]^2 \\
&= \frac{1}{h_n^{3d}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sigma^2(u)\, \sigma^2(v) \left[\int_A K\Big(\frac{x-u}{h_n}\Big) K\Big(\frac{x-v}{h_n}\Big) \omega(x)\, dx\right]^2 f(u)\, f(v)\, du\, dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\sigma^2 f)\,(v + u h_n)\,(\sigma^2 f)(v) \\
&\quad \cdot \Big[\int_{\mathbb{R}^d} K(y)\, K(y+u)\, (\omega \cdot \mathbb{1}_A)\,(v + (u+y)\, h_n)\, dy\Big]^2 du\, dv \; .
\end{aligned}
$$

Par hypothèse les fonctions $\sigma^2 f$ et ω sont continues sur l'intérieur de A et bornées sur A^ϵ, ce qui permet de conclure, d'après le théorème de la convergence dominée que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n \to +\infty} E[H_n^*(Z_0, \overline{Z}_0)]^2 = \eta_2^2 = \\
&\qquad = \int_A \sigma^4(x)\, f^2(x)\, \omega^2(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} K(u+z)\, K(u)\, du\Big)^2 dz \; .
\end{aligned}
$$

On déduit d'après le Théorème 1 que V_n^* converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers la loi normale de moyenne zéro et de variance $2\eta_2^2$.

Normalité asymptotique de $J_n - EJ_n$: Le résultat annoncé découle maintenant des points précédents, de l'égalité (16) et du Théorème 1. ∎

Démonstration du Théorème 5: D'après (15) et en tenant en compte que les termes de covariance qui interviennent dans EJ_n sont négligeables par rapport à $1/nh_n^{d/2}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
EJ_n = &\frac{1}{nh_n^{2d}} \int_A \Big\{E[r_n(x, Z_0)]^2 + E[s_n(x, X_0)]^2\Big\}\, \omega(x)\, dx \\
&+ \frac{n-1}{nh_n^{2d}} \int_A E^2[s_n(x, X_0)]\, \omega(x)\, dx + o\Big(\frac{1}{nh_n^{d/2}}\Big) \; .
\end{aligned}
$$

Ainsi, d'après les définitions de $r_n(x, Z_0)$ et $s_n(x, X_0)$, on a

$$\begin{aligned} EJ_n &= \frac{1}{nh_n^d} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) \int_A \sigma^2(x-uh_n)\, f(x-uh_n)\, \omega(x)\, dx\, du \\ &\quad + \frac{1}{nh_n^d} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) \int_A \Big(\mu(x-uh_n) - \mu(x)\Big)^2 f(x-uh_n)\, \omega(x)\, dx\, du \\ &\quad + \frac{n-1}{n} \int_A E^2\Big[(\mu_n(x) - \mu(x))\, f_n(x)\Big]\, \omega(x)\, dx + o\Big(\frac{1}{nh_n^{d/2}}\Big)\,, \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir le dévéloppement annoncé pour EJ_n. Finalement, la stabilité relative de J_n découle de ce dévéloppement et du Théorème 4. ∎

Remerciements – Nous tenons à remercier sincèrement Monsieur Christian Gouriéroux et Madame Esmeralda Gonçalves pour les commentaires faits sur une version préliminaire de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bickel, P.J. and Rosenblatt, M. – On some global measures of the deviations of density function estimates, *Ann. Statist.,* 1 (1973), 1071–1095.

[2] Bradley, R.C. – *Basic properties of strong mixing conditions*, In: "Dependence in Probability and Statistics, a survey of recent results" (Eberlein, E. et al.), pp. 165–192, Boston, Birkhäuser, 1986.

[3] Brown, B.M. – Martingale central limit theorems, *Ann. Math. Statist.,* 42 (1971), 59–66.

[4] Csörgő, M. and Horváth, L. – Central limit theorems for L_p-norms of density estimators, *Probab. Theory Rel. Fields,* 80 (1988), 269–291.

