PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 61 Fasc. 1 – 2004
Nova Série

ÉTUDE DU CONTRÔLE OPTIMAL POUR UN PROBLÈME DE TORSION ÉLASTIQUE

J. Saint Jean Paulin et H. Zoubairi

Résumé: On s'intéresse aux comportement limite d'un problème de contrôle optimal dans le cadre de la torsion élastique d'un arbre cylindrique. L'équation d'état et la fonction coût sont supposées avoir des opérateurs dont les coefficients oscillent rapidement. On établit que la limite du contrôle optimal est le contrôle optimal associé au problème limite.

1 – Introduction

On s'intéresse aux comportement limite d'un problème de contrôle optimal dans le cadre de la torsion élastique d'un arbre cylindrique. L'équation d'état et la fonction coût sont supposées avoir des opérateurs dont les coefficients oscillent rapidement.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. Soit $Y =]0,1[^n$ une cellule de base de $\mathbb{R}^n$ et $T \subset Y$ un connexe fermé de $\mathbb{R}^n$. On définit $Y^\star$ par: $Y^\star = Y \backslash T$.

Soit $\varepsilon > 0$ une suite de réels qui tend vers 0. Pour ε fixé, on considère un domaine Ω_ε perforé periodiquement obtenu comme suit.

On recouvre $\mathbb{R}^n$ de façon périodique avec des pavés homothétiques de rapport ε du pavé de base Y. On note par T_ε^i des ensembles de taille ε strictement inclus dans chaque pavé (chaque trou T_ε^i étant égal à un translaté de εT). On définit alors Ω_ε par $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash T_\varepsilon$ où $T_\varepsilon = \bigcup T_\varepsilon^i$ (on ne considère que les trous qui ne coupent pas le bord de Ω). Dans tout ce qui suit, on utilisera systématiquement la convention de sommation sur les indices répétés.

Received: January 14, 2002; *Revised*: February 14, 2003.
AMS Subject Classification: 35B27, 35B37, 49J20, 74C99.
Keywords: Contrôle optimal; homogénéisation; torsion élastique.

Soit $\alpha_M > \alpha_m > 0$ des constantes données. On définit $\mathcal{M}(\alpha_m, \alpha_M)$, l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})$ $n \times n$ tel que:

$$\forall \xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n \quad \alpha_m \, \xi_i \, \xi_i \leq a_{ij}(x) \, \xi_i \, \xi_j \leq \alpha_M \, \xi_i \, \xi_i \text{ p.p.} \quad \text{et} \quad a_{ij} \in L^\infty(\Omega) . \tag{1.1}$$

Soit $A \in \mathcal{M}(\alpha_m, \alpha_M)$ et $B \in \mathcal{M}(\beta_m, \beta_M)$ une matrice symétrique.

Soit $A_\varepsilon(x) = A(\frac{x}{\varepsilon})$ et $B_\varepsilon(x) = B(\frac{x}{\varepsilon})$ des matrices périodiques obtenues à partir de A et B par Y-periodicité.

Nous allons définir le contrôle optimal comme suit. Soit $\mathcal{U}_{\text{ad}}^\varepsilon$ un convexe fermé non vide de $L^2(\Omega_\varepsilon)$ (l'ensemble des contrôles admissibles).

Soit $f \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ et $N > 0$ une constante strictement positive. Pour $\theta_\varepsilon \in \mathcal{U}_{\text{ad}}^\varepsilon$ on définit u_ε l'unique solution de:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f + \theta_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\varepsilon = \text{ constante} & \text{sur } \partial T_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon . n_\varepsilon = \int_{T_\varepsilon} f \, dx & \end{cases} \tag{1.2}$$

où n_ε est la normale unitaire dirigée vers l'exterieur de ∂T_ε. La fonction coût est donnée par

$$J_\varepsilon(\theta_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \, dx + \frac{N}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \theta_\varepsilon^2 \, dx . \tag{1.3}$$

Le contrôle optimal $\theta_\varepsilon^\star$ est la fonction dans $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ qui minimise $J_\varepsilon(\theta_\varepsilon)$ pour $\theta_\varepsilon \in \mathcal{U}_{\text{ad}}^\varepsilon$, en d'autres termes

$$J_\varepsilon(\theta_\varepsilon^\star) = \min_{\theta_\varepsilon \in \mathcal{U}_{\text{ad}}^\varepsilon} J_\varepsilon(\theta_\varepsilon) . \tag{1.4}$$

Ce type de problème s'inspire des problèmes de J.L. Lions [6], il [6] a prouvé l'existence et l'unicité du contrôle optimal $\theta_\varepsilon^\star$.

Remarque 1.1. Dans le cas particulier où $f = \mu \, \alpha$ et $A_\varepsilon = I$, $u_\varepsilon = f_r$ (où f_r est la fonction "contraintes", μ est le coefficient de Lamé du materiau et α est l'angle de torsion), le problème (1.2) modélise la torsion élastique d'un arbre cylindrique. Dans tout ce qui suit, nous allons nous placer dans le cadre général que le problème (1.2) décrit. □

Notre but est d'étudier le comportement limite de $\theta^\star_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et de caractériser $\theta^\star_0$ comme étant le contrôle optimal d'un problème similaire avec des matrices limites A_0 and B_0 et bien sûr les identifier.

Le type de problème de contrôle optimal que l'on considère a été étudié dans différentes situations, notamment par Kesavan & Vanninathan [5] dans le cas périodique pour un problème elliptique de second ordre avec des conditions de Dirichlet sur le bord, par Kesavan & Saint Jean Paulin [3] pour le même opérateur et les mêmes conditions sur le bord mais avec la topologie de la H-convergence. Kesavan & Saint Jean Paulin [4] se sont interessés au contrôle optimal d'un problème elliptique de second ordre dans les domaines perforés avec des conditions de Neumann sur le bord des trous et des conditions de Dirichlet sur le bord du domaine avec la H_0-convergence. L'étude du contrôle optimal a été effectué avec d'autres types d'équations entre autres les équations de Stokes. En effet Saint Jean Paulin & Zoubairi [9] et [8] ont étudié respectivement le problème de Stokes dans les domaines non perforés et dans les domaines perforés de petits trous. Dans cet article, on va se placer dans le cas périodique et considérer l'opérateur de Laplace mais avec des conditions sur le bords des trous définies par une intégrale. On va adapter les méthodes utilisées dans [3], [4], [8] ou [9] pour le problème de torsion élastique.

Ce papier est divisé en six paragraphes organisés de la manière suivante.

Dans le deuxième paragraphe, on rappelle des lemmes de prolongement dûs à Cioranescu & Saint Jean Paulin [2]. Dans le troisième paragraphe, on homogénéise le problème adjoint et on obtient le problème de contrôle optimal limite. Dans le quatrième paragraphe, on étudie les propriétés du tenseur $B^\sharp$ apparaissant dans le problème limite. Dans le cinquième paragraphe, on étudie le problème de contrôle optimal que l'on a introduit au §1. Dans le sixième et dernier paragraphe, on étudie le cas unidimensionnel.

Notation. Dans tout ce qui suit, C désigne différentes constantes positives indépendante de ε. On note par $|\,.\,|$ la mesure de Lebesgue en dimension n. □

2 – Lemmes de prolongements

On introduit l'espace

$$V_\varepsilon = \Big\{ v \in H^1(\Omega_\varepsilon) \mid v = \text{constante sur } \partial T_\varepsilon,\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \Big\} .$$

On prolonge $v \in V_\varepsilon$ dans les trous par sa valeur sur le bord des trous. Soit P_ε

ce prolongement, on a alors que $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(V_\varepsilon, H_0^1(\Omega))$ satisfait

$$|\nabla P_\varepsilon v|_{L^2(\Omega)^n} = |\nabla v|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} \quad \forall\, v \in V_\varepsilon \ . \tag{2.1}$$

Enonçons le résultat suivant dû à Cioranescu et Saint Jean Paulin [2]

Lemme 2.1. *Soit $F \in L^2(Y)$ et $\Phi \in L^2(Y^\star)^n$ Y-périodique solution de*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\Phi = F \quad \textit{dans } Y^\star \\ \displaystyle\int_{\partial T} \Phi.n\, ds = \int_T F\, dx \ . \end{cases} \tag{2.2}$$

Alors il existe $\widetilde{\Phi} \in L^2(T)$ telle que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\widetilde{\Phi} = F \quad \textit{dans } T \\ \widetilde{\Phi}.n|_{\partial T} = \Phi.n|_{\partial T} \ . \end{cases} \tag{2.3}$$

De plus,

$$|\widetilde{\Phi}|_{L^2(T)} \le C\Big(|F|_{L^2(Y)} + |\Phi|_{L^2(Y^\star)}\Big) \ . \ \blacksquare \tag{2.4}$$

Définition 2.2. On désigne par Q le prolongement donné par le Lemme 2.1, c'est à dire $Q \in \mathcal{L}(Y^\star, Y)$ tel que

$$Q\Phi = \begin{cases} \Phi & \text{dans } Y^\star \\ \widetilde{\Phi} & \text{dans } T \ . \ \square \end{cases} \tag{2.5}$$

3 – Homogénéisation

Le problème (1.2)–(1.4) peut se réecrire à l'aide de systèmes d'équations en introduisant l'état adjoint $p_\varepsilon \in V_\varepsilon$. On obtient, $(u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in V_\varepsilon^2$ solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f + \theta_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \operatorname{div}({}^tA_\varepsilon \nabla p_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = p_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\varepsilon = \text{constante} & \text{sur } \partial T_\varepsilon \\ p_\varepsilon = \text{constante} & \text{sur } \partial T_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon.n_\varepsilon\, ds = \int_{T_\varepsilon} f\, dx & \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} ({}^tA_\varepsilon \nabla p_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla u_\varepsilon).n_\varepsilon\, ds = 0 \ . & \end{cases} \tag{3.1}$$

Le contrôle optimal $\theta_\varepsilon^\star$ est caractérisé par l'inégalité variationnelle

$$\theta_\varepsilon^\star \in \mathcal{U}_{\rm ad}^\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_\Omega (p_\varepsilon + N\theta_\varepsilon^\star)\,(\theta_\varepsilon - \theta_\varepsilon^\star) \,\geq\, 0 \quad \forall\, \theta_\varepsilon \in \mathcal{U}_{\rm ad}^\varepsilon \,. \tag{3.2}$$

Pour toute fonction h Y-périodique, on définit

$$m_Y(h) \,=\, \int_Y h(y)\; dy \,. \tag{3.3}$$

On rappelle le résultat classique suivant

Lemme 3.1. *Soit $h \in L^p(\Omega)$ une fonction Y-périodique et $1 \leq p < \infty$. Alors*

$$h(x/\varepsilon) \rightharpoonup\; m_Y(h) \quad \text{dans } L^p(\Omega) \text{ faible} \quad \text{et dans} \quad L^\infty(\Omega) \text{ faible}\star \,. \;\blacksquare \tag{3.4}$$

On va établir le résultat suivant:

Théorème 3.2. *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $\theta_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ tel que $\widetilde{\theta_\varepsilon}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. Soit u_ε et p_ε solutions du problème (3.1) avec B matrice non nécessairement symétrique.*

Alors il existe des matrices A_0 et $B^\sharp$ et des fonctions $\theta \in L^2(\Omega)$, u, $p \in H_0^1(\Omega)$ telles que (par extraction de sous-suites)

$$\begin{cases} \widetilde{\theta_\varepsilon} \rightharpoonup \theta & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u & \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} \\ P_\varepsilon p_\varepsilon \rightharpoonup v & \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

où (u,p) est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_0 \nabla u) = f + \theta & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}({}^t\! A_0 \nabla p - B^\sharp\, \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = p = 0 & \text{sur } \partial\Omega \,. \end{cases} \tag{3.6}$$

où A_0 est la matrice des coefficients homogénéisés donnée par (3.22) et $B^\sharp$ est une matrice dépendant à la fois de A et de B, dont l'expression est donnée par (3.52).

Démonstration:

Première étape: Estimations a priori.

Du fait que $\|\widetilde{\theta}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ est bornée, on a clairement (après extraction de sous-suites)

$$\widetilde{\theta}_\varepsilon \rightharpoonup \theta \quad \text{dans } \ L^2(\Omega) \text{ faible} . \tag{3.7}$$

On multiplie la première équation de (3.1) par u_ε et on intègre à l'aide de la formule de Green, on obtient l'estimation suivante en utilisant l'égalité (2.1)

$$\|P_\varepsilon u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \ , \tag{3.8}$$

ce qui conduit (par extraction de sous-suite) à:

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } \ H_0^1(\Omega) \text{ faible} . \tag{3.9}$$

De même en multipliant la deuxième équation de (3.1) par p_ε et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_{\Omega_\varepsilon} {}^t A_\varepsilon \nabla p_\varepsilon \nabla p_\varepsilon \ dx \ - \int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla p_\varepsilon \ dx \ = \ 0 \ . \tag{3.10}$$

En utilisant les estimations (3.8) sur u_ε et le fait que $A_\varepsilon \in \mathcal{M}(\alpha_m, \alpha_M)$ et $B_\varepsilon \in \mathcal{M}(\beta_m, \beta_M)$, on aboutit à

$$|\nabla P_\varepsilon p_\varepsilon|_{L^2(\Omega)^n} \leq C \ , \tag{3.11}$$

ce qui donne en utilisant l'inégalité de Poincaré:

$$\|P_\varepsilon p_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \ , \tag{3.12}$$

et donc par extraction de sous-suite, on a:

$$P_\varepsilon p_\varepsilon \rightharpoonup p \quad \text{dans } \ H_0^1(\Omega) \text{ faible} . \tag{3.13}$$

Nous allons à présent passer à la limite dans la deuxième équation de (3.1) lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour cela nous avons besoin de fonctions tests que nous allons construire.

Deuxième étape: Construction des fonctions tests.

Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$ et y_k la k-ième composante de $y \in \mathbb{R}^n$.

Soit ω^k solution unique du problème auxiliaire (associé à l'équation d'état):

$$(3.14)\qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(A\,\nabla\omega^k) = 0 \quad \text{dans } Y^\star \\ \displaystyle\int_{\partial T} A\,\nabla\omega^k.n \;=\; 0 \\ \omega^k = \text{constante} \quad \text{sur } \partial T \\ \omega^k - y_k \;\; Y\text{-périodique} \quad \text{et} \quad \displaystyle\int_Y (\omega^k - y_k)\; dy = 0\;. \end{cases}$$

Soit ψ^k solution unique du problème associé à l'équation adjointe

$$(3.15)\qquad \begin{cases} \operatorname{div}({}^tA\,\nabla\psi^k + {}^tB\,\nabla\omega^k) = 0 \quad \text{dans } Y^\star \\ \displaystyle\int_{\partial T} ({}^tA\,\nabla\psi^k + {}^tB\,\nabla\omega^k).n \;=\; 0 \\ \psi^k = \text{constante} \quad \text{sur } \partial T \\ \psi^k \;\; Y\text{-périodique} \quad \text{et} \quad \displaystyle\int_Y \psi^k\, dy = 0\;. \end{cases}$$

On prolonge ω^k à l'intérieur des trous par sa valeur au bord de T, soit $\widetilde{P}\omega^k$ ce prolongement.

On définit ω^k_ε et ψ^k_ε par

$$(3.16)\qquad \begin{cases} \omega^k_\varepsilon(x) = \varepsilon\,\widetilde{P}\omega^k(x/\varepsilon) \\ \psi^k_\varepsilon(x) = \varepsilon\,\psi^k(x/\varepsilon)\;. \end{cases}$$

On a le résultat de convergence suivant

$$(3.17)\qquad \omega^k_\varepsilon \rightharpoonup x_k \quad \text{dans } H^1(\Omega) \text{ faible}\;,$$

De même

$$(3.18)\qquad P_\varepsilon(\psi^k_\varepsilon) \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } H^1(\Omega) \text{ faible}\;.$$

Avec les définitions (3.16), les problèmes (3.14) et (3.15) donnent respectivement

$$(3.19)\qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon\nabla\omega^k_\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} A_\varepsilon\nabla\omega^k_\varepsilon.n_\varepsilon = 0 \\ \omega^k_\varepsilon = \text{constante} \quad \text{sur } \partial T_\varepsilon \end{cases}$$

et

$$(3.20)\qquad \begin{cases} \operatorname{div}({}^tA_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon^k + {}^tB_\varepsilon \nabla \omega_\varepsilon^k) \;=\; 0 \quad \text{dans} \;\; \Omega_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T} ({}^tA_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon^k + {}^tB_\varepsilon \nabla \omega_\varepsilon^k).n_\varepsilon \;=\; 0 \\ \psi_\varepsilon^k = \text{constante} \quad \text{sur} \;\; \partial T_\varepsilon \; . \end{cases}$$

Troisième étape: Homogénéisation.

L'homogénéisation du problème (1.2) est classique (voir [2]), Ils [2] ont obtenu que u est solution de

$$(3.21)\qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(A_0 \nabla u) = f + \theta \quad \text{dans} \;\; \Omega \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad \text{sur} \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

où A_0 est la matrice des coefficients homogénéisées définie par

$$(3.22)\qquad A_0\, e_k \;=\; \frac{1}{|Y|} \int_Y Q\Big(A(y)\, \nabla \omega^k(y)\Big)\; dy \;,$$

avec Q l'opérateur de prolongement défini par (2.5).

Quatrième étape: Méthode de l'énergie.

Nous allons maintenant homogénéiser le problème (3.1) en utilisant une variante de la méthode de l'énergie. Pour pouvoir passer à la limite lorsque ε tend vers 0, il est nécessaire d'obtenir des équations et des estimations dans Ω tout entier. Pour cela, on va utiliser l'opérateur de prolongement Q_ε (voir [2]) défini comme suit. On pose

$$(3.23)\qquad \xi_\varepsilon = A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \; .$$

D'après (1.2), ξ_ε vérifie

$$(3.24)\qquad \begin{cases} -\operatorname{div} \xi_\varepsilon = f + \theta_\varepsilon \quad \text{dans} \;\; \Omega_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} \xi_\varepsilon . n_\varepsilon \;=\; \int_{T_\varepsilon} f\, dx \; . \end{cases}$$

On pose $\Phi(y) = \xi_\varepsilon(\varepsilon y)$ avec $y = x/\varepsilon$. En utilisant le Lemme 2.2 et l'opérateur de prolongement (2.5), on définit

$$(3.25)\qquad (Q_\varepsilon \xi_\varepsilon)(\varepsilon y) = (Q\Phi)(y) \; .$$

Par conséquent,

$$-\operatorname{div} Q_\varepsilon \xi_\varepsilon = f + \widetilde{\theta}_\varepsilon \quad \text{dans} \ \ \Omega \tag{3.26}$$

avec

$$Q_\varepsilon \xi_\varepsilon \rightharpoonup \xi = A_0 \nabla u \quad \text{dans} \ \ L^2(\Omega)^n \text{ faible} . \tag{3.27}$$

De la même manière, on va prolonger l'équation adjointe dans Ω. Pour cela on pose,

$$z_\varepsilon = {}^t A_\varepsilon \nabla p_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \ . \tag{3.28}$$

D'après (3.1), z_ε vérifie

$$\begin{cases} -\operatorname{div} z_\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \ \ \Omega_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} z_\varepsilon . n_\varepsilon = 0 \ . \end{cases} \tag{3.29}$$

On va prolonger de manière similaire à la méthode précédente vu que le Lemme 2.2 peut être appliqué, on obtient

$$-\operatorname{div} Q_\varepsilon z_\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \ \ \Omega \ . \tag{3.30}$$

D'après les estimations (3.7), (3.12) et les hypothèses sur A_ε et B_ε, on obtient

$$|Q_\varepsilon z_\varepsilon|_{L^2(\Omega)^n} \le |z_\varepsilon|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} \le C \ . \tag{3.31}$$

On obtient donc par extraction de sous-suites

$$Q_\varepsilon z_\varepsilon \rightharpoonup z \quad \text{dans} \ \ L^2(\Omega)^n \text{ faible} . \tag{3.32}$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

On multiplie l'équation (3.26) par $\varphi P_\varepsilon(\psi_\varepsilon^k)$, on intègre par parties (on utilise le fait que $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$), on obtient

$$\int_\Omega (f + \widetilde{\theta}_\varepsilon)\, \varphi\, P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k \, dx = \int_\Omega Q_\varepsilon \xi_\varepsilon . \nabla\varphi (P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k)\, dx + \int_\Omega Q_\varepsilon \xi_\varepsilon . \nabla (P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k)\, \varphi \, dx \ . \tag{3.33}$$

De la même manière, on multiplie l'équation (3.30) par $\varphi\, \omega_\varepsilon^k$ et on intègre par parties, on aboutit à

$$0 = -\int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon \, . \, (\nabla\varphi) \omega_\varepsilon^k \, dx - \int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon \, . \, (\nabla \omega_\varepsilon^k)\, \varphi \, dx \ . \tag{3.34}$$

On additionne (3.33) et (3.34):

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (f+\widetilde{\theta}_\varepsilon)\, P_\varepsilon\psi_\varepsilon^k\varphi\; dx \;=\; &-\int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon\,.\,(\nabla\varphi)\,\omega_\varepsilon^k\; dx \;-\int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon\,.\nabla\omega_\varepsilon^k\varphi\; dx \\
&+\int_\Omega Q_\varepsilon\xi_\varepsilon.\nabla\varphi P_\varepsilon\psi_\varepsilon^k\; dx \;+\int_\Omega Q_\varepsilon\xi_\varepsilon\,.\nabla(P_\varepsilon\psi_\varepsilon^k)\,\varphi\; dx\,.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

En utilisant les définitions des opérateurs de prolongement, on va expliciter l'expression suivante intervenant dans (3.35)

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon\,.\nabla\omega_\varepsilon^k\varphi\; dx \;+\int_\Omega Q_\varepsilon\xi_\varepsilon\,.\nabla(P_\varepsilon\psi_\varepsilon^k)\varphi\; dx \;= \\
&=\int_{\Omega_\varepsilon}(-z_\varepsilon\,.\nabla\omega_\varepsilon^k+\xi_\varepsilon\,.\nabla\psi_\varepsilon^k)\varphi\; dx \;+\int_{T_\varepsilon}(-Q_\varepsilon z_\varepsilon\,.\nabla\omega_\varepsilon^k+Q_\varepsilon\xi_\varepsilon\,.\nabla(P_\varepsilon\psi_\varepsilon^k))\varphi\; dx\;.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Or comme $P_\varepsilon\psi_\varepsilon^k =$ constante sur T_ε et $\omega_\varepsilon^k =$ constante sur T_ε, on en déduit que l'intégrale sur T_ε est nulle. En utilisant à présent les définitions (3.23) de ξ_ε et (3.28) de z_ε, l'expression (3.36) devient

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon\,.\nabla\omega_\varepsilon^k\varphi\; dx \;+\int_\Omega Q_\varepsilon\xi_\varepsilon\,.\nabla(P_\varepsilon\psi_\varepsilon^k)\varphi\; dx \;= \\
&\qquad =\; -\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla p_\varepsilon\,.\,(A_\varepsilon\nabla\omega_\varepsilon^k)\varphi\; dx \;+\int_{\Omega_\varepsilon} b_\varepsilon^k\,.\nabla u_\varepsilon\varphi\; dx\;,
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

où b_ε^k est donné par

$$
b_\varepsilon^k \;=\; {}^tA_\varepsilon\nabla\psi_\varepsilon^k \;+\; {}^tB_\varepsilon\nabla\omega_\varepsilon^k\;. \tag{3.38}
$$

En effectuant les prolongements adéquats sur le membre de droite de (3.37), il en résulte

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon\,.\nabla\omega_\varepsilon^k\varphi\; dx \;+\int_\Omega Q_\varepsilon\xi_\varepsilon\,.\nabla(P_\varepsilon\psi_\varepsilon^k)\varphi\; dx \;= \\
&\qquad =\; -\int_\Omega \nabla(P_\varepsilon p_\varepsilon)\,.\,Q_\varepsilon(A_\varepsilon\nabla\omega_\varepsilon^k)\varphi\; dx \;+\int_\Omega Q_\varepsilon b_\varepsilon^k\,.\nabla(P_\varepsilon u_\varepsilon)\varphi\; dx\;,
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

on a utilisé le fait que les intégrales sur T_ε dans le membre de droite de (3.39) sont nulles. En effet, comme $P_\varepsilon u_\varepsilon =$ constante sur T_ε et $p_\varepsilon =$ constante sur T_ε, leur gradiant (intervenant dans ces intégrales sur T_ε) est nul.

Comme $\mathrm{div}(A_\varepsilon\nabla\omega_\varepsilon^k)=0$ dans Ω_ε (d'après (3.19), on a

$$
\mathrm{div}\Big(Q_\varepsilon(A_\varepsilon\nabla\omega_\varepsilon^k)\Big)=0 \quad \text{dans } \Omega\;. \tag{3.40}
$$

De même vu que $\operatorname{div}(b_\varepsilon^k) = 0$ dans Ω_ε (d'après (3.20) et (3.38)), on a

$$\operatorname{div}(Q_\varepsilon b_\varepsilon^k) = 0 \quad \text{dans } \Omega\,. \tag{3.41}$$

De l'expression (3.35), en tenant compte de (3.39), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+\widetilde{\theta}_\varepsilon)\, P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k \varphi\, dx \ &= \\ = -\int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon \,.\nabla\varphi\, \omega_\varepsilon^k\, dx &+ \int_\Omega Q_\varepsilon \xi_\varepsilon \,.\nabla\varphi P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k\, dx \\ -\int_\Omega \nabla(P_\varepsilon p_\varepsilon)\,.\,Q_\varepsilon(A_\varepsilon \nabla \omega_\varepsilon^k)\varphi\, dx &+ \int_\Omega Q_\varepsilon b_\varepsilon^k \,.\nabla(P_\varepsilon u_\varepsilon)\varphi\, dx\,.\end{aligned} \tag{3.42}$$

En intégrant par parties les deux dernières intégrale du membre de droite, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+\widetilde{\theta}_\varepsilon)\, P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k \varphi\, dx \ &= \\ = -\int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon \,.\nabla\varphi\, \omega_\varepsilon^k\, dx &+ \int_\Omega Q_\varepsilon \xi_\varepsilon \,.\nabla\varphi P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k\, dx \\ +\int_\Omega (P_\varepsilon p_\varepsilon)\, Q_\varepsilon(A_\varepsilon \nabla \omega_\varepsilon^k)\,.\nabla\varphi\, dx &- \int_\Omega Q_\varepsilon b_\varepsilon^k \,.\nabla\varphi P_\varepsilon u_\varepsilon\, dx\,.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Maintenant, nous pouvons passer à la limite dans l'expression (3.43) lorsque ε tend vers 0.

Cinquième étape: Passage à la limite.

En utilisant la définition (3.38) et le Lemme 3.1, on montre facilement que b_ε^k (étant périodique), converge dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$ vers sa moyenne et donc après prolongement et extraction de sous-suite, il en résulte

$$Q_\varepsilon b_\varepsilon^k \rightharpoonup b_0^k = m\Big(Q({}^tA\,\nabla\psi^k + {}^tB\,\nabla\omega^k)\Big) \quad \text{dans } L^2(\Omega)^n \text{ faible}\,. \tag{3.44}$$

De même par périodicité, on a la convergence

$$Q_\varepsilon(A_\varepsilon \nabla\omega_\varepsilon^k) \rightharpoonup A_0\, e_k \quad \text{dans } L^2(\Omega)^n \text{ faible}\,. \tag{3.45}$$

Maintenant du fait que z_ε vérifie (3.30) et (3.32), que $Q_\varepsilon b_\varepsilon^k$ vérifie (3.41) et (3.44) et que $Q_\varepsilon(A_\varepsilon\nabla\omega_\varepsilon^k)$ vérifie (3.40) et (3.45), on a au sens des distributions

$$\operatorname{div} z = 0\,, \quad \operatorname{div} b_0^k = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} A_0 e_k = 0 \quad \text{dans } \Omega\,. \tag{3.46}$$

En utilisant d'une part les convergences (3.8) et (3.18) pour le membre de gauche de (3.43) et d'autre part les convergences (3.32) et (3.17) pour la première intégrale du membre de droite de (3.43), les convergences (3.27) et (3.18) pour la deuxième intégrale, les convergences (3.13) et (3.45) pour la troisième intégrale et pour finir les convergences (3.9) et (3.44) pour la dernière intégrale, l'expression (3.43) devient à la limite

$$0 = -\int_\Omega z\,\nabla\varphi\; x_k\; dx + \int_\Omega p(A_0 e_k)\,.\nabla\varphi\; dx - \int_\Omega u\, b_0^k.\nabla\varphi\; dx\;. \tag{3.47}$$

On intégre par parties (3.47) et on utilise (3.46), on obtient

$$0 = \int_\Omega z\,\varphi\, e_k\; dx - \int_\Omega {}^t\!A_0 \nabla p\; e_k\,\varphi\; dx + \int_\Omega \nabla u\; b_0^k\,\varphi\; dx\;. \tag{3.48}$$

Ceci est vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par conséquent

$$z\,.\,e_k = {}^t\!A_0 \nabla p\,.\,e_k - b_0^k\,.\,\nabla u\;. \tag{3.49}$$

Finalement,

$$z = {}^t\!A_0 \nabla p - B^\sharp\,\nabla u\;, \tag{3.50}$$

où la matrice $B^\sharp$ est définie par

$${}^t B^\sharp\, e_k = b_0^k\;. \tag{3.51}$$

En utilisant (3.44) , on obtient

$${}^t B^\sharp\, e_k = m\Big(Q({}^t\!A\,\nabla\psi^k + {}^t B\,\nabla\omega^k)\Big)\;. \tag{3.52}$$

Ceci achève la démonstration. ∎

Remarque 3.4. La symétrie de la matrice B n'intervient pas pour l'homogénéisation du problème adjoint. Mais cette hypothèse sera nécessaire pour l'étude du contrôle optimal qui fera l'objet du paragraphe 5. □

4 – Propriétés de $B^\sharp$

Nous allons à présent donner un résultat concernant l'ellipticité et la symétrie du tenseur $B^\sharp$.

Théorème 4.1. *Soit $B^\sharp$ défini par* (3.52). *On suppose que B est symétrique. Alors $B^\sharp$ est elliptique et symétrique.*

Démonstration: Pour démontrer ce théorème, on va s'inspirer des méthodes utilisées dans [3] et dans [9] en les adaptant à notre problème. On introduit la fonction Y-périodique χ^k définie par

$$\chi^k = -\omega^k + y_k \ . \tag{4.1}$$

D'après (3.14), la fonction χ^k vérifie

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\Big(A\,\nabla(-\chi^k + y_k)\Big) = 0 & \text{dans } Y^\star \\ \displaystyle\int_{\partial T} A\,\nabla(-\chi^k + y_k).n \; d\sigma = 0 & \\ -\chi^k + y_k = \text{constante} & \text{sur } \partial T \\ \chi^k \ \ Y\text{-périodique} \ . & \end{cases} \tag{4.2}$$

Soit Y^k définie par

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\Big(B\,\nabla(-Y^k + y_k)\Big) = 0 & \text{dans } Y^\star \\ \displaystyle\int_{\partial T} B\,\nabla(-Y^k + y_k).n \; d\sigma = 0 & \\ -Y^k + y_k = \text{constante} & \text{sur } \partial T \\ Y^k \ \ Y\text{-périodique} \ . & \end{cases} \tag{4.3}$$

De même en utilisant (4.1), le problème (3.15) s'écrit

$$\begin{cases} \operatorname{div}\Big({}^tA\,\nabla\psi^k + {}^tB\,\nabla(-\chi^k + y_k)\Big) = 0 & \text{dans } Y^\star \\ \displaystyle\int_{\partial T} \Big({}^tA\,\nabla\psi^k + {}^tB\,\nabla(-\chi^k + y_k)\Big).n \; d\sigma = 0 & \\ \psi^k = \text{constante} & \text{sur } \partial T \\ \psi^k \ \ Y\text{-périodique} \ . & \end{cases} \tag{4.4}$$

En écrivant à l'aide des composantes l'expression de $B^\sharp$ obtenue en (3.52), on a

$$b^\sharp_{ki} = \frac{1}{|Y|} \int_Y Q\Big(a_{ji}\,\frac{\partial \psi^k}{\partial y_j} + b_{ji}\,\frac{\partial(-\chi^k + y_k)}{\partial y_j}\Big)\, dy \ . \tag{4.5}$$

On va montrer qu'en fait, ces coefficients ne dépendent pas de l'opérateur de prolongement Q. Par définition de Q, on a

$$b^\sharp_{ki} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^\star} \Big(a_{ji}\,\frac{\partial \psi^k}{\partial y_j} + b_{ji}\,\frac{\partial(-\chi^k + y_k)}{\partial y_j}\Big)\, dy + \frac{1}{|Y|}\int_T (Qb_k)_i \; dy \ , \tag{4.6}$$

où

$$b_k \;=\; {}^tA\,\nabla\psi^k + {}^tB\,\nabla(-\chi^k + y_k)\;. \tag{4.7}$$

Exprimons d'une autre manière la deuxième intégrale de (4.6) en usant d'une intégrations par parties.

$$\begin{aligned}\int_T (Qb_k)_i\; dy \;&=\; \int_T (Qb_k)_\ell\, \frac{\partial y_i}{\partial y_\ell}\; dy \\ &= -\int_T \operatorname{div}(Qb_k)\, y_i\; dy \;+\; \int_{\partial T} (Qb_k).n_1\, y_i\; dy\;,\end{aligned}$$

où n_1 est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de T.

Comme $-\operatorname{div}(Qb_k) = 0$ dans Y et $(Qb_k).n_1 = -b_k.n$ par définition de Q (avec n la normale unitaire dirigée vers l'exterieur de $Y^\star$), alors

$$\int_T (Qb_k)_i\; dy \;=\; -\int_{\partial T} b_k.n\; y_i\; dy\;. \tag{4.8}$$

Par conséquent, (4.5) s'écrit

$$b^\sharp_{ki} \;=\; \frac{1}{|Y|}\left[\int_{Y^\star}\Big(a_{ji}\,\frac{\partial\psi^k}{\partial y_j} + b_{ji}\,\frac{\partial(-\chi^k+y_k)}{\partial y_j}\Big)\; dy \;-\; \int_{\partial T} b_k.n\; y_i\; d\sigma\right]. \tag{4.9}$$

D'après l'expression ci-dessus, les coefficients $b^\sharp_{ki}$ sont indépendants de l'opérateur de prolongement choisi.

Nous allons à présent exprimer ces coefficients sous une autre forme pour établir les propriétés de symétrie et d'ellipticité. Pour ce faire, introduisons Y^k solution de (4.3) dans (4.9), on obtient

$$\begin{aligned} b^\sharp_{ki} \;=\; \frac{1}{|Y|}\Bigg[&\int_{Y^\star} b_{ji}\,\frac{\partial(-Y^k+y_k)}{\partial y_j}\; dy \;-\; \int_{\partial T} b_k.n\; y_i\; d\sigma \\ &+ \int_{Y^\star}\Big(a_{ji}\,\frac{\partial\psi^k}{\partial y_j} - b_{ji}\,\frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\Big)\; dy\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dans l'expression ci-dessus, on évalue la première partie de la troisième intégrale du membre de droite de (4.10) de la manière suivante

$$\begin{aligned}\int_{Y^\star} a_{ji}\,\frac{\partial\psi^k}{\partial y_j}\; dy \;&=\; \int_{Y^\star} a_{j\ell}\,\frac{\partial\psi^k}{\partial y_j}\;\delta_{i\ell}\; dy \\ &= \int_{Y^\star} a_{j\ell}\,\frac{\partial\psi^k}{\partial y_j}\;\frac{\partial y^i}{\partial y_\ell}\; dy\;.\end{aligned}$$

Nous allons à présent effectuer plusieurs intégrations par parties. Il apparaitera donc des intégrales sur $\partial Y^\star = \partial Y \cup \partial T$. Concernant les intégrales sur ∂Y, elles seront toutes nulles car on intégre des fonctions Y-périodiques. Il nous restera donc que des intégrales sur $Y^\star$ et sur ∂T qu'on évaluera.

En utilisant successivement (4.2), (4.4) et (4.3) dans l'expression ci-dessus, on obtient

$$\int_{Y^\star} a_{j\ell}\,\frac{\partial \psi^k}{\partial y_j}\,\frac{\partial y^i}{\partial y_\ell}\,dy \;=\; \int_{Y^\star} a_{j\ell}\,\frac{\partial \psi^k}{\partial y_j}\,\frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell}\,dy \;+\; \int_{\partial T} a_{j\ell}\,\frac{\partial(-\chi^i+y_i)}{\partial y_\ell}\,n_j\;\psi^k\,d\sigma \;=$$

$$= \int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi^k-y_k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell}\,dy \;+\; \int_{\partial T} b_k.n\,\chi^i\,d\sigma \;+\; \int_{\partial T} a_{j\ell}\,\frac{\partial(-\chi^i+y_i)}{\partial y_\ell}\,n_j\;\psi^k\,d\sigma$$

$$\begin{aligned} &= \int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell}\,dy \;-\; \int_{\partial T} b_{j\ell}\,\frac{\partial(-Y^k+y_k)}{\partial y_j}\,n_\ell\;\chi^i\,d\sigma \\ &\quad + \int_{\partial T} b_k.n\;\chi^i\,d\sigma \;+\; \int_{\partial T} a_{j\ell}\,\frac{\partial(-\chi^i+y_i)}{\partial y_\ell}\,n_j\;\psi^k\,d\sigma\;. \end{aligned}$$

La première intégrale de la dernière égalité ci-dessus s'évalue comme suit,

$$\begin{aligned} &\int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell}\,dy \;= \\ &\qquad = \int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial(\chi^i-Y^i)}{\partial y_\ell}\,dy \;+\; \int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial Y^i}{\partial y_\ell}\,dy \\ &\qquad = \int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial(\chi^i-Y^i)}{\partial y_\ell}\,dy \;+\; \int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial y_i}{\partial y_\ell}\,dy \\ &\qquad\quad - \int_{\partial T} b_{j\ell}\,\frac{\partial(-Y^i+y_i)}{\partial y_\ell} n_j\;(\chi^k-Y^k)\,d\sigma \qquad \text{(en utilisant (4.3))}\;. \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{\partial y_i}{\partial y_\ell} = \delta_{ij}$, il en découle

$$\begin{aligned} &\int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell}\,dy \;= \\ &\qquad = \int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial(\chi^i-Y^i)}{\partial y_\ell}\,dy \;+\; \int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial Y^i}{\partial y_\ell}\,dy \\ &\qquad = \int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial(\chi^i-Y^i)}{\partial y_\ell}\,dy \;+\; \int_{Y^\star} b_{ji}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\,dy \\ &\qquad\quad - \int_{\partial T} b_{j\ell}\,\frac{\partial(-Y^i+y_i)}{\partial y_\ell}\,n_j\,(\chi^k-Y^k)\,d\sigma\;. \end{aligned}$$

Par conséquent, la troisième intégrale du membre de droite de (4.10) est de la forme

$$\int_{Y^\star}\Big(a_{ji}\,\frac{\partial\psi^k}{\partial y_j}-b_{ji}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\Big)\,dy\ =$$

$$= \int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial(\chi^i-Y^i)}{\partial y_\ell}\,dy\ -\int_{\partial T} b_{j\ell}\,\frac{\partial(-Y^i+y_i)}{\partial y_\ell}\,n_j\,(\chi^k-Y^k)\,d\sigma$$
$$-\int_{\partial T} b_{j\ell}\,\frac{\partial(-Y^k+y_k)}{\partial y_j}\,n_\ell\,\chi^i\,d\sigma\ +\int_{\partial T} b_k.n\,\chi^i\,d\sigma\ +\int_{\partial T} a_{j\ell}\,\frac{\partial(-\chi^i+y_i)}{\partial y_\ell}\,n_j\,\psi^k\,d\sigma\,.$$

Regardons à présent la première intégrale de (4.10). En multipliant la première équation de (4.3) par Y^i, on obtient

$$\int_{Y^\star} b_{ji}\,\frac{\partial(-Y^k+y_k)}{\partial y_j}\,dy\ =\int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(Y^k-y_k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial(Y^i-y_i)}{\partial y_\ell}\,dy$$
$$+\int_{\partial T} b_{j\ell}\,\frac{\partial(-Y^k+y_k)}{\partial y_j}\,n_\ell\,Y^i\,d\sigma\ .$$

On a utilisé le fait que les Y^i sont périodiques dans $Y^\star$ (i.e.: ils prennent la même valeur sur les côtés opposés de Y), par conséquent les intégrales sur le bord de Y sont nulles.

En additionnant les deux expressions obtenues ci-dessus et en utilisant la définition (4.10), on aboutit à

$$b^\sharp_{ki}\ =\ \frac{1}{|Y|}\Bigg[\int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi^k-Y^k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial(\chi^i-Y^i)}{\partial y_\ell}\,dy\ +\int_{Y^\star} b_{j\ell}\,\frac{\partial(Y^k-y_k)}{\partial y_j}\,\frac{\partial(Y^i-y_i)}{\partial y_\ell}\,dy$$
$$-\int_{\partial T} b_{j\ell}\,\frac{\partial(-Y^i+y_i)}{\partial y_\ell}\,n_j\,(\chi^k-Y^k)\,d\sigma\ +\int_{\partial T} a_{j\ell}\,\frac{\partial(-\chi^i+y_i)}{\partial y_\ell}\,n_j\,\psi^k\,d\sigma$$
$$-\int_{\partial T} b_{j\ell}\,\frac{\partial(-Y^k+y_k)}{\partial y_j}\,n_\ell\,(\chi^i-Y^i)\,d\sigma\ -\int_{\partial T} b_k.n\,(-\chi^i+y_i)\,d\sigma\Bigg].$$

Maintenant nous allons montrer qu'en fait, les intégrales sur le bord de T sont nulles. En effet, d'après (4.2), on a d'une part $-\chi^i+y_i=$ constante sur ∂T, d'autre part en utilisant (4.3), on a $-Y^i+y_i=$ constante sur ∂T (les constantes ne sont pas forcément les mêmes). Par conséquent, $\chi^i-Y^i=(-Y^i+y_i)-(-\chi^i+y_i)$ est aussi constante sur le bord de T. De même par (4.4), ψ^k est constante sur ∂T.

Les coefficients $b^\sharp_{ki}$ s'écrivent donc comme suit

$$\begin{aligned} b^\sharp_{ki} = \frac{1}{|Y|} \Bigg[& \int_{Y^\star} b_{j\ell} \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j} \frac{\partial(\chi^i - Y^i)}{\partial y_\ell}\, dy + \int_{Y^\star} b_{j\ell} \frac{\partial(Y^k - y_k)}{\partial y_j} \frac{\partial(Y^i - y_i)}{\partial y_\ell}\, dy \\ & - (\chi^k - Y^k)|_{\partial T} \int_{\partial T} b_{j\ell} \frac{\partial(-Y^i + y_i)}{\partial y_\ell} n_j\, d\sigma + \psi^k|_{\partial T} \int_{\partial T} a_{j\ell} \frac{\partial(-\chi^i + y_i)}{\partial y_\ell} n_j\, d\sigma \\ & - (\chi^i - Y^i)|_{\partial T} \int_{\partial T} b_{j\ell} \frac{\partial(-Y^k + y_k)}{\partial y_j} n_l\, d\sigma - (-\chi^i + y_i)|_{\partial T} \int_{\partial T} b_k.n\, d\sigma \Bigg]. \end{aligned}$$

Or d'après (4.2), on a $\int_{\partial T} A\, \nabla(-\chi^k + y_k).n\, d\sigma = 0$, donc la quatrième intégrale de l'égalité ci-dessus est nulle.

D'autre part d'après (4.3), on a $\int_{\partial T} B\, \nabla(-Y^k + y_k).n\, d\sigma = 0 \quad \forall\, k = 1, .., n$.

Ceci entraine que la troisième et la cinquième intégrale sont nulles. De même, en utilisant (4.4) et (4.7), on a $\int_{\partial T} (b_k).n\, d\sigma = 0$.

Finalement les coefficients de la matrice $B^\sharp$ sont donnés par

$$\begin{aligned} b^\sharp_{ki} = \frac{1}{|Y|} \Bigg[& \int_{Y^\star} b_{j\ell} \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j} \frac{\partial(\chi^i - Y^i)}{\partial y_\ell}\, dy \\ & + \int_{Y^\star} b_{j\ell} \frac{\partial(Y^k - y_k)}{\partial y_j} \frac{\partial(Y^i - y_i)}{\partial y_\ell}\, dy \Bigg]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

De part la forme de ces coefficients, la matrice $B^\sharp$ est à la fois elliptique et symétrique. ∎

5 – Contrôle optimal

On définit χ_ε la fonction caractéristique de Ω_ε par

$$\chi_\varepsilon = \chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_\varepsilon \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \backslash \Omega_\varepsilon\,. \end{cases}$$

On a $\chi_\varepsilon \rightharpoonup \chi_0$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible $\star$ où $\chi_0 = \frac{|Y^\star|}{|Y|}$.

On considère le problème de contrôle optimal (1.2)–(1.4) où l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}^\varepsilon_{\rm ad} \subset L^2(\Omega_\varepsilon)$ est défini par l'un des convexes fermés suivant (voir [4] et [7]):

$$\mathcal{U}^\varepsilon_{\rm ad} = L^2(\Omega_\varepsilon) \tag{5.1}$$

(5.2) $$\mathcal{U}_{\rm ad}^{\varepsilon} = \Big\{\theta \in L^2(\Omega_\varepsilon) \mid \ \widetilde{\theta} \geq \chi_\varepsilon \psi \ \text{pp} \ \ \text{dans } \Omega\Big\}$$

(5.3) $$\mathcal{U}_{\rm ad}^{\varepsilon} = \Big\{\theta \in L^2(\Omega_\varepsilon) \mid \ \chi_\varepsilon \psi_1 \leq \widetilde{\theta} \leq \chi_\varepsilon \psi_2 \ \text{pp} \ \ \text{dans } \Omega\Big\}$$

où ψ, ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions de $L^2(\Omega)$.

Par définition du contrôle optimal $\theta_\varepsilon^\star$, on a

(5.4) $$\frac{N}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} (\theta_\varepsilon^\star)^2\,dx \ \leq \ J_\varepsilon(\theta_\varepsilon^\star) \ \leq \ J_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) \ ,$$

pour les différents choix de $\Theta_\varepsilon \in \mathcal{U}_{\rm ad}^{\varepsilon} \subset L^2(\Omega_\varepsilon)$ qui suivent

(5.5) $$\Theta_\varepsilon = \begin{cases} \chi_\varepsilon & \text{dans le cas (5.1)} \\ \chi_\varepsilon \psi & \text{dans le cas (5.2)} \\ \chi_\varepsilon \psi_2 & \text{dans le cas (5.3)} \ . \end{cases}$$

Nous allons à présent caractériser le problème vérifié par la limite $\theta_0^\star$ du contrôle optimal et montrer qu'en fait cette limite est aussi un contrôle optimal associé à un problème et à une fonction coût que l'on explicitera par la suite.

Pour cela on suit la démarche de [4] ou [8], on définit les ensembles $\mathcal{U}_{\rm ad} \subset L^2(\Omega)$ par

(5.6) $$\mathcal{U}_{\rm ad} = L^2(\Omega)$$

(5.7) $$\mathcal{U}_{\rm ad} = \Big\{\theta \in L^2(\Omega) \mid \ \theta \geq \chi_0 \psi \ \text{pp} \ \ \text{dans } \Omega\Big\}$$

(5.8) $$\mathcal{U}_{\rm ad} = \Big\{\theta \in L^2(\Omega) \mid \chi_0 \psi_1 \leq \theta \leq \chi_0 \psi_2 \ \text{pp} \ \ \text{dans } \Omega\Big\}$$

correspondant respectivement aux cas (5.1), (5.2) et (5.3).

Lemme 5.1. *Dans chacun des trois cas (5.1)–(5.3), on a que le contrôle optimal $\theta_\varepsilon^\star$ vérifie (par extraction de sous-suites): il existe $\theta_0^\star \in \mathcal{U}_{\rm ad}$ (défini par (5.6)–(5.8)) tel que*

(5.9) $$\widetilde{\theta_\varepsilon^\star} \rightharpoonup \theta_0^\star \quad \textit{dans} \ \ L^2(\Omega) \ \textit{faible} \ .$$

Démonstration: Dans chacun des trois cas numérés dans (5.5), la norme $\|u_\varepsilon\|_{V_\varepsilon}$ de la solution $u_\varepsilon \in V_\varepsilon$ de l'équation d'état (3.1) où l'on a remplacé θ_ε par Θ_ε, est borné indépendamment de ε et comme $B_\varepsilon \in \mathcal{M}(\beta_m, \beta_M)$, il en découle que $J_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)$ est uniformément bornée Par conséquent en utilisant l'inégalité (5.4), on a $\widetilde{\theta_\varepsilon^\star}$ est une suite bornée dans $L^2(\Omega)$ et donc il existe une sous-suite qui converge faiblement vers $\theta_0^\star$ dans $L^2(\Omega)$ faible.

D'après la définition de $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$, il est clair que si $\theta \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$ alors $\frac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta \in \mathcal{U}^\varepsilon_{\mathrm{ad}}$. Comme $\widetilde{\theta^\star_\varepsilon} \rightharpoonup \theta^\star_0$ dans $L^2(\Omega)$ faible, on a $\theta^\star_0 \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$. Ceci termine la démonstration. ∎

Enonçons le théorème suivant qui nous donne un résultat de convergence du contrôle optimal

Théorème 5.2. *Pour $\theta \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$ fixé, on considère $u \in H^1_0(\Omega)$ solution de (3.21). Soit J_0 la fonction coût définie par*

$$J_0(\theta) = \frac{1}{2}\int_\Omega B^\sharp \, \nabla u . \nabla u \; dx + \frac{N}{2}\int_\Omega \frac{\theta^2}{\chi_0} \; dx \; . \tag{5.10}$$

Alors $\theta^\star_0$ satisfait la condition d'optimalité

$$\theta^\star_0 \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}} \quad \textit{et} \quad J_0(\theta^\star_0) = \min_{\theta \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}} J_0(\theta) \; . \tag{5.11}$$

De plus, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(\theta^\star_\varepsilon) = J_0(\theta^\star_0) \; . \tag{5.12}$$

Démonstration:

Première étape

D'après le Lemme 5.1, on a $\theta^\star_0 \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$. Soit $u^\star_\varepsilon$ l'état optimal associé au contrôle optimal (solution du problème (1.2) avec $\theta_\varepsilon = \theta^\star_\varepsilon$ dans le membre de droite de l'équation d'état). En utilisant le fait que $\|\widetilde{\theta^\star_\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ est bornée, on a $\|\nabla P_\varepsilon u^\star_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ est bornée et donc par l'inégalité de Poincaré $\|P_\varepsilon u^\star_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ est bornée. Par conséquent $\|P_\varepsilon u^\star_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ est bornée , il en résulte (par extraction de sous-suites)

$$P_\varepsilon u^\star_\varepsilon \rightharpoonup u^\star \quad \text{dans} \;\; H^1_0(\Omega) \text{ faible} \; , \tag{5.13}$$

où $u^\star$ est solution de (3.21) avec $\theta = \theta^\star_0$ dans le membre de droite de l'équation d'état.

Deuxième étape

Soit $w_\varepsilon \in H^1_0(\Omega_\varepsilon)$ solution du problème (1.2) avec $\dfrac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta$ comme contrôle

$(\theta \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}})$, c'est à dire:

$$(5.14)\qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) \;=\; f + \dfrac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\,\theta & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ w_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ w_\varepsilon = \text{constante} & \text{sur } \partial T_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon . n_\varepsilon \;=\; \int_{T_\varepsilon} f\,dx\ . & \end{cases}$$

Comme $\dfrac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta \rightharpoonup \theta$ dans $L^2(\Omega)$ faible, on a

$$(5.15)\qquad P_\varepsilon w_\varepsilon \rightharpoonup w \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}\ .$$

où w est solution de

$$(5.16)\qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(A_0 \nabla w) = f + \theta & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(voir Théorème 3.2).

Troisième étape

Donnons à présent un résultat de convergence de l'énergie.

Soit $q_\varepsilon \in V_\varepsilon$ solution du problème

$$(5.17)\qquad \begin{cases} \operatorname{div}({}^tA_\varepsilon \nabla q_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) \;=\; 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ q_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ q_\varepsilon = \text{constante} & \text{sur } \partial T_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} ({}^tA_\varepsilon \nabla q_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon).n_\varepsilon\,ds \;=\; 0\ . & \end{cases}$$

Alors (d'après le Théorème 3.2)

$$(5.18)\qquad (P_\varepsilon w_\varepsilon, P_\varepsilon q_\varepsilon) \rightharpoonup (w,q) \quad \text{dans } (H_0^1(\Omega))^2 \text{ faible}\ ,$$

où (w,q) est solution de

$$(5.19)\qquad \begin{cases} -\operatorname{div}({}^tA_0 \nabla q - B^\sharp\, \nabla w) \;=\; 0 & \text{dans } \Omega \\ q = 0 & \text{sur } \partial\Omega\ . \end{cases}$$

Comme,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \,.\nabla w_\varepsilon \; dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} {}^t\!A_\varepsilon \nabla q_\varepsilon \,.\nabla w_\varepsilon \; dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} ({}^t\!A_\varepsilon \nabla q_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon)\,.\, n_\varepsilon w_\varepsilon \; dx \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla q_\varepsilon \,.\, (A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) \; dx - \int_{\partial\Omega} ({}^t\!A_\varepsilon \nabla q_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon)\,.\, n_\varepsilon w_\varepsilon \; ds \\
&\quad + w_\varepsilon|_{\partial T_\varepsilon} \int_{\partial T_\varepsilon} ({}^t\!A_\varepsilon \nabla q_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon)\,.\, n_\varepsilon \; ds \;,
\end{aligned} \tag{5.20}
$$

et $w_\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} ({}^t\!A_\varepsilon \nabla q_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon).n_\varepsilon \; ds = 0$. Par conséquent en intégrant par parties, on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon .\; \nabla w_\varepsilon \; dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla q_\varepsilon .(A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) \; dx \\
&= -\int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon)\, q_\varepsilon \; dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon).n_\varepsilon q_\varepsilon \; ds \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \Big(f + \frac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\,\theta\Big) q_\varepsilon \; dx + \int_{\partial\Omega} (A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon).n_\varepsilon q_\varepsilon \; ds \\
&\quad + q_\varepsilon|_{\partial T_\varepsilon} \int_{\partial T_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon .n_\varepsilon \; ds \;.
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

Comme $q_\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon .n_\varepsilon \, ds = \int_{T_\varepsilon} f \, dx$, on a

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \, \nabla w_\varepsilon \; dx &= -\int_{\Omega_\varepsilon} \Big(f + \frac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\,\theta\Big)\, q_\varepsilon \; dx + q_\varepsilon|_{\partial T_\varepsilon} \int_{T_\varepsilon} f \, dx \\
&= \int_{\Omega} \Big(f + \frac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\,\theta\Big)\, q_\varepsilon \; dx \;.
\end{aligned} \tag{5.22}
$$

Le membre de droite de l'égalité ci-dessus passe à la limite, par conséquent le membre de gauche admet la même limite. Il en résulte,

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \,.\nabla w_\varepsilon \; dx = \int_{\Omega} (f + \theta)\, q \; dx \;. \tag{5.23}
$$

Or par les résultats d'homogénéisation établis en (5.16) et les conditions nulles sur le bord de Ω de q et de w, on a

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} (f + \theta)\, q \; dx &= -\int_{\Omega} \operatorname{div}(A_0 \nabla w)\, q \; dx \\
&= -\int_{\Omega} w \; \operatorname{div}({}^t\!A_0 \nabla q) \; dx \\
&= -\int_{\Omega} w \; \operatorname{div}(B^\sharp \, \nabla w) \; dx \\
&= \int_{\Omega} B^\sharp \, \nabla w \,.\nabla w \; dx \;.
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

Finalement en comparant (5.23) et (5.24), on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon . \nabla w_\varepsilon \, dx \;\rightarrow\; \int_\Omega B^\sharp \, \nabla w . \nabla w \, dx \;. \tag{5.25}$$

Et comme $\dfrac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta \rightharpoonup \theta$ dans $L^2(\Omega)$ faible, et $\chi_\varepsilon^2 = \chi_\varepsilon$ dans Ω, on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\chi_\varepsilon \, \theta}{\chi_0}\right)^2 dx \;\rightarrow\; \int_\Omega \frac{\theta^2}{\chi_0} \, dx \;. \tag{5.26}$$

Par conséquent, en utilisant (5.25) et (5.26), on obtient

$$J_\varepsilon\left(\frac{\chi_\varepsilon \, \theta}{\chi_0}\right) \;\rightarrow\; J_0(\theta) \;. \tag{5.27}$$

De la même manière, en prenant $\theta_\varepsilon = \theta_\varepsilon^\star$ dans (3.1), on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla u_\varepsilon^\star . \nabla u_\varepsilon^\star \, dx \;\rightarrow\; \int_\Omega B^\sharp \, \nabla u^\star . \nabla u^\star \, dx \;. \tag{5.28}$$

Quatrième étape

En passant à la limite dans l'inégalité

$$\forall\, \theta \in \mathcal{U}_{\rm ad} \qquad J_\varepsilon\left(\frac{\chi_\varepsilon \theta}{\chi_0}\right) \geq J_\varepsilon(\theta_\varepsilon^\star) \;, \tag{5.29}$$

et en utilisant le Lemme 5.1, on obtient

$$J_0(\theta) \;\geq\; \frac{1}{2} \int_\Omega B^\sharp \, \nabla u^\star . \nabla u^\star \, dx \,+\, \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{N}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} (\theta_\varepsilon^\star)^2 \, dx \;. \tag{5.30}$$

En prenant en particulier $\theta = \theta^\star$ dans l'inégalité ci-dessus, on a

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} (\theta_\varepsilon^\star)^2 \, dx \;\leq\; \int_\Omega \frac{(\theta_0^\star)^2}{\chi_0} \, dx \;. \tag{5.31}$$

Enonçons le résultat suivant démontré dans [4]:

Proposition 5.3 (Kesavan et Saint Jean Paulin). *Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *Soit* $\widetilde{\theta_\varepsilon} \rightharpoonup \theta_0$ *dans* $L^p(\Omega)$ *faible. Alors*

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} (\theta_\varepsilon)^p \, dx \;\geq\; \int_\Omega \frac{(\theta_0)^p}{{\chi_0}^{p-1}} \, dx \;. \;\blacksquare \tag{5.32}$$

On déduit de la proposition 5.3 et du lemme 5.1 que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} (\theta_\varepsilon^\star)^2 \, dx \;\geq \int_\Omega \frac{(\theta_0^\star)^2}{\chi_0} \, dx \; . \tag{5.33}$$

Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} (\theta_\varepsilon^\star)^2 \, dx \;= \int_\Omega \frac{(\theta_0^\star)^2}{\chi_0} \, dx \; . \tag{5.34}$$

On en déduit (5.12). De (5.30) et (5.34), on obtient (5.11). Ceci achève la démonstration. ∎

6 – Cas unidimensionnel

Nous allons à présent étudier le cas $n = 1$. Dans ce cas, il n'est plus question de torsion élastique vu que cela n'a plus de sens. En fait, on va se placer dans le cadre mathématique de la torsion (mêmes équations) pour appliquer les résultats obtenus. On va donc utiliser les équations données par (1.2). Dans $\mathbb{R}$, ces équations modélisent un problème en électrostatique:

On considère un certain nombre de conducteurs répartis dans une région donnée de $\mathbb{R}$. On s'intéresse au contrôle optimal d'un problème où la solution correspond au potentiel électrostatique à l'extérieur des conducteurs induit par une densité de charge volumique donnée.

Soit $\Omega = \,]a,b[$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$. On suppose que les conducteurs sont répartis périodiquement (de période εY) où $Y = \,]0,1[$ est la cellule de base.

Soit $T = [c,d]$ (avec $0 \leq c \leq d \leq 1$), la partie de la cellule de base Y correspondant aux conducteurs et on définit $Y^\star$ par $Y^\star = Y \backslash T$ la partie de Y non conductrice.

Soit c_ε^i, d_ε^i définit par $c_\varepsilon^i = \varepsilon(c+i)$ et $d_\varepsilon^i = \varepsilon(d+i)$ avec $i \in \mathbb{Z}$. On définit T_ε l'ensemble des conducteurs par $T_\varepsilon = \left\{ \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} [c_\varepsilon^i, d_\varepsilon^i] \right\} \cap \,]a,b[$ et on pose $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash T_\varepsilon$. Le bord de T_ε est donné par $\partial T_\varepsilon = \left\{ \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \{c_\varepsilon^i, d_\varepsilon^i\} \right\} \cap \,]a,b[$.

On se donne une distribution de charge de densité volumique $\frac{1}{4\pi}(\hat{f} + \hat{\theta}_\varepsilon) = f + \theta_\varepsilon$.

Alors le potentiel éléctrostatique u_ε, induit par cette distribution de charge est solution de

$$
(6.1)\qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(a_\varepsilon \dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right) = f + \theta_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(c^i_\varepsilon) = u_\varepsilon(d^i_\varepsilon) & \forall\, i \in \mathbb{Z} \\ u_\varepsilon(a) = u_\varepsilon(b) = 0 & \\ \left(a_\varepsilon \dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right)(c^i_\varepsilon) = \left(a_\varepsilon \dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right)(d^i_\varepsilon) & \forall\, i \in \mathbb{Z} \end{cases}
$$

où $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$.

Enonçons un résultat de convergence:

Théorème 6.1. *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $\theta_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ tel que $\widetilde{\theta}_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. Soit $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$ et $b_\varepsilon(x) = b(x/\varepsilon)$ tels que $0 \le \alpha_m \le a_\varepsilon \le \alpha_M$ et $0 \le \beta_m \le b_\varepsilon \le \beta_M$. Soit u_ε et p_ε, solutions du problème*

$$
(6.2)\qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(a_\varepsilon \dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right) = f + \theta_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \dfrac{d}{dx}\left(a_\varepsilon \dfrac{dp_\varepsilon}{dx} - b_\varepsilon \dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \left(a_\varepsilon \dfrac{d}{dx} p_\varepsilon - b_\varepsilon \dfrac{d}{dx} u_\varepsilon\right)(c^i_\varepsilon) = \left(a_\varepsilon \dfrac{d}{dx} p_\varepsilon - b_\varepsilon \dfrac{d}{dx} u_\varepsilon\right)(d^i_\varepsilon) & \forall\, i \in \mathbb{Z} \\ \left(a_\varepsilon \dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right)(c^i_\varepsilon) = \left(a_\varepsilon \dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right)(d^i_\varepsilon) & \forall\, i \in \mathbb{Z} \\ u_\varepsilon(c^i_\varepsilon) = u_\varepsilon(d^i_\varepsilon)\,, \quad p_\varepsilon(c^i_\varepsilon) = p_\varepsilon(d^i_\varepsilon) & \forall\, i \in \mathbb{Z} \\ u_\varepsilon(a) = u_\varepsilon(b) = p_\varepsilon(a) = p_\varepsilon(b) = 0\,. & \end{cases}
$$

Alors il existe a_0 et $b^\sharp$ et des fonctions $\theta \in L^2(\Omega)$, $u, p \in H^1_0(\Omega)$ tels que (par extraction de sous-suites)

$$
(6.3)\qquad \begin{cases} \widetilde{\theta}_\varepsilon \rightharpoonup \theta & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u & \text{dans } H^1_0(\Omega) \text{ faible} \\ P_\varepsilon p_\varepsilon \rightharpoonup v & \text{dans } H^1_0(\Omega) \text{ faible}\,, \end{cases}
$$

où P_ε est l'opérateur de prolongement défini au Lemme 2.1.

Le couple (u,p) est solution de

$$
(6.4)\qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(a_0\,\dfrac{du}{dx}\Big) \;=\; f+\theta & \text{dans } (a,b) \\ \dfrac{d}{dx}\Big(a_0\,\dfrac{dp}{dx} - b^\sharp\,\dfrac{du}{dx}\Big) \;=\; 0 & \text{dans } (a,b) \\ u(a) = u(b) = p(a) = p(b) = 0\;. \end{cases}
$$

où a_0 est le coefficient homogénéisé donnée par (6.16) et $b^\sharp$ est un scalaire dont l'expression est donnée par (6.26).

Démonstration: Ce théorème est un cas particulier du Théorème 3.2. Il n'y a donc rien à montrer. Mais nous allons par contre donner les expressions de a_0 et de $b^\sharp$ de manière explicite.

i) Expression de a_0

D'après (3.22), le coefficient a_0 est donné par

$$
(6.5)\qquad a_0 \;=\; \frac{1}{|Y|}\int_Y Q\Big(a(y)\,\frac{d\omega}{dy}(y)\Big)\,dy\;.
$$

Les coefficients ne dépendent pas de l'opérateur de prolongement Q. En effet d'après la théorie classique de l'homogénéisation, cette opérateur disparait lorsque que l'on passe à l'écriture sous forme symétrique des coefficients homogénéisés (voir Cioranescu & Saint Jean Paulin [2]), l'expression (6.5) devient

$$
(6.6)\qquad a_0 \;=\; \frac{1}{|Y|}\int_{Y^\star} a(y)\,\frac{d\omega}{dy}(y)\,\frac{d\omega}{dy}(y)\;dy
$$

où la fonction ω vérifie

$$
(6.7)\qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dy}\Big(a(y)\,\dfrac{d\omega}{dy}\Big) \;=\; 0 \quad \text{dans } Y^\star \\ \Big(a\,\dfrac{d\omega}{dy}\Big)(c) = \Big(a\,\dfrac{d\omega}{dy}\Big)(d) \\ \omega(c) = \omega(d) \\ (\omega - y)\;\; Y\text{-périodique}\;. \end{cases}
$$

Intégrons le problème ci-dessus, la première équation de (6.7) nous donne

$$
(6.8)\qquad \Big(a\,\frac{d\omega}{dy}\Big)(y) \;=\; \begin{cases} k^+ & \text{sur } (0,c) \\ k^- & \text{sur } (d,1)\;, \end{cases}
$$

avec k^+ et k^- des constantes. Or $\left(a\,\dfrac{d\omega}{dy}\right)(c) = \left(a\,\dfrac{d\omega}{dy}\right)(d)$ donc $k^+ = k^- = k$.

On obtient par intégration

$$\omega(y) \;=\; k\,F(y) + \begin{cases} K^+ & \text{sur } \;(0,c) \\ K^- & \text{sur } \;(d,1)\;, \end{cases} \tag{6.9}$$

où F est une primitive de $\dfrac{1}{a(y)}$, i.e.:

$$\frac{dF}{dy}(y) = \frac{1}{a(y)} \;. \tag{6.10}$$

Maintenant, comme $(\omega - y)$ est Y-périodique, on a

$$\omega(0) = \omega(1) - 1 \;. \tag{6.11}$$

En utilisant (6.11) dans (6.9), on obtient d'une part la relation

$$K^+ - K^- \;=\; k\Big(F(1) - F(0)\Big) - 1 \;=\; k\,.\,m_Y\Big(\frac{1}{a}\Big) - 1 \;, \tag{6.12}$$

où $m_Y(h) = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_0^1 h(y)\,dy = \int_0^1 h(y)\,dy$.

D'autre part, puisque $\omega(c) = \omega(d)$, on aboutit à

$$K^+ - K^- \;=\; k\Big(F(d) - F(c)\Big) \;=\; k\,.\,|T|\,m_T\Big(\frac{1}{a}\Big) \;, \tag{6.13}$$

où $m_T(h) = \dfrac{1}{|T|}\displaystyle\int_c^d h(y)\,dy$.

Par conséquent, en utilisant (6.12) et (6.13), on obtient

$$k \;=\; \frac{1}{m_Y(\frac{1}{a}) - |T|\,.\,m_T(\frac{1}{a})} \;, \tag{6.14}$$

or après un calcul élémentaire, on a

$$k \;=\; \frac{1}{|Y^\star|\,.\,m_Y^\star(\frac{1}{a})} \;, \tag{6.15}$$

où $m_Y^\star(h) = \dfrac{1}{|Y^\star|}\left(\displaystyle\int_0^c h(y)\,dy + \int_d^1 h(y)\,dy\right)$.

En exprimant (6.6) à l'aide de k, on obtient

$$a_0 \;=\; \frac{k^2}{|Y|}\int_{Y^\star} \frac{1}{a(y)}\;dy \;. \tag{6.16}$$

Finalement, en utilisant (6.15) dans l'expression précédente, on aboutit à

(6.17) $$a_0 = \frac{1}{|Y^\star| \,.\, m_{Y^\star}(\frac{1}{a})} \quad .$$

ii) Expression de $b^\sharp$

On a d'après (3.52)

(6.18) $$b^\sharp = \frac{1}{|Y|} \int_Y Q\Big(a(y)\,\frac{d\psi}{dy} - b(y)\,\frac{d\omega}{dy}\Big)\, dy \ ,$$

En utilisant la forme symétrique de $b^\sharp$ donnée par (4.11), on a

(6.19) $$b^\sharp = \frac{1}{|Y|} \left[\int_{Y^\star} b(y)\, \frac{d(-Y+y)}{dy}\, \frac{d(-Y+y)}{dy}\, dy + \int_{Y^\star} b(y)\, \frac{d(\chi - Y)}{dy}\, \frac{d(\chi - Y)}{dy}\, dy \right] ,$$

où $\alpha = -Y + y$ satisfait

(6.20) $$\begin{cases} -\dfrac{d}{dy}\Big(b(y)\,\dfrac{d\alpha}{dy}\Big) = 0 \quad \text{dans } Y^\star \\ \Big(b\,\dfrac{d\alpha}{dy}\Big)(c) = \Big(b\,\dfrac{d\alpha}{dy}\Big)(d) \\ \alpha(c) = \alpha(d) \\ (\alpha - y) \ \ Y\text{-périodique} \ . \end{cases}$$

Le problème (6.20) est du même type que (6.7). Par conséquent les mêmes calculs d'intégration vont être menés pour déterminer α. On va donc obtenir pour la première intégrale du membre de droite de (6.19)

(6.21) $$\begin{aligned} \int_{Y^\star} b(y)\, \frac{d(-Y+y)}{dy}\, \frac{d(-Y+y)}{dy}\, dy &= \frac{|Y^\star| \ m_{Y^\star}(\frac{1}{b})}{\Big(m_Y(\frac{1}{b}) - |T|\, m_T(\frac{1}{b})\Big)^2} \\ &= \frac{1}{|Y^\star|\, m_Y^\star(\frac{1}{b})} \ . \end{aligned}$$

Concernant la deuxième intégrale du membre de droite de (6.19), comme $\omega = -\chi + y$ et $\alpha = -Y + y$, alors $\chi - Y = \alpha - \omega$ où ω est solution de (6.7) et α est solution de (6.20). Ceci implique que

(6.22) $$\begin{aligned} \frac{d(\chi - Y)}{dy} &= \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\omega}{dy} \\ &= \frac{k'}{b(y)} - \frac{k}{a(y)} \ , \end{aligned}$$

où k est donné par (6.14) et k' par

$$k' = \frac{1}{|Y^\star| \,.\, m^\star_Y(\frac{1}{b})} \,. \tag{6.23}$$

On obtient donc pour la deuxième intégrale,

$$\begin{aligned} &\int_{Y^\star} b(y)\, \frac{d(\chi - Y)}{dy}\, \frac{d(\chi - Y)}{dy}\, dy \;= \\ &\qquad = \int_{Y^\star} b(y) \Big(\frac{k'}{b(y)} - \frac{k}{a(y)} \Big)^2 dy \\ &\qquad = \;|Y^\star| \,\Big(k'^{\,2}\, m_{Y^\star}(1/b) + k^2\, m_{Y^\star}(b/a^2) - 2\,k\,k' m_{Y^\star}(1/a) \Big) \,. \end{aligned} \tag{6.24}$$

En utilisant les définitions (6.14) et (6.23) de k et de k', l'expression précédente devient

$$\int_{Y^\star} b(y)\, \frac{d(\chi - Y)}{dy}\, \frac{d(\chi - Y)}{dy}\, dy \;=\; \frac{|Y^\star| \,.\, m_{Y^\star}(b/a^2)}{Bigl(|Y^\star| \,.\, m^\star_Y(\frac{1}{a})\Big)^2} - \frac{1}{|Y^\star| \,.\, m^\star_Y(\frac{1}{b})} \,. \tag{6.25}$$

Finalement, en combinant (6.21) et (6.25), on aboutit à

$$b^\sharp \;=\; \frac{1}{|Y^\star|}\; \frac{m_{Y^\star}(b/a^2)}{m^\star_Y(\frac{1}{a})^2} \,. \;\blacksquare \tag{6.26}$$

Remarque 6.2. Kesavan et Saint Jean Paulin ont trouvé un résultat analogue à (6.26) dans les domaines non-perforés (voir [3]). ▫

REFERENCES

[1] Bensoussan, A.; Lions, J.L. and Papanicolaou, G. – *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.

[2] Cioranescu, D. and Saint Jean Paulin, J. – Homogenization in open sets with holes, *J. Math. Anal. Appl.,* 71 (1979), 590–607.

[3] Kesavan, S. and Saint Jean Paulin, J. – Homogenization of an optimal control problem, *SIAM J. Cont. Optim.,* 35 (1997), 1557–1573.

[4] Kesavan, S. and Saint Jean Paulin, J. – Optimal Control on Perforated Domains, *J. Math. Anal. Appl.,* 229(2) (1999), 563–586.

[5] Kesavan, S. and Vanninathan, M. – L'homogénéisation d'un problème de contrôle optimal, *C.R.A.S, Paris, Sér. A,* 285 (1977), 441–444.

[6] Lions, J.L. – *Sur Le Contrôle Optimal des Systèmes Gouvernés par Des Équations aux Dérivées Partielles*, Dunod, Paris, 1968.

[7] Murat, F. – Compacité par compensation, *Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa,* 5 (1978), 489–507.

[8] Saint Jean Paulin, J. and Zoubairi, H. – Optimal control and "strange term" for a Stokes problem in perforated domains, *Portugaliae Matematica,* 59(2) (2002), 161–178.

[9] Saint Jean Paulin, J. and Zoubairi, H. – Optimal control and homogenization in a mixture of fluids, *Ricerche di Matematica,* LI(1) (2002), 111–126.

J. Saint Jean Paulin et H. Zoubairi,
Département de Mathématiques, Université de Metz,
Ile du Saulcy F-57045, Metz – FRANCE
E-mail: `zoubairi@poncelet.univ-metz.fr`