Séminaires & Congrès
7, 2003, p. 1–43

COHOMOLOGIE ÉQUIVARIANTE ET THÉORÈME DE STOKES

par

Michèle Vergne
(rédigé par Sylvie Paycha)

Résumé. — Nous donnons une introduction à la cohomologie équivariante d'une variété. Dans le cas de l'action d'un cercle avec points fixes isolés, nous décrivons, après localisation, la cohomologie équivariante d'une variété en fonction des points fixes grâce à la formule de Paradan. Comme conséquence, nous redémontrons la formule de localisation d'Atiyah-Bott-Berline-Vergne.

***Abstract* (Equivariant cohomology and Stokes Theorem).** — In this text, we give an introduction to equivariant cohomology of a manifold. In the case of an S^1-action with isolated fixed points, we describe, after localization, the equivariant cohomology of a manifold in terms of fixed points with the help of Paradan's formula. As a consequence, we give a simple proof of the localization formula of Atiyah-Bott-Berline-Vergne.

1. Introduction

Commençons par l'exemple de l'action du cercle sur une sphère de rayon r. Soit

$$S_2(r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2\}.$$

Considérons la rotation autour de l'axe des z. La fonction hauteur correspondant à la coordonnée z reste invariante par cette action.

Soit u un nombre réel. Le changement de variable

$$\big(\varphi, r, z\big) \longmapsto \big(x = \sqrt{r^2-z^2}\,\cos\varphi,\ y = \sqrt{r^2-z^2}\,\sin\varphi,\ z\big)$$

permet de calculer

$$\int_{S_2(r)} e^{uz} d\sigma = (2\pi r)\Big(\frac{e^{ur}-e^{-ur}}{u}\Big)$$

où $d\sigma$ est la mesure de surface qui s'écrit $d\sigma = r d\varphi dz$.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 53D50, 55N91, 19L10.
Mots clefs. — Cohomologie, équivariant, points fixes, classe d'Euler.

© Séminaires et Congrès 7, SMF 2003

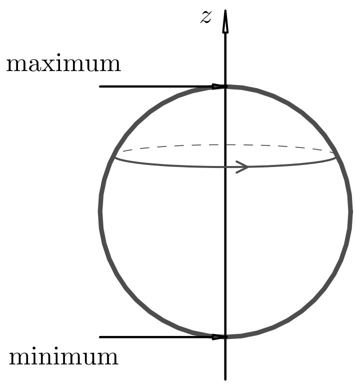

FIGURE 1

On remarque que $\lim_{u\to 0}\int_{S_2(r)} e^{uz}d\sigma = 4\pi r^2$ ce qui correspond à l'aire de $S_2(r)$. De plus $e^{\pm ur}$ correspondent aux extrema sur $S_2(r)$ de la fonction e^{uz}.

Cet exemple simple de calcul d'une intégrale illustre dans un cas très particulier la formule de la phase stationnaire exacte démontrée par Duistermaat et Heckman [**DH**]. Simultanément, Berline et Vergne [**BV**], Witten [**W1**] et Atiyah et Bott [**AB**] au début des années 80 ont expliqué cette formule de phase stationnaire exacte grâce à la cohomologie équivariante d'une variété.

Le calcul de Duistermaat-Heckman s'applique au cas de l'action du cercle sur une variété symplectique M compacte de dimension $n = 2\ell$, l'action étant supposée hamiltonienne, c'est à dire la forme symplectique est invariante par l'action du cercle et il existe une primitive f de la 1-forme ω définie par $\omega(\cdot) := \Omega(J,\cdot)$ si Ω désigne la forme symplectique, $-J$ le champ de vecteurs engendré par les rotations du cercle. On a alors, dans le cas où les points critiques de f sont isolés,

$$\int_M e^{uf}d\beta = (-2\pi)^\ell \sum_{\{p,\ \text{points critiques de } f\}} \frac{e^{uf(p)}}{u^\ell \det(\mathrm{Hess}_p f)^{1/2}}, \tag{1}$$

où $d\beta := \Omega^\ell/\ell!$ est la mesure de Liouville. On explicitera le calcul d'une racine carrée particulière de $\det(\mathrm{Hess}_p f)$ utilisant l'orientation canonique de T_pM.

Le volume symplectique de M (souvent difficile à calculer) s'obtient comme limite quand u tend vers 0 de cette intégrale.

Remarques

(1) Un autre cas important de la formule de la phase stationnaire exacte est le calcul de gaussiennes du type :

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-u(x_1^2+x_2^2)/2}dx_1dx_2 = \frac{2\pi}{u}.$$

(2) Le terme « exact » dans le nom de cette formule provient de l'absence de terme « d'erreur » auquel on pourrait « *a priori* » s'attendre dans le calcul de $\int_M e^{uf}\Omega^\ell/\ell!$ lorsque $u := it$ et t tend vers l'infini.

L'outil de la cohomologie équivariante introduit par N. Berline et M. Vergne et, indépendamment, par Witten, Atiyah et Bott s'est avéré très utile pour établir la formule de la phase stationnaire exacte et d'autres formules plus générales du même type. On peut déjà trouver l'idée de base de la cohomologie équivariante sous une forme algébrique dans des travaux de H. Cartan [**C**].

La cohomologie équivariante est une généralisation de la cohomologie de de Rham. Si l'on considère comme précédemment l'action d'un cercle sur la variété M, l'algèbre $\mathscr{A}(M)$ des formes différentielles sur M de la cohomologie de de Rham est remplacée par le produit tensoriel $\mathbb{C}[u]\otimes\mathscr{A}(M)^J$ de l'algèbre $\mathbb{C}[u]$ des polynômes en la variable u et de l'algèbre $\mathscr{A}(M)^J$ des formes invariantes par l'action du cercle engendrée par le champ de vecteurs $-J$, qui s'écrit aussi

$$\mathscr{A}(M)^J := \{\alpha\in\mathscr{A}(M) \mid \mathscr{L}(J)\alpha = 0\}$$

où $\mathscr{L}(J)$ est la dérivée de Lie dans la direction de J.

L'opérateur de différentiation $d:\mathscr{A}(M)\to\mathscr{A}(M)$ de la cohomologie de de Rham est remplacé par l'opérateur $D := d - u\,i(J) : \mathbb{C}[u]\otimes\mathscr{A}(M)^J \to \mathbb{C}[u]\otimes\mathscr{A}(M)^J$ où $i(J)$ désigne l'opérateur de contraction avec le champ de vecteurs J.

De même que la relation $d^2 = 0$ permet de définir la cohomologie de de Rham, la relation $D^2 = 0$ permet de définir une cohomologie appelée cohomologie équivariante de M (associée à l'action de S^1).

Si $u = 0$, on retrouve bien sûr la cohomologie de de Rham car le complexe des formes invariantes par le groupe compact S^1 a même cohomologie que le complexe de de Rham.

Le cours qui suit présentera un calcul explicite de la cohomologie équivariante dans le cas de l'action du cercle sur lui-même, puis du cercle sur $\mathbb{R}^2$ et enfin du cercle sur un espace vectoriel de dimension finie quelconque. Puis on démontrera la formule de localisation en cohomologie équivariante dans le cas de points fixes isolés, ainsi que le théorème de localisation de Borel.

On trouvera une introduction à la cohomologie équivariante dans [**BGV**, chap. 7], [**AB**], [**MQ**].

Le théorème de localisation (voir th. 7.11 dans [**BGV**]) permet d'exprimer l'intégrale d'une forme équivariante fermée $\alpha(u)\in\mathbb{C}[u]\otimes\mathscr{A}(M)^J$ sur une variété compacte orientée comme somme (finie) sur l'ensemble des zéros du champ J (pourvu que ceux-ci soient isolés) ou plus généralement (voir th. 7.13 dans [**BGV**]) comme intégrale de la restriction de $\alpha(u)$ à la variété des zéros du champ J. On considère donc une forme différentielle $\alpha(u) := \sum_k \alpha^{[k]}(u)$ *inhomogène*, dépendant polynomialement de u et

vérifiant l'équation
$$d\alpha(u) = u\, i(J)\alpha(u).$$
Le terme $\alpha^{[0]}(u)$ est une fonction sur M (dépendant polynomialement de u), tandis que le terme $\alpha^{[n]}(u)$ est une n-forme (dépendant polynomialement de u).

Dans le cas de zéros isolés, on a :
$$\int_M \alpha(u) = (-2\pi)^{n/2} \sum_{\{p\in M\,|\,J_p=0\}} \frac{i_p^*\alpha(u)}{u^{n/2}\det^{1/2}(\mathscr{L}(J)_p)}$$
où n est la dimension de M, $i_p^*\alpha(u) := \alpha^{[0]}(u)(p)$ est l'évaluation de la composante de degré zéro de $\alpha(u)$ en p, l'intégrale $\int_M \alpha(u)$ devant être comprise comme intégrale de la partie de degré extérieur maximal $\alpha^{[n]}(u)$ de $\alpha(u)$. L'action donnée par le crochet de Lie $\mathscr{L}(J)\xi := [J,\xi]$ sur les champs de vecteurs induit une transformation $\mathscr{L}(J)_p$ de T_pM en chaque point $p \in M$ où J s'annule. Le point p étant isolé, cette transformation est inversible. La transformation $\mathscr{L}(J)_p$, étant la dérivée de Lie d'une rotation, a des valeurs propres imaginaires. Ainsi la dimension de M est-elle paire et on l'écrira $n = 2\ell$. On peut représenter $\mathscr{L}(J)_p$ dans une base orientée de T_pM par la matrice
$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_1(p) \\ a_1(p) & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -a_\ell(p) \\ a_\ell(p) & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$
et définir la racine de son déterminant $\det^{1/2}(\mathscr{L}(J))_p := a_1(p)\cdots a_\ell(p)$ sans ambiguïté sur le signe de la racine, compte-tenu de l'orientation de la variété. Les nombres réels $a_i(p)$ sont tous non nuls. La formule de localisation s'écrit alors
$$\int_M \alpha(u) = \Big(\frac{-2\pi}{u}\Big)^{\ell} \sum_{\{p\in M\,|\,J_p=0\}} \frac{\alpha^{[0]}(u)(p)}{a_1(p)\cdots a_\ell(p)}.$$

On peut naturellement appliquer la formule de localisation à des formes $\alpha(u) \in \mathbb{C}[[u]] \otimes \mathscr{A}(M)^J$ car l'anneau de cohomologie équivariante est $\mathbb{Z}$-gradué en posant $\deg u = 2$.