[5] Csörgő, M., Gombay, E. and Horváth, L. – Central limit theorems for L_p distances of kernel estimators of densities under random censorship, *Ann. Statist.,* 19 (1991), 1813–1831.

[6] Dvoretzky, A. – Asymptotic normality for sums of dependent random variables, In: *Proc. 6th Berkeley Sympo. Math. Statist. Probab., Univ. Calif. 1970,* 2 (1972), 513–535.

[7] Hall, P. – Central limit theorem for integrated square error properties of multivariate nonparametric density estimators, *J. Multivariate Anal.,* 14 (1984), 1–16.

[8] Hall, P. – Integrated square error properties of kernel estimators of regression functions, *Ann. Statist.,* 12 (1984), 241–260.

[9] Khashimov, Sh.A. – On the asymptotic distribution of the generalized U-statistic for dependent variables, *Theory Probab. Appl.,* 32 (1987), 373–375.

[10] Konakov, V.D. – On a global measure of deviation for an estimate of the regression line, *Theory Probab. Appl.,* 22 (1977), 858–868.

[11] Meloche, J. – Asymptotic behaviour of the mean integrated squared error of kernel density estimators for dependent observations, *Canad. J. Statist.,* 18 (1990), 205–211.

[12] Nadaraya, E.A. – On estimating regression, *Theory Probab. Appl.,* 9 (1964), 141–142.

[13] Nadaraya, E.A. – The limit distribution of the quadratic deviation of nonparametric estimates of the regression function, *Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR,* 74 (1974), 33–36. (En Russe).

[14] Nadaraya, E.A. – A limit distribution of the square error deviation of nonparametric estimators of the regression function, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete,* 64 (1983), 37–48.

[15] Parzen, E. – On estimation of a probability density function and mode, *Ann. Math. Statist.,* 33 (1962), 1065–1076.

[16] Rosenblatt, M. – Remarks on some non-parametric estimates of a density function, *Ann. Math. Statist.,* 27 (1956), 832–837.

[17] Rosenblatt, M. – A quadratic measure of deviation of two-dimensional density estimates and a test of independence, *Ann. Statist.,* 3 (1975), 1–14 [correction, 10 (1982), 646].

[18] Takahata, H. and Yoshihara, K. – Central limit theorems for integrated square error of nonparametric density estimators based on absolutely regular random sequences, *Yokohama Math. J.,* 35 (1987), 95–111.

[19] Tenreiro, C. – Théorèmes limites pour les erreurs quadratiques intégrées des estimateurs à noyau de la densité et de la régression sous des conditions de dépendance, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I,* 320 (1995), 1535–1538.

[20] Volkonskiĭ, V.A. and Rozanov, Yu.A. – Some limit theorems for random functions. I, *Theory Probab. Appl.,* 4 (1959), 178–197.

[21] Volkonskiĭ, V.A. and Rozanov, Yu.A. – Some limit theorems for random functions. II, *Theory Probab. Appl.,* 6 (1961), 186–198.

[22] Watson, G.S. – Smooth regression analysis, *Sankhya A,* 26 (1964), 359–372.

[23] Yoshihara, K. – Limiting behavior of U-statistics for stationary, absolutely regular processes, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete,* 35 (1976), 237–252.

[24] Yoshihara, K. – *Limiting behavior of generalized quadratic forms generated by absolutely regular sequences*, In: "Proc. Fourth Prague Conference on Asymptotic Statist. 1989", pp. 539–547, 1989.

[25] Yoshihara, K. – Limiting behavior of generalized quadratic forms generated by absolutely regular sequences. II, *Yokohama Math. J.,* 37 (1989), 109–123.

Carlos Tenreiro,
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra,
Apartado 3008, 3000 Coimbra – PORTUGAL
E-mail: `tenreiro@mat.uc.pt`