On retrouve la formule de Duistermaat-Heckman en appliquant le théorème de localisation à la forme
$$\alpha(u) := e^{(uf+\Omega)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(uf+\Omega)^k}{k!}$$
où Ω est la forme symplectique sur la variété et f la fonction hamiltonienne associée au champ de vecteurs J définie par $df = i(J)\Omega$. Du fait que la forme symplectique est fermée et que $i(J)f = 0$, on déduit que $(d - ui(J))(uf+\Omega) = 0$, puis par passage à l'exponentielle $D\alpha(u) = (d - u\,i(J))\alpha(u) = 0$.

La composante de degré extérieur maximal de $\alpha(u) = e^{uf}\left(1 + \Omega + \cdots + \frac{\Omega^\ell}{\ell!}\right)$ est $\left(e^{uf}\frac{\Omega^\ell}{\ell!}\right)$, tandis que la composante $\alpha^{[0]}(u)$ de degré extérieur 0 de $\alpha(u)$ est la fonction e^{uf}. La formule de localisation s'écrit :

$$\int_M e^{uf}\frac{\Omega^\ell}{\ell!} = (-2\pi)^\ell \sum_{\{p\in M \mid J_p=0\}} \frac{e^{uf(p)}}{u^\ell a_1(p)\cdots a_\ell(p)}.$$

On remarque que les points critiques de f correspondent aux zéros de J. En effet on a $df(p) = 0 \iff (i(J)\Omega)(p) = 0 \iff \Omega_p(J, .) = 0 \iff J_p = 0$ puisque Ω est non dégénérée.

On retrouve donc la formule de Duistermaat-Heckman (1)

$$\int_M e^{uf}\frac{\Omega^\ell}{\ell!} = (-2\pi)^\ell \sum_{\{p,\ \text{points critiques de } f\}} \frac{e^{uf(p)}}{u^\ell \det^{1/2}(\mathrm{Hess}_p f)}$$

car il existe un système de coordonnées locales au voisinage de p où le champ J est linéarisé :

$$\begin{aligned}
J &= a_1(p)\Big(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\Big) + \cdots + a_\ell(p)\Big(x_{2\ell}\frac{\partial}{\partial x_{2\ell-1}} - x_{2\ell-1}\frac{\partial}{\partial x_{2\ell}}\Big),\\
f &= \frac{1}{2}(a_1(p)(x_1^2 + x_2^2) + \cdots + a_\ell(p)(x_{2\ell-1}^2 + x_{2\ell}^2)),\\
\Omega &= dx_1 \wedge dx_2 + \cdots + dx_{2\ell-1} \wedge dx_{2\ell}.
\end{aligned}$$

Ces données vérifient effectivement la relation $df = i(J)\Omega$ et on a

$$\mathrm{Hess}_p f = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(p) & 0 \\ 0 & a_1(p) \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} a_\ell(p) & 0 \\ 0 & a_\ell(p) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Comme nous l'avons vu au début de cette introduction, une application de la formule de Duistermaat-Heckman est le calcul du volume d'une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne d'un groupe compact. Paradoxalement, cette formule peut aussi être utile pour calculer des volumes de variétés quotient pour l'action d'un groupe (sur lesquelles il n'y a donc plus d'action de groupe) comme dans le cas de l'espace des modules de connexions de Yang-Mills obtenues en quotientant l'espace des connexions de Yang-Mills par l'action du groupe de jauge. Ceci fait intervenir des intégrales sur l'espace des connexions qui est de dimension infinie et utilise une extension formelle de la formule de localisation au cadre de la dimension infinie [**W2**]. Grâce à l'outil des réductions symplectiques, on peut replacer le calcul dans le cadre de la dimension finie [**JK**].

2. Rappels sur la cohomologie de de Rham

Soit M une variété de classe C^∞. Soit $\mathscr{A}(M)=\bigoplus_i \mathscr{A}^i(M)$ l'algèbre $\mathbb{Z}$-graduée des formes différentielles sur M (à coefficients complexes). Partons de la cohomologie de de Rham définie à partir de la différentiation extérieure $d:\mathscr{A}^\bullet(M)\to\mathscr{A}^{\bullet+1}(M)$. La différentielle d est un opérateur vérifiant les conditions suivantes :

(1) $d^2=0$.

(2) $d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^{\deg\alpha}\alpha\wedge d\beta$ (relation de Leibniz) avec (α,β) homogènes dans $\mathscr{A}(M)$. Autrement dit, d est une dérivation impaire de l'algèbre $\mathscr{A}(M)$.

(3) $(df)(\xi)=\xi f$ où $f\in\mathscr{A}^0(M)=C^\infty(M),\xi$ étant un champ de vecteurs sur M.

On a l'égalité :

$$\begin{aligned}d\alpha(\xi_0,\ldots,\xi_k)=\sum_{i=0}^{k}&(-1)^i\xi_i(\alpha(\xi_0,\ldots,\widehat{\xi}_i,\ldots,\xi_k))\\&+\sum_{0\leqslant i<j\leqslant k}(-1)^{i+j}\alpha([\xi_i,\xi_j],\xi_0,\ldots,\widehat{\xi}_i,\ldots,\widehat{\xi}_j,\ldots,\xi_k)\end{aligned}$$

où le « chapeau » signifie que l'on omet la variable.

La relation $d^2=0$ permet de définir une cohomologie

$$H^*(M,\mathbb{C}):=\frac{\operatorname{Ker}d}{\operatorname{Im}d},$$

soit, pour chaque $i,H^i(M,\mathbb{C}):=\operatorname{Ker}(d|_{\mathscr{A}^i(M)})/d(\mathscr{A}^{i-1}(M))$ appelée cohomologie de de Rham.

Soit ξ un champ de vecteurs sur M. La dérivée de Lie $\mathscr{L}(\xi)$ agit sur $\mathscr{A}(M)$ en préservant le degré. Elle agit sur une fonction f par $\mathscr{L}(\xi)f:=\xi f$ et son action sur une k-forme ω est définie par :

$$(\mathscr{L}(\xi)\omega)\ (\xi_1,\ldots,\xi_k):=\xi\cdot\omega(\xi_1,\ldots,\xi_k)-\sum_{j=1}^{k}\omega(\xi_1,\ldots,[\xi,\xi_j],\ldots,\xi_k).$$

C'est une dérivation paire de l'algèbre $\mathscr{A}(M)$:

$$\mathscr{L}(\xi)(\alpha\wedge\beta)=\mathscr{L}(\xi)\alpha\wedge\beta+\alpha\wedge\mathscr{L}(\xi)\beta.$$

On peut vérifier que $\mathscr{L}(\xi)d=d\mathscr{L}(\xi)$ ce qui traduit le fait que la différentielle extérieure commute avec les actions de difféomorphismes.

La contraction par le champ ξ notée $i(\xi):\mathscr{A}^k(M)\to\mathscr{A}^{k-1}(M)$ est définie par :

$$i(\xi)\alpha:=\alpha(\xi)\quad\text{si } \alpha\in\mathscr{A}^1(M)\text{ est une 1-forme,}$$

$$i(\xi)(\alpha\wedge\beta):=(i(\xi)\alpha)\wedge\beta+(-1)^{\deg(\alpha)}\alpha\wedge(i(\xi)\beta)\qquad\text{si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des formes homogènes de } \mathscr{A}(M).$$

La contraction $i(\xi)$ est donc une dérivation impaire de l'algèbre $\mathscr{A}(M)$.

On a la relation

$$i(\xi)\circ i(\xi)=0.$$

Pour deux champs de vecteurs ξ_1, ξ_2, on a donc

$$i(\xi_1) \circ i(\xi_2) + i(\xi_2) \circ i(\xi_1) = 0.$$

On vérifie aussi la relation

$$[\mathscr{L}(\xi_1), i(\xi_2)] = i([\xi_1, \xi_2]).$$

La formule suivante est fondamentale.

Proposition 1. — *La dérivation de Lie et la contraction sont liées par la relation de Cartan :*

$$\mathscr{L}(\xi) = d \circ i(\xi) + i(\xi) \circ d.$$

Cette proposition se vérifie facilement pour une fonction φ

$$\mathscr{L}(\xi)\varphi = d\varphi(\xi) = \xi \cdot \varphi,$$

et pour une 1-forme α :

$$(\mathscr{L}(\xi)\alpha)(\xi_1) = \xi(\alpha(\xi_1)) - \alpha([\xi, \xi_1]) = \xi_1\alpha(\xi) + d\alpha(\xi, \xi_1) = d(i(\xi)\alpha)(\xi_1) + (i(\xi)d\alpha)(\xi_1).$$

Comme d et $i(\xi)$ sont des dérivations impaires de l'algèbre $\mathscr{A}(M)$, on vérifie que $d \circ i(\xi) + i(\xi) \circ d$ est une dérivation (paire) de l'algèbre $\mathscr{A}(M)$. L'algèbre $\mathscr{A}(M)$ est engendrée par les fonctions et les 1-formes. Les deux membres de la relation de Cartan sont des dérivations de l'algèbre $\mathscr{A}(M)$. Elles sont donc égales, puisqu'elles sont égales sur un système de générateurs.

On note $1_M \in \mathscr{A}^0(M) = C^\infty(M)$ la fonction constante identiquement égale à 1 sur M.

On définit aussi la cohomologie de de Rham à support compact. On note $\mathscr{A}_{\mathrm{cpt}}(M)$ l'algèbre des formes différentielles à support compact sur M. On note d_{cpt} la restriction de l'opérateur d à $\mathscr{A}_{\mathrm{cpt}}(M)$ et la cohomologie à support compact est définie par

$$H^*_{\mathrm{cpt}}(M) := \frac{\operatorname{Ker} d_{\mathrm{cpt}}}{\operatorname{Im} d_{\mathrm{cpt}}}.$$

Rappelons les lemmes de Poincaré que nous redémontrerons dans ce texte sous leur forme équivariante.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n. Alors

– Toute forme différentielle fermée sur V de degré $k > 0$ est exacte.

– Toute forme différentielle fermée à support compact sur V de degré $k < n$ est la différentielle d'une forme à support compact. Si $k = n$, une forme ω à support compact de degré maximum est la différentielle d'une forme à support compact si et seulement $\int_V \omega = 0$. Par conséquent, si T est une forme à support compact sur V d'intégrale non nulle, toute autre forme à support compact lui est proportionnelle en cohomologie.

(Dans le cas où $V := \mathbb{R}$, cette description est bien visible. Si $\phi(x)$ est une fonction sur $\mathbb{R}$, on peut toujours construire une primitive $\Phi(x)$ de ϕ. On aura donc $\phi(x)dx = d(\Phi(x))$. Si ϕ est à support compact, on ne peut trouver une primitive Φ de ϕ à support compact que si $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = 0$.)

Autrement dit

$$H^k(V) = \begin{cases} 0, & \text{si } k > 0, \\ \mathbb{C}, & \text{si } k = 0, \end{cases} \tag{2}$$

tandis que

$$H^k_{\mathrm{cpt}}(V) = \begin{cases} 0, & \text{si } k < n, \\ \mathbb{C}, & \text{si } k = n. \end{cases} \tag{3}$$

3. Cohomologie équivariante pour une action circulaire

Soit M une variété munie d'une action du cercle S^1 par un groupe de transformations à un paramètre $g(\theta)$. On note J le champ de vecteurs sur M tel que $-J_x$ soit tangent en $x \in M$ à la trajectoire $g(\theta)x$ de x sous l'action du groupe de transformations $g(\theta)$. Pour une fonction $\varphi \in C^\infty(M)$:

$$(J\varphi)(x) = -\frac{d}{d\theta}\varphi(g(\theta)x)_{\theta=0}.$$

Une forme $\alpha \in \mathscr{A}(M)$ vérifie $\mathscr{L}(J)\alpha = 0$ si et seulement si la forme α est invariante par les transformations $g(\theta)$.

La cohomologie équivariante est construite en déformant la cohomologie de de Rham. On note

$$\mathscr{A}(M)^J := \{\omega \in \mathscr{A}(M) \mid \mathscr{L}(J)\omega = 0\}.$$

C'est l'espace des formes différentielles invariantes pour l'action engendrée par J. Comme $\mathscr{L}(J)$ est une dérivation, l'espace $\mathscr{A}(M)^J$ est une algèbre.

Soit u une *indéterminée*. On introduit des formes du type $\omega(u) = \sum_{k,j} u^k \omega_k^{[j]}$, avec $\omega_k^{[j]} \in (\mathscr{A}^j(M))^J$. On dira que $\omega(u)$ est une forme équivariante. On note $\omega^{[j]}(u) := \sum_k u^k \omega_k^{[j]}$. C'est la composante de degré extérieur j de $\omega(u)$.

Les formes équivariantes sont des éléments de l'algèbre $\mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}(M)^J$ où $\mathbb{C}[u]$ est l'algèbre des polynômes par rapport à l'indéterminée u. Cette algèbre est une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée, le degré de $u^k\omega_j$ avec $\omega_j \in \mathscr{A}^j(M)^J$ étant donné par $2k+j$. C'est *a fortiori* une algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée. Le degré de u étant pair, la graduation sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est induite par la graduation en formes paires et impaires de $\mathscr{A}(M)$. Une forme équivariante paire est donc une forme $\omega(u) = \sum_k u^k\omega_k$, avec $\omega_k \in \oplus_j(\mathscr{A}^{2j}(M))^J$. Une forme équivariante impaire est une forme $\omega(u) = \sum_k u^k\omega_k$, avec $\omega_k \in \oplus_j(\mathscr{A}^{2j+1}(M))^J$.

On déforme l'opérateur d en introduisant l'opérateur $D := d - u\, i(J)$ agissant sur $\mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}(M)^J$ par

$$D(\omega)(u) = d(\omega(u)) - u\; i(J)(\omega(u)).$$

Comme u est de degré 2 et que la contraction $i(J)$ diminue d'une unité le degré de la forme, l'opérateur D augmente le degré de la forme $\omega(u)$ d'une unité. Si χ est une fonction, on a $D\chi = d\chi$ puisque $i(J)\chi = 0$.

On vérifie que

$$D^2 = (d - u\, i(J)) \circ (d - u\, i(J)) = d^2 - u\, d\, i(J) - u\, i(J)\, d + u^2 i(J)^2 = -u\mathscr{L}(J)$$

en utilisant les relations $d^2 = 0, i(J)^2 = 0$ et la relation de Cartan $d\, i(J) + i(J)\, d = \mathscr{L}(J)$. L'opérateur D^2 s'annule donc sur les formes équivariantes $\omega(u) = \sum u^k \omega_k$ puisque $\mathscr{L}(J)\omega_k = 0$.

On peut donc définir la cohomologie équivariante

$$H^*_{S^1}(M) := \frac{\operatorname{Ker} D}{\operatorname{Im} D}.$$

Remarquons que si $M := \bullet$ est réduite à un point, la cohomologie équivariante $H^*_{S^1}(\bullet)$ est simplement l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[u]$ en une variable u.

L'opérateur D est une dérivation (impaire) de l'algèbre $\mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}(M)^J$. Il commute à la multiplication par un polynôme $P(u) \in \mathbb{C}[u]$. On voit donc que $H^*_{S^1}(M)$ est une algèbre. De plus, c'est un module sur l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[u]$. Si P est un polynôme, la fonction « constante » $P(u)1_M$ peut être considérée comme une forme équivariante de degré paire, évidemment fermée. On a donc une application $\mathbb{C}[u] \to H^*_{S^1}(M)$. Comme on le verra dans la section suivante, cette application n'est pas injective en général.

Soit N une sous-variété de M. Notons $i : N \to M$ l'injection canonique de N dans M. Supposons le champ de vecteurs J tangent à N. Alors l'application de restriction $1 \otimes i^* : \mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}(M)^J \to \mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}(N)^J$ est bien définie et commute à la différentielle équivariante D. On la note simplement i^*.

Si p est un point de M et β une forme différentielle sur M, le nombre $i_p^*\beta := \beta^{[0]}(p)$ est la valeur de la composante de degré 0 de β au point p. Soit p un point de M où le champ de vecteurs J s'annule, et considérons l'application

$$i_p^* : \mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}(M)^J \longrightarrow \mathbb{C}[u].$$

Si $\omega(u) = \sum_{k,j} u^k \omega_k^{[j]}$, on a $i_p^*(\omega)(u) = \sum_k u^k \omega_k^{[0]}(p)$. Comme J s'annule en p, on voit que $i_p^*\omega(u) = 0$ si $\omega(u)$ est un bord $D\nu(u)$. En effet $d\nu(u)$ n'a pas de terme de degré extérieur 0 car d augmente le degré et $i_p^*(i(J)\nu(u)) = \nu^{[1]}(u)(J_p) = 0$, car J s'annule en p. L'application i_p^* est donc bien définie en cohomologie. Elle associe un polynôme en u à une classe de cohomologie équivariante :

$$i_p^* : H^*_{S^1}(M) \longrightarrow \mathbb{C}[u].$$

On définit aussi la cohomologie équivariante à support compact. On note $\mathscr{A}_{\mathrm{cpt}}(M)$ l'algèbre des formes différentielles à support compact sur M. On considère alors l'opérateur $D_{\mathrm{cpt}} := d - u\, i(J)$ agissant sur l'espace $\mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}_{\mathrm{cpt}}(M)^J$. On peut donc définir la cohomologie équivariante à support compact

$$H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(M) := \frac{\operatorname{Ker} D_{\mathrm{cpt}}}{\operatorname{Im} D_{\mathrm{cpt}}}.$$

Si S^1 agit trivialement sur M, alors il est clair que le complexe $\mathscr{A}_{S^1}(M)$ est simplement $\mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}(M)$ et que $H^*_{S^1}(M) = \mathbb{C}[u] \otimes H^*(M)$.

4. Le cas de l'action de S^1 sur S^1

On calcule dans cette section la cohomologie équivariante pour l'action du cercle sur lui-même par rotations.

Le cercle S^1 est paramétré par l'angle φ. L'action de S^1 sur S^1 est engendrée par le champ de vecteurs $\partial/\partial\varphi$. Donc $J = -\partial/\partial\varphi$. Une fonction f telle que $\mathscr{L}(J)f = 0$ est constante. Une 1-forme $g\,d\varphi$ est annulée par $\mathscr{L}(J)$ si g est constante. On a donc $\mathscr{A}(S^1)^J = \mathbb{C}1_{S^1} \oplus \mathbb{C}d\varphi$.

On déforme $\mathscr{A}(S^1)^J$ en $\mathbb{C}[u]\otimes\mathscr{A}(S^1)^J = \mathbb{C}[u]1_{S^1}\oplus\mathbb{C}[u]d\varphi$ qui est une algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée. L'opérateur $D = d - u\,i(J)$ agit sur un élément $\omega(u) = P(u)1_{S^1} + Q(u)d\varphi$ de cette algèbre par

$$D(\omega(u)) = -uQ(u)i(J)d\varphi = uQ(u)1_{S^1}.$$

Il se décompose en $D = D^+ \oplus D^-$ où D^+ agit sur $\mathbb{C}[u]1_{S^1}$, D^- sur $\mathbb{C}[u]d\varphi$ avec

$$\operatorname{Ker} D^+ = \mathbb{C}[u]1_{S^1}, \quad \operatorname{Ker} D^- = \{0\}, \quad \operatorname{Im} D^- = u\mathbb{C}[u]1_{S^1}, \quad \operatorname{Im} D^+ = \{0\}.$$

On en déduit que

$$H^-_{S^1}(S^1) = \frac{\operatorname{Ker} D^-}{\operatorname{Im} D^+} = \{0\}$$

et

$$H^+_{S^1}(S^1) = \frac{\operatorname{Ker} D^+}{\operatorname{Im} D^-} = \frac{\mathbb{C}[u]1_{S^1}}{u\mathbb{C}[u]1_{S^1}} = \mathbb{C}\,1_{S^1}.$$

On a donc

$$H^*_{S^1}(S^1) = \mathbb{C}$$

et l'action de $\mathbb{C}[u]$ sur $H^*_{S^1}(S^1)$ est triviale :

$$u \cdot (H^*_{S^1}(S^1)) = 0.$$

Ainsi, l'application de $\mathbb{C}[u]$ dans $H^*_{S^1}(S^1)$ est l'application $P \to P(0)1_{S^1}$.

Plus généralement, on sait que si S^1 agit librement sur une variété M, alors $H^*_{S^1}(M)$ est isomorphe à la cohomologie ordinaire de l'espace des orbites de S^1 dans M.

5. Le cas de l'action de S^1 sur $\mathbb{R}^2$

Dans cette section, on calcule « à la main » la cohomologie équivariante pour l'action du cercle sur $\mathbb{R}^2$ par rotations. Nous reprendrons ce calcul de manière plus théorique (et peut-être plus compréhensible) dans la section 7. Nous montrons que l'application $\mathbb{C}[u] \to H^*_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ qui envoie un polynôme $P(u)$ sur la classe de la « constante » $P(u)1_{\mathbb{R}^2}$ est un isomorphisme.

Considérons la rotation

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi une action de S^1 sur $\mathbb{R}^2$. Le champ de vecteurs correspondant est $J = x_2\partial_1 - x_1\partial_2$, car le vecteur $-J_x$ est le vecteur tangent au cercle $g(\theta)\cdot x$ en x.

Une forme différentielle est annulée par $\mathscr{L}(J)$ si et seulement si elle est invariante par rotations.

Considérons en particulier la forme

$$\omega(u) = \frac{1}{2}u\|x\|^2 + dx_1 \wedge dx_2. \tag{4}$$

Elle est annulée par $\mathscr{L}(J)$. Cette forme est de plus fermée pour l'opérateur D puisque $D\omega(u) = d\,\omega(u) - u\,i(J)\omega(u) = 0$. C'est un exemple de forme équivariante fermée sur $\mathbb{R}^2$ pour l'action de J.

Cherchons $\mathscr{A}(\mathbb{R}^2)^J$, c'est-à-dire toutes les formes invariantes sur $\mathbb{R}^2$ par rotations.

Les fonctions invariantes par l'action d'une rotation sont les fonctions de $\|x\|^2 := x_1^2 + x_2^2$, donc

$$\mathscr{A}^0(\mathbb{R}^2)^J = \{\varphi(\|x\|^2) \mid \varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})\}.$$

Deux 1-formes linéairement indépendantes et invariantes sont

$$x_1dx_1 + x_2dx_2 \quad \text{et} \quad x_1dx_2 - x_2dx_1.$$

Elles engendrent l'espace des 1-formes invariantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$\mathscr{A}^1(\mathbb{R}^2)^J = \{p(\|x\|^2)(x_1dx_1 + x_2dx_2) + q(\|x\|^2)(x_1dx_2 - x_2dx_1) \mid p, q \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})\}.$$

Une 2- forme invariante est $dx_1 \wedge dx_2$. On a donc

$$\mathscr{A}^2(\mathbb{R}^2)^J = \{r(\|x\|^2)dx_1 \wedge dx_2 \mid r \in C^\infty(\mathbb{R})\}.$$

Comme précédemment, l'opérateur $D = d - ui(J)$ s'écrit $D = D^+ \oplus D^-$,

$$D^+ : \mathscr{A}^0(\mathbb{R}^2)^J \oplus \mathscr{A}^2(\mathbb{R}^2)^J \longrightarrow \mathscr{A}^1(\mathbb{R}^2)^J \text{ et } D^- : \mathscr{A}^1(\mathbb{R}^2)^J \longrightarrow \mathscr{A}^0(\mathbb{R}^2)^J \oplus \mathscr{A}^2(\mathbb{R}^2)^J.$$

Comme l'espace $\mathbb{R}^2$ est contractile, on s'attend comme dans le cas de la cohomologie de de Rham à ce que la cohomologie équivariante de $\mathbb{R}^2$ soit la cohomologie équivariante d'un point, c'est-à-dire $\mathbb{C}[u]$.

Cherchons les noyaux de D^+ et D^- : on a

$$d\left(P(u, \|x\|^2)\right) = 2P'(u, \|x\|^2)(x_1dx_1 + x_2dx_2)$$

où $P'(u,t)$ désigne la dérivée de la fonction $P(u,t)$ par rapport à la variable t.

On a

$$i(x_2\partial_1 - x_1\partial_2)\left(Q(u,\|x\|^2)(dx_1\wedge dx_2)\right) = Q(u,\|x\|^2)(x_2dx_2 + x_1dx_1)$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}(5)\quad D\left(P(u,\|x\|^2) + Q(u,\|x\|^2)dx_1\wedge dx_2\right)&\\ &= \left(2P'(u,\|x\|^2) - uQ(u,\|x\|^2)\right)(x_1dx_1 + x_2dx_2).\end{aligned}$$

On a donc

$$\operatorname{Ker} D^+ = \{P(u,\|x\|^2) + Q(u,\|x\|^2)dx_1\wedge dx_2 \quad \text{avec } uQ(u,\|x\|^2) = 2P'(u,\|x\|^2)\}.$$

En remarquant que

$$i(J)(x_1dx_1 + x_2dx_2) = 0,$$

et que

$$\begin{aligned}d\left(R(u,\|x\|^2)(x_1dx_1 + x_2dx_2)\right) &= 2R'(u,\|x\|^2)(x_1dx_1 + x_2dx_2)\wedge(x_1dx_1 + x_2dx_2)\\ &= 0,\end{aligned}$$

on voit que

$$D\left(R(u,\|x\|^2)(x_1dx_1 + x_2dx_2)\right) = 0.$$

On a

$$d\left(S(u,\|x\|^2)(x_1dx_2 - x_2dx_1)\right) = 2S'(u,\|x\|^2)\|x\|^2dx_1\wedge dx_2 + 2S(u,\|x\|^2)dx_1\wedge dx_2$$

et

$$i(J)\left(S(u,\|x\|^2)(x_1dx_2 - x_2dx_1)\right) = -S(u,\|x\|^2)\|x\|^2.$$

On voit que

$$D\left(S(u,\|x\|^2)(x_1dx_2 - x_2dx_1)\right)$$

est égale à

$$(6)\qquad uS(u,\|x\|^2)\|x\|^2 + 2\left(\|x\|^2S'(u,\|x\|^2) + S(u,\|x\|^2)\right)dx_1\wedge dx_2.$$

On obtient :

$$\operatorname{Ker} D^- = \{R(u,\|x\|^2)(x_1dx_1 + x_2dx_2)\}.$$

Cherchons les images de D^+ et D^-. D'après les calculs précédents, on a :

$$(7)\qquad \operatorname{Im} D^+ = \left\{\left(2P'(u,\|x\|^2) - uQ(u,\|x\|^2)\right)(x_1dx_1 + x_2dx_2)\right\},$$

$$(8)\qquad \operatorname{Im} D^- = \left\{uS(u,\|x\|^2)\|x\|^2 + 2\left[S'(u,\|x\|^2)\|x\|^2 + S(u,\|x\|^2)\right]dx_1\wedge dx_2\right\}.$$

On vérifie que $\operatorname{Im} D^- \subset \operatorname{Ker} D^+$ et que $\operatorname{Im} D^+ \subset \operatorname{Ker} D^-$.

Cherchons le quotient $\operatorname{Ker} D^+/\operatorname{Im} D^-$. On posera $t = \|x\|^2$ pour simplifier les notations. Soit

$$\omega = P(u,t) + Q(u,t)dx_1\wedge dx_2 \in \operatorname{Ker} D^+.$$

On écrit $P(u,t) = P(u,0) + tP_1(u,t)$. Alors

$$\omega \in \operatorname{Ker} D^+ \iff u\,Q(u,t) = 2(tP_1(u,t))'.$$

Si $Q(u,t)=\sum_{k=0}^{N} q_k(t)u^k$, ceci montre que

$$P_1(u,t)=\frac{1}{2}u\Big(\sum_{k=0}^{N}\frac{Q_k(t)}{t}u^k\Big),$$

où $Q_k(t)$ est la primitive de q_k s'annulant en $t=0$. En particulier $P_1(u,t)$ est divisible par u. On écrit $P_1(u,t)=uT(u,t)$ et $P(u,t)=P(u,0)+utT(u,t)$. Écrivons $P(u,0)=P(u)$. On a alors

$$\operatorname{Ker} D^+=\big\{P(u)+u\|x\|^2T(u,\|x\|^2)+2\big[T(u,\|x\|^2)+\|x\|^2T'(u,\|x\|^2)\big]dx_1\wedge dx_2\big\}.$$

D'après la formule (6), la forme équivariante

$$u\|x\|^2T(u,\|x\|^2)+2\big[T(u,\|x\|^2)+\|x\|^2T'(u,\|x\|^2)\big]dx_1\wedge dx_2$$

est le bord de la forme équivariante $T(u,\|x\|^2)(x_1dx_2-x_2dx_1)$. Elle est donc nulle en cohomologie et on a

$$\operatorname{Ker} D^+/\operatorname{Im} D^-=\mathbb{C}[u].$$

Cherchons le quotient $\operatorname{Ker} D^-/\operatorname{Im} D^+$. Toute fonction $R(u,t)=\sum_{k=0}^{N} r_k(t)u^k$ polynomiale en u et C^∞ en t s'écrit sous la forme

$$2P'(u,t)-u\,Q(u,t)$$

où $P(u,t)$ et $Q(u,t)$ sont polynomiales en u car il suffit de prendre $Q=0$ et

$$P(u,t)=\sum_{k=0}^{N} p_k(t)u^k$$

où chaque p_k est une primitive de $\frac{1}{2}r_k$. Alors la forme équivariante

$$R(u,\|x\|^2)(x_1dx_1+x_2dx_2)$$

dans $\operatorname{Ker} D^-$ est le bord de la forme équivariante $P(u,\|x\|^2)$. Elle est donc nulle en cohomologie. On obtient

$$\operatorname{Ker} D^-/\operatorname{Im} D^+=0.$$

De plus on a vu que toute forme impaire fermée $\nu(u)$ s'écrit

$$\nu(u)=D\left(P(u,\|x\|^2)\right)=2P'(u,\|x\|^2)(x_1dx_1+x_2dx_2). \tag{9}$$

On obtient donc :

Théorème 2. — *La cohomologie équivariante de $\mathbb{R}^2$ pour l'action de S^1 sur $\mathbb{R}^2$ par rotations est isomorphe à $\mathbb{C}[u]$:*

$$H^*_{S^1}(\mathbb{R}^2)=\mathbb{C}[u]1_{\mathbb{R}^2}.$$

L'évaluation au point fixe 0

$$i_0^*:H^*_{S^1}(\mathbb{R}^2)\longrightarrow\mathbb{C}[u]$$

est un isomorphisme.

Remarquons que contrairement à la cohomologie $H^*_{S^1}(S^1)$, la cohomologie $H^*_{S^1}(\mathbb{R}^2)$ est sans torsion : soit $\alpha(u)$ une forme équivariante fermée et $P(u)$ un polynôme non nul tel que $P(u)\alpha(u) \equiv 0$, alors $\alpha(u) \equiv 0$.

6. Forme de Thom et cohomologie équivariante à support compact de $\mathbb{R}^2$

L'objet de cette section est de calculer la cohomologie équivariante à support compact de $\mathbb{R}^2$ pour l'action de S^1 sur $\mathbb{R}^2$ par rotations.

Soit M une variété orientée de dimension n munie d'une action de S^1 engendrée par le champ de vecteurs $-J$. On définit l'intégrale $\int_M \alpha(u)$ d'une forme équivariante à support compact comme l'intégrale de la composante de degré extérieur maximal $\alpha^{[n]}(u) = \sum_k u^k \alpha_k^{[n]}$ de la forme $\alpha(u)$: c'est le polynôme en u défini par

$$\Big(\int_M \alpha\Big)(u) = \sum_k \Big(\int_M \alpha_k^{[n]}\Big)u^k.$$

Montrons tout d'abord que l'intégration induit bien une application sur les classes de cohomologie équivariante à support compact. Ceci résulte du théorème de Stokes. En effet, soit $\alpha(u)$ une forme équivariante à support compact sur une variété M orientée de dimension n et $\beta(u)$ une forme équivariante à support compact telle que $\alpha(u) = D\beta(u)$. Montrons que $\int_M D\beta(u) = 0$. On a $\alpha^{[n]}(u) = d\beta^{[n-1]}(u)$. En effet, $i(J)\beta(u)$ n'a pas de terme de degré maximum n, car la contraction $i(J)$ diminue le degré. On a donc $\int_M \alpha^{[n]}(u) = \int_M d\beta^{[n-1]}(u)$ et ceci est nul par le théorème de Stokes puisque $\beta(u)$ est à support compact. On obtient ainsi une application :

$$\int_M : H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(M) \longrightarrow \mathbb{C}[u].$$

Dans le cadre qui nous intéresse, on appelle forme de Thom une forme fermée équivariante $T(u)$ à support compact sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\int_{\mathbb{R}^2} T(u)$ soit le polynôme identiquement 1 :

$$\int_{\mathbb{R}^2} T(u) \equiv 1.$$

Un exemple est donné par la forme équivariante fermée

$$T(u) = \frac{-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}u\chi(\|x\|^2) + \chi'(\|x\|^2)dx_1 \wedge dx_2\right]$$

où χ est une fonction à support compact telle que $\chi(0) = 1$. En effet

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi'(\|x\|^2)dx_1 \wedge dx_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \chi'(r^2)r\ dr d\theta = \pi \int_0^{\infty} \chi'(v)dv = -\pi\chi(0) = -\pi$$

donc $\int_{\mathbb{R}^2} T(u) = 1$.

Théorème 3. — *Toute forme équivariante fermée $\alpha(u)$ à support compact telle que $\int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u) \equiv 1$ est égale à la forme de Thom $T(u)$ dans la cohomologie à support compact.*

La cohomologie équivariante $H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^2)$ *est isomorphe à* $\mathbb{C}[u]$ *:*

$$H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}[u]$$

par l'application $\alpha(u) \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u)$.

L'isomorphisme inverse est donné par l'application $P(u) \to P(u)T(u)$*. Ici* $P(u)$ *est un polynôme en* u*. Ainsi toute forme équivariante fermée à support compact est telle que*

$$\alpha(u) \equiv \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u)\Big) T(u)$$

dans la cohomologie équivariante à support compact.

De plus, la restriction à 0 *est un isomorphisme de* $H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^2)$ *sur l'espace* $u(\mathbb{C}[u])$*.*

Remarque. — Si on se permet d'inverser la variable u, la restriction aux points fixes est encore un isomorphisme.

Démonstration. — La forme équivariante $\alpha(u)$ sur $\mathbb{R}^2$ s'écrit

$$\alpha(u) = \alpha_0(u, x_1, x_2) + \alpha_1(u, x_1, x_2)dx_1 + \alpha_2(u, x_1, x_2)dx_2 + \alpha_3(u, x_1, x_2)dx_1 \wedge dx_2$$

où les fonctions $\alpha_i(u, x_1, x_2)$ sont des fonctions polynomiales en u, et C^∞ à support compact en x_1, x_2. Rappelons que d'après les résultats de la section 5 que l'injection canonique $i : 0 \to \mathbb{R}^2$ du point 0 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ induit un isomorphisme :

$$i^* : H^*_{S^1}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow H^*_{S^1}(\{\text{point}\}) = \mathbb{C}[u].$$

La forme $\alpha(u)$ étant une forme équivariante fermée sur $\mathbb{R}^2$, un représentant de la classe de cohomologie sans condition de support est $\alpha_0(u, 0)$ qui correspond à l'évaluation en 0 et on a donc $\alpha \equiv \alpha_0(u, 0)$ dans la cohomologie sans condition de support. On a écrit $\alpha_0(u, 0)$ au lieu de $\alpha_0(u, 0)1_{\mathbb{R}^2} \in \mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}^0(\mathbb{R}^2)$.

La forme de Thom peut aussi être considérée comme une forme équivariante fermée sur $\mathbb{R}^2$ pour la cohomologie sans condition de support. Donc un représentant de la classe de la forme de Thom dans la cohomologie sans condition de support est

$$T(u) \equiv \frac{-u}{2\pi}\chi(0) = \frac{-u}{2\pi}.$$

En fait, on a

$$\begin{aligned} T(u) + \frac{u}{2\pi} &= \frac{-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}u(\chi(\|x\|^2) - 1) + \chi'(\|x\|^2)dx_1 \wedge dx_2\right] \\ &= \frac{-1}{\pi} D\left[\Big(\frac{\chi(\|x\|^2) - 1}{\|x\|^2}\Big)(x_1dx_2 - x_2dx_1)\right]. \end{aligned}$$

Donc il existe des formes équivariantes sur $\mathbb{R}^2$, $\psi_1(u)$ et $\psi_2(u)$, telles que

$$\alpha(u) = \alpha_0(u, 0)1_{\mathbb{R}^2} + (D\psi_1)(u) \quad \text{et} \quad T(u) = \frac{-u}{2\pi}1_{\mathbb{R}^2} + (D\psi_2)(u),$$

ce qui permet d'écrire

$$T(u) \wedge \alpha(u) = T(u) \wedge (\alpha_0(u, 0) + D\psi_1(u)) = T(u)\alpha_0(u, 0) + D(T(u)\psi_1(u)).$$

On a utilisé l'équation $DT(u) = 0$ (la forme équivariante $T(u)$ est une forme fermée) et le fait que D soit une dérivation pour écrire $T(u)D\psi_1(u) = D(T(u)\psi_1(u))$. La forme T étant à support compact, $T(u)\psi_1(u)$ est à support compact.

De même
$$T(u) \wedge \alpha(u) = \Big(\frac{-u}{2\pi} + D\psi_2(u)\Big) \wedge \alpha(u) = \frac{-u\alpha(u)}{2\pi} + D(\psi_2(u)\alpha(u))$$
où de nouveau $\psi_2(u)\alpha(u)$ est à support compact, $\alpha(u)$ étant à support compact. Donc $T(u) \wedge \alpha(u)$ est congru — dans la cohomologie équivariante *à support compact* — à $T(u)\alpha_0(u)$ d'une part et à $-u\alpha(u)/2\pi$ d'autre part. Ainsi $T(u)\alpha_0(u)$ est-il congru à $-u\alpha(u)/2\pi$ dans la cohomologie équivariante à support compact, ce qu'on écrira
$$u\alpha(u) \equiv -2\pi\alpha_0(u)T(u).$$
Calculons l'intégrale des deux membres. On obtient, puisque $\int_{\mathbb{R}^2} T(u) = 1$,
$$-2\pi\alpha_0(u) = u\int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u)$$
En fin de compte, on a pu écrire
$$u\Big[\alpha(u) - \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u)\Big)T(u)\Big] \equiv 0$$
dans la cohomologie à support compact.

La démonstration du théorème n'est pas encore terminée. Soit $\nu(u) \in \mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^2)$ telle que $u\nu(u) \equiv 0$ dans la cohomologie à support compact. Il s'agit de montrer que $\nu(u) \equiv 0$ dans la cohomologie à support compact. On a *a fortiori* $u\nu(u) \equiv 0$ dans la cohomologie sans support. Comme la cohomologie équivariante sans condition de support de $\mathbb{R}^2$ est sans torsion, ceci entraîne que $\nu(u) \equiv 0$ dans la cohomologie sans conditions de support. Supposons $\nu(u)$ paire. D'après les calculs de la section précédente (voir la formule (8)), il existe une fonction $S(u,t)$ polynomiale en u et C^∞ en t telle que
$$\begin{aligned}\nu(u) &= D(S(u, \|x\|^2)(x_1dx_2 - x_2dx_1)) \\ &= uS(u, \|x\|^2)\|x\|^2 + 2[S'(u, \|x\|^2)\|x\|^2 + S(u, \|x\|^2)]dx_1 \wedge dx_2.\end{aligned}$$
Ceci implique que
$$\nu^{[0]}(u)(x) = uS(u, \|x\|^2)\|x\|^2.$$
Comme la fonction $\nu^{[0]}(u)(x)$ est à support compact en x, ceci entraîne que $S(u, \|x\|^2)$ est à support compact en x et donc que $\nu(u) \equiv 0$ dans la cohomologie à support compact. Si $\nu(u)$ est une forme équivariante impaire fermée, elle est exacte et on a vu (formule (9)) qu'on peut l'écrire
$$\nu(u) = D(P(u, \|x\|^2)) = 2P'(u, \|x\|^2)(x_1dx_1 + x_2dx_2).$$
On voit que $P'(u,t)$ est égale à 0 lorsque t est grand, disons $t \geqslant M$. On peut écrire $P(u,t) = G(u,t) + C(u)$ avec $G(u,t)$ à support en t dans $t \in\,]-\infty, M]$ et $C(u)$ un polynôme en u. Dans ce cas, on a aussi $\nu(u) = D(G(u, \|x\|^2))$ et la fonction

$G(u, \|x\|^2)$ est à support compact en x. Ainsi l'équation $u\nu(u) \equiv 0$ en cohomologie à support compact entraîne $\nu(u) \equiv 0$ en cohomologie à support compact. Comme nous avions

$$u\Big[\alpha(u) - \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u)\Big) T(u)\Big] \equiv 0$$

dans la cohomologie à support compact, nous avons finalement obtenu

$$\alpha(u) \equiv \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u)\Big) T(u),$$

ce qui termine la démonstration du théorème 3, les autres assertions découlant immédiatement de l'équivalence explicite ci-dessus. □

Deux formes équivariantes à support compact de même intégrale sont donc équivalentes. En particulier toutes les formes de Thom construites à partir de différentes fonctions χ à support compact sont égales en cohomologie équivariante à support compact. Donc la forme de Thom est unique en cohomologie. Au lieu de choisir une forme de Thom à support compact, on peut choisir une forme de Thom à l'allure gaussienne en choisissant, au lieu de χ à support compact, la fonction $\chi(t) = e^{-t}$. On obtient

$$T_1(u) = \frac{1}{2\pi} e^{-\|x\|^2}(-u + 2dx_1 \wedge dx_2). \tag{10}$$

On peut alors démontrer de la même façon que précédemment que la forme $T_1(u)$ est équivalente à la forme $T(u)$ dans la cohomologie équivariante de $\mathbb{R}^2$ calculée à partir des formes à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^2$.

7. Cohomologie équivariante d'un espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel réel sur lequel agit le cercle S^1 par un groupe à un paramètre de transformations linéaires $g(\theta)$ (avec $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$). Alors V est de dimension $n = 2\ell + r$ et est muni d'une base $(e_1, e_2, \dots, e_{2\ell}, e_{2\ell+1}, \dots, e_{2\ell+r})$ dans laquelle l'action de S^1 est donnée par la matrice

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(a_1\theta) & -\sin(a_1\theta) \\ \sin(a_1\theta) & \cos(a_1\theta) \end{pmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos(a_\ell\theta) & -\sin(a_\ell\theta) \\ \sin(a_\ell\theta) & \cos(a_\ell\theta) \end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Comme la transformation $g(\theta)$ est périodique de période 2π, les nombres a_j sont des entiers.

Le champ de vecteurs infinitésimal J correspondant est

(11) $$J = a_1(x_2\partial_1 - x_1\partial_2) + a_2(x_4\partial_3 - x_3\partial_4) + \cdots + a_\ell(x_{2\ell}\partial_{2\ell-1} - x_{2\ell-1}\partial_{2\ell}).$$

On va généraliser le résultat de la section 5 en montrant que la cohomologie équivariante de V pour l'action du cercle vérifie encore

$$H^*_{S^1}(V) \simeq \mathbb{C}[u],$$

l'isomorphisme fait correspondre à un polynôme la classe de la « constante » $P(u)\,1_V$.

Soient $p : V \to \{0\}$ l'application constante de V sur 0 et $i : \{0\} \to V$ l'injection canonique. Ces deux applications induisent respectivement $p^* : \mathscr{A}(\{0\}) \to \mathscr{A}(V)$ et $i^* : \mathscr{A}(V) \to \mathscr{A}(\{0\})$. On peut donc construire l'application $p^*i^* : \mathscr{A}(V) \to \mathscr{A}(V)$ qui s'annule sur $\mathscr{A}^k(V), k > 0$ et revient à évaluer une fonction $\varphi \in \mathscr{A}^0(V) = C^\infty(V)$ en $0 : p^*i^*\varphi = \varphi(0)1_V$.

On va construire une homotopie $h : \mathscr{A}^k(V) \to \mathscr{A}^{k+1}(V)$ telle que

$$d \circ h + h \circ d = \operatorname{Id} - p^*i^*$$

ce qui revient donc à

$$\begin{aligned} (d \circ h + h \circ d)|_{\mathscr{A}^k(V)} &= \operatorname{Id}|_{\mathscr{A}^k(V)} && \forall\, k > 0 \\ (d \circ h + h \circ d)\varphi &= \varphi - \varphi(0)1_V && \forall\, \varphi \in \mathscr{A}^0(V) = C^\infty(V). \end{aligned}$$

On introduit pour cela le champ d'Euler $E := \sum_{i=1}^n x_i\partial_i$ et l'opérateur d'homogénéité correspondant

$$\mathscr{L}(E) = d \circ i(E) + i(E) \circ d$$

qui, appliqué à une forme polynomiale est donné par :

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}(E)(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\ &\qquad\qquad = (\,p_1 + \cdots + p_n + k)(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}). \end{aligned}$$

Il s'annule sur les constantes. Vérifions que l'application

$$F : \mathscr{A}^k(V) \longrightarrow \mathscr{A}^k(V)$$

définie par

$$\varphi dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \longrightarrow \Big(\int_0^1 \varphi(tx)t^{k-1}dt\Big)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

définit un « inverse » de l'opérateur d'homogénéité $\mathscr{L}(E)$. Ici on suppose que, soit $k \geqslant 1$, soit que $k = 0$ et que φ s'annule en 0, pour que F soit bien définie.

Vérifions le d'abord pour un polynôme $\varphi = x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}$. Si $k = 0$, on suppose que φ s'annule en 0. On a donc toujours $k + p_1 + \cdots + p_n > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} F(x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) &= \Big(\int_0^1 t^{k-1}t^{p_1+\cdots+p_n}dt\Big)\varphi dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= \frac{1}{k + p_1 + \cdots + p_n}\varphi\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \end{aligned}$$

donc on a bien

$$\mathscr{L}(E)F(\varphi\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})=\varphi\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

Vérifions plus généralement que $\mathscr{L}(E)\circ F=\mathrm{Id}$ sur $\mathscr{A}^k(V)$ pour $k\geqslant 1$. On écrit de même

$$\mathscr{L}(E)\circ F(\varphi\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})=\Big(\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+k\Big)\varphi(tx)t^{k-1}dt\Big)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

Mais

$$\Big(\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+k\Big)\varphi(tx)t^{k-1}=\frac{d}{dt}(t^k\varphi(tx)).$$

Donc, puisque $k\geqslant 1$,

$$\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+k\Big)\varphi(tx)t^{k-1}dt=\int_0^1\frac{d}{dt}\big(t^k\varphi(tx)\big)=\varphi(x)$$

et on a bien $\mathscr{L}(E)\circ F=\mathrm{Id}$ sur $\mathscr{A}^k(V)$.

De même on vérifie que $\mathscr{L}(E)\circ F=\mathrm{Id}$ sur $C_0(V)=\{\varphi\in C^\infty(V)\mid \varphi(0)=0\}$. D'où $d\circ i(E)\circ F+i(E)\circ d\circ F=\mathrm{Id}$ sur $\mathscr{A}^k(V)$, pour $k\geqslant 1$, ce qui, utilisant la relation $F\circ d=d\circ F$ et en posant

$$h=i(E)\circ F:\mathscr{A}^k(V)\longrightarrow\mathscr{A}^{k-1}(V),$$

donne

$$d\circ h+h\circ d=\mathrm{Id}$$

sur $\mathscr{A}^k(V)$ pour $k\geqslant 1$.

On pose $h=0$ sur $\mathscr{A}^0(V)$. De l'identité $\mathscr{L}(E)F\varphi=\varphi$ pour une fonction φ s'annulant en 0, on déduit que $hd\varphi=\varphi$ si φ s'annule en 0. Considérons $\varphi-p^*i^*\varphi=\varphi-\varphi(0)1_V$ qui est nulle en 0. On a donc $hd(\varphi-p^*i^*\varphi)=\varphi-p^*i^*\varphi$. Comme d est nulle sur les constantes, on en déduit que, sur $\mathscr{A}^0(V)$, on a l'égalité $hd\varphi=(\varphi-p^*i^*\varphi)$.

On a finalement prouvé l'égalité

$$d\circ h+h\circ d=\mathrm{Id}-p^*i^*$$

sur $\mathscr{A}(V)$. On rappelle que $i:\{0\}\to V$ est l'injection canonique et $p:V\to\{0\}$ la projection.

On peut montrer une version équivariante de cette propriété. Soit J le champ de vecteurs donné par la formule (11). Comme $g(\theta)$ est linéaire, l'action de S^1 commute aux homothéties, on a donc $[J,E]=0$ comme on peut le vérifier directement. Ceci entraîne que $\mathscr{L}(E)=d\circ i(E)+i(E)\circ d$ commute avec $i(J)$, car

$$\mathscr{L}(E)i(J)-i(J)\mathscr{L}(E)=i([E,J])=0.$$

On en déduit que F commute avec $i(J)$ et par suite que

$$i(J)\circ h+h\circ i(J)=i(J)\circ F\circ i(E)+F\circ i(E)\circ i(J)=F\circ(i(J)\circ i(E)+i(E)\circ i(J))=0.$$

Ceci entraîne finalement que

$$(d - u\, i(J))h + h(d - u\, i(J)) = (dh + hd) = I - p^* i^*.$$

On a donc, pour $\alpha(u) \in \mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}(M)^J$,

$$Dh\alpha(u) + hD\alpha(u) = \alpha(u) - p^* i^* \alpha(u).$$

On en conclut que toute forme équivariante fermée $\alpha(u)$ vérifie

$$D(h\alpha(u)) = \alpha(u) - \alpha^{[0]}(u)(0)1_V = \alpha(u) - p^* i^* \alpha(u).$$

Ainsi a-t-on montré qu'une forme équivariante fermée sur V qui s'annule en 0 est exacte. Dans la cohomologie, il reste donc simplement les fonctions constantes sur V (dépendant polynomialement de u), soit :

$$H^*_{S^1}(V) \;\simeq\; \mathbb{C}[u]1_V.$$

8. Formule de localisation pour la cohomologie équivariante à support compact sur un espace vectoriel

On considère une action de S^1 par des transformations linéaires sur un espace vectoriel. On suppose ici que le seul point fixe de cette action est le point 0. Donc V est un espace vectoriel de dimension paire 2ℓ et est muni d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_{2\ell})$ dans laquelle le champ de vecteurs J est tel que :

$$J = a_1(x_2\partial_1 - x_1\partial_2) + a_2(x_4\partial_3 - x_3\partial_4) + \cdots + a_\ell(x_{2\ell}\partial_{2\ell-1} - x_{2\ell-1}\partial_{2\ell})$$

où les a_i sont des entiers non nuls.

On supposera V muni de l'orientation définie par la base $e_1, e_2, \ldots, e_{2\ell}$. Dans cette section, on calcule l'intégrale d'une forme équivariante fermée à support compact sur V en fonction de sa restriction au point fixe 0. En fait, on déduira ce résultat de l'existence d'une forme fermée équivariante $T(u)$ d'intégrale 1.

On exhibe tout d'abord (comme dans le cas de $\mathbb{R}^2$) une 2ℓ-forme équivariante fermée d'intégrale 1. On pose

$$\begin{aligned} T(u) = \Big(-\frac{u}{2\pi}a_1\chi(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{\pi}\chi'(x_1^2 + x_2^2)dx_1 \wedge dx_2\Big) \\ \wedge \Big(-\frac{u}{2\pi}a_2\chi(x_3^2 + x_4^2) - \frac{1}{\pi}\chi'(x_3^2 + x_4^2)dx_3 \wedge dx_4\Big) \\ \wedge \cdots \wedge \Big(-\frac{u}{2\pi}a_\ell\chi(x_{2\ell-1}^2 + x_{2\ell}^2) - \frac{1}{\pi}\chi'(x_{2\ell-1}^2 + x_{2\ell}^2)dx_{2\ell-1} \wedge dx_{2\ell}\Big) \end{aligned}$$

où χ est une fonction C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 en 0. On vérifie comme dans la section 6 que $T(u)$ est une forme équivariante fermée pour l'action de S^1.

D'autre part, on a :

$$i^*(T(u)) = T^{[0]}(u)(0) = (-1)^\ell \frac{u^\ell}{(2\pi)^\ell}\, a_1 \cdots a_\ell \tag{12}$$

(où $i : \{0\} \to V$ est l'injection canonique) et

$$\int T(u) = \frac{1}{(\pi)^\ell}\Big(- \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \chi'(r^2) r \; dr \; d\theta \Big)^\ell = 1.$$

Soit $\alpha(u)$ une forme équivariante fermée à support compact. En considérant la classe de $\alpha(u)$ dans la cohomologie $H^*_{S^1}(V) \equiv \mathbb{C}[u]1_V$ sans conditions de support, on sait que

$$\alpha(u) = (i^*\alpha(u))1_V + D\beta(u)$$

et donc

$$\alpha(u) \wedge T(u) = (i^*\alpha(u))T(u) + (D\beta(u))T(u) = (i^*\alpha(u))T(u) + D(\beta(u)T(u)).$$

La forme $\beta(u)T(u)$ est à support compact puisque $T(u)$ est à support compact. On a donc

$$\alpha(u) \wedge T(u) \equiv (i^*\alpha(u))T(u)$$

(pour la cohomologie à support compact).

Un calcul analogue montre que

$$\alpha(u) \wedge T(u) \equiv (i^*T(u))\alpha(u)$$

pour cette même cohomologie, α étant supposée à support compact. Ici $i^*T(u)$ est le monôme $(-1)^\ell a_1 a_2 \cdots a_\ell u^\ell/(2\pi)^\ell$. On obtient ainsi

$$(i^*T(u))\alpha(u) \equiv (i^*\alpha(u))T(u)$$

dans la cohomologie à support compact. En intégrant sur V, comme $\int_V T(u) = 1$, on voit que, si $\alpha(u)$ est une forme fermée équivariante à support compact, alors le polynôme $i^*\alpha(u)$ est donné par

$$i^*\alpha(u) = (i^*T(u)) \int_V \alpha(u).$$

Donc

$$(i^*T(u))\alpha(u) \equiv (i^*T(u))\Big(\int_V \alpha(u)\Big)T(u),$$

et comme $i^*T(u)$ est un multiple de u^ℓ (Formule (12)), on obtient

$$u^\ell\Big(\alpha(u) - \Big(\int_V \alpha(u)\Big)T(u)\Big) \equiv 0$$

dans la cohomologie équivariante à support compact. L'équation

$$i^*\alpha(u) = (i^*T(u)) \int_V \alpha(u)$$

nous permet de calculer l'intégrale sur V de $\alpha(u)$ en fonction du polynôme $i^*\alpha(u)$ et de $i^*T(u) = (-1)^\ell a_1 a_2 \cdots a_\ell u^\ell/(2\pi)^\ell$. On obtient un cas particulier de la formule de localisation.

Proposition 4. — *Soit $\alpha(u)$ une forme équivariante fermée à support compact sur l'espace vectoriel orienté V. On a alors*

$$\int_V \alpha(u) = \frac{(-1)^\ell (2\pi)^\ell \alpha(u)^{[0]}(0)}{u^\ell a_1 \cdots a_\ell}.$$

On peut écrire intrinsèquement le dénominateur de cette formule à partir du déterminant de la transformation induite par J sur l'espace tangent en 0. Considérons la transformation $\mathscr{L}(J)(\xi) = [J, \xi]$ sur les champs de vecteurs. Comme J s'annule au point 0, on voit qu'elle induit une transformation notée $(\mathscr{L}(J))_0$ de l'espace tangent en 0 à V : si ξ est un champ de vecteurs, le champ $[J, \xi]$ calculé au point 0 ne dépend que de la valeur de ξ en 0.

Comme

$$J = a_1(x_2\partial_1 - x_1\partial_2) + a_2(x_4\partial_3 - x_3\partial_4) + \cdots + a_\ell(x_{2\ell}\partial_{2\ell-1} - x_{2\ell-1}\partial_{2\ell}),$$

la transformation $\mathscr{L}(J)_0$ s'écrit dans la base orientée $\partial_1, \dots, \partial_{2\ell}$ de l'espace $T_0V = V$ comme la matrice :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -a_\ell \\ a_\ell & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

On voit que $\det \mathscr{L}(J)_0 = a_1^2 \cdots a_\ell^2$. La racine carrée $a_1 a_2 \cdots a_\ell$ est bien déterminée une fois choisie l'orientation de V. En effet, il faut échanger un nombre pair d'éléments e_{2j-1}, e_{2j} pour que la base transformée soit encore une base orientée. On écrira donc la formule de localisation sous la forme :

$$\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^\ell \int_V \alpha(u) = \frac{i_0^*\alpha(u)}{u^\ell \det^{1/2}(\mathscr{L}(J)_0)} \tag{13}$$

où la racine carrée du déterminant est déterminée par l'orientation de V.

On peut aussi appliquer la formule précédente à des formes $\alpha(u)$ dépendant analytiquement de u et à décroissance rapide. Considérons la forme $\omega(u) = \frac{1}{2}u\|x\|^2 + dx_1 \wedge dx_2$ donnée par la formule (4) de la section 5. Alors pour $u > 0$ la forme

$$\alpha(u) = e^{-\omega(u)} = e^{-\frac{1}{2}u\|x\|^2}(1 - dx_1 \wedge dx_2)$$

est une forme vérifiant $d\alpha(u) = u\, i(J)\alpha(u)$. Elle est à décroissance rapide. Si on lui applique la formule (13) précédente, on obtient la formule intégrale pour une gaussienne.

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-u(x_1^2+x_2^2)/2} dx_1 dx_2 = \frac{2\pi}{u}.$$

De même que pour la dimension $n = 2$, on peut donner une formule sympathique pour une forme de Thom d'allure gaussienne d'un espace vectoriel V orienté à partir de l'intégrale de Berezin sur ΛV. Rappelons que l'intégrale de Berezin est une application linéaire

$$\mathscr{T}: \wedge V \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui s'annule sur $\wedge^k V$, $k < n = \dim V$. Si V est orienté et muni d'une base orientée $(e_1, \ldots, e_n)$, et $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ un sous-ensemble ordonné de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$. L'intégrale de Berezin $\mathscr{T}$ est définie par :

$$\mathscr{T}(e_I) := \begin{cases} 1 & \text{si } |I| = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons l'algèbre $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda(V)$. On note encore $I \otimes \mathscr{T}$ par $\mathscr{T}$. C'est une application de $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda(V)$ dans $\mathscr{A}(V)$. Considérons l'élément

$$f(u) := -\|x\|^2 + \sum_{i=1}^{2\ell} dx_i e_i + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{u}{2} a_i e_{2i-1} \wedge e_{2i}$$

de $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V$. Calculons l'exponentielle $e^{f(u)}$. C'est un élément de l'algèbre $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V$.

En dimension 2, on a

$$\begin{aligned} e^{f(u)} &= e^{-\|x\|^2} e^{dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + \frac{u}{2} a_1 e_1 \wedge e_2} \\ &= e^{-\|x\|^2}(1 + dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + \frac{u}{2} a_1 e_1 \wedge e_2 + dx_1 e_1 dx_2 e_2). \end{aligned}$$

Donc

$$\mathscr{T} e^{f(u)} = e^{-\|x\|^2} \Big(\frac{u}{2} a_1 - dx_1 dx_2\Big)$$

et $\frac{-1}{\pi} \mathscr{T} e^{f(u)}$ est la forme de Thom à l'allure gaussienne donnée par la formule (10), calculée dans la section 6.

De même, si V est de dimension $n = 2\ell$, on voit que

$$T_{\text{gauss}}(u) := \Big(\frac{-1}{\pi}\Big)^{\ell} \mathscr{T}(e^{f(u)})$$

est une forme fermée équivariante d'intégrale identiquement égale à 1 et d'allure gaussienne. Cette dernière formule est à rapprocher de la construction par Quillen [**Q**] de formes fermées (ici $T(u)$) comme caractères de Chern pour des superconnexions soit $\operatorname{str}(\exp^{-\nabla^2})$ où ∇ est une superconnexion.

Soit V un espace vectoriel de dimension $2\ell + r$, munie de l'action de S^1 pour laquelle le champ infinitésimal tangent est $-J$ avec

$$J := a_1(x_2 \partial_1 - x_1 \partial_2) + a_2(x_4 \partial_3 - x_3 \partial_4) + \cdots + a_\ell(x_{2\ell} \partial_{2\ell-1} - x_{2\ell-1} \partial_{2\ell}).$$

Écrivons

$$V_0 \oplus V_1 \qquad \text{avec} \quad V_0 = \oplus_{j=1}^{r} \mathbb{R} e_{2\ell+j}, \quad V_1 = \oplus_{j=1}^{2\ell} \mathbb{R} e_j.$$

On appelle forme de Thom $T(u)$ sur V une forme équivariante fermée à support compact d'intégrale identiquement 1. On construit, comme précédemment une forme équivariante fermée $T_1(u)$ sur V_1 à support compact et d'intégrale identiquement égale à 1. On peut choisir une forme différentielle T_0 sur V_0 à support compact et de degré r telle que $\int_{V_0} T_0 = 1$. Comme T_0 est de degré maximal sur V_0, elle est fermée pour d. Comme J est identiquement nul sur V_0, on voit que $T(u) = T_0 \wedge T_1(u)$ est une forme équivariante fermée sur V d'intégrale identiquement égale à 1. On peut montrer que deux formes équivariantes fermées d'intégrale 1 sur V sont cohomologues pour la cohomologie à support compact de V. Notons encore $T(u)$ la classe d'une forme de Thom. Alors, pour un espace vectoriel V, on a

$$H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(V) = \mathbb{C}[u]T(u)$$

où $H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(V)$ désigne la cohomologie équivariante pour les formes à support compact dans V (voir par exemple [**MQ**]). Autrement dit, par intégration, on pourra écrire

$$H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(V) \ \simeq \ \mathbb{C}[u]$$

puisque $\int T(u) = 1$. Une forme fermée équivariante à support compact sera donc le bord d'une forme équivariante fermée à support compact, si et seulement si son intégrale est nulle. Remarquons l'analogie avec le cas simple de la dimension 1. Soit $f(t)$ une fonction à support compact sur $\mathbb{R}$ telle que f s'écrive comme dérivée $f = g'$ d'une fonction g. Alors g est déterminée à une constante près. On peut choisir g nulle lorsque t tend vers $-\infty$ puisque f est à support compact. Alors g est à support compact si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} f = 0$.

9. Cohomologie équivariante d'une variété et points fixes. La formule de Paradan

Soit M une variété compacte munie d'une action du groupe S^1 par le groupe de transformations $g(\theta)$. On sait que l'ensemble des points fixes M^{S^1} de l'action est une sous-variété de M. Ceci résulte du fait que le groupe S^1 est un groupe compact : grâce à une métrique riemannienne invariante, on peut linéariser l'action de S^1 près d'un point fixe (voir par exemple [**BGV**, prop. 7.12]). Nous montrons ici, qu'après localisation, la cohomologie équivariante de M est isomorphe à la cohomologie équivariante à support compact d'un voisinage de sa variété de points fixes M^{S^1}.

Notons J le champ tel que $-J_x$ soit tangent en $x \in M$ à la trajectoire $g(\theta)x$. La variété M^{S^1} est aussi l'ensemble des zéros de J. Une forme α vérifie $\mathscr{L}(J)\alpha = 0$ si et seulement si la forme α est invariante par les transformations $g(\theta)$.

On calculera dans cette section l'opérateur $D = d - u\, i(J)$ sur le complexe localisé $\mathbb{C}[u, u^{-1}] \otimes \mathscr{A}(M)^J$. On notera $H^*_{S^1}(M)_{u^{-1}}$ la cohomologie de ce complexe localisé. De même, si N est une variété non nécessairement compacte, on considère le complexe localisé $\mathbb{C}[u, u^{-1}] \otimes \mathscr{A}_{\mathrm{cpt}}(N)^J$. On notera $H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(M)_{u^{-1}}$ la cohomologie de ce complexe localisé.

L'opérateur de multiplication par u est inversible sur $H^*_{S^1}(M)_{u^{-1}}$. Il résulte de la section 4 que $H^*_{S^1}(S^1)_{u^{-1}} = 0$. Il résulte de la section 6 que $H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^2)_{u^{-1}}$ est isomorphe à $\mathbb{C}[u, u^{-1}]$ par restriction à 0.

Nous montrons tout d'abord qu'une forme équivariante fermée sur une variété M est exacte en dehors des zéros de J.

Soit $\alpha(u) \in \mathbb{C}[u, u^{-1}] \otimes \mathscr{A}(M)^J$. Supposons la forme $\alpha(u)$ une forme équivariante fermée sur M, soit $d(\alpha(u)) - u\ i(J)(\alpha(u)) = 0$

Tout d'abord montrons que $\alpha(u)$ est exacte dans le complexe $\mathbb{C}[u, u^{-1}] \otimes \mathscr{A}(M)^J$ en dehors des zéros de J.

On choisit une structure riemannienne invariante par l'action du groupe S^1, ce qui est possible. On définit tout d'abord la 1-forme $\lambda = J^\flat$ par $\lambda(\xi) = \langle J, \xi\rangle$ où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire correspondant à la métrique sur M. Cette forme λ est alors dans $\mathscr{A}(M)^J$, car J et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sont invariantes par l'action de S^1.

Comme $(D\lambda)(u) = d\lambda - ui(J)\lambda = d\lambda - u\langle J, J\rangle = d\lambda - u\|J\|^2$, la composante de degré 0 de $(D\lambda)(u)$ pour $u \neq 0$ ne s'annule pas quand $J \neq 0$. La forme $\alpha(u)$ étant fermée, on peut écrire

$$\alpha(u) = D\Big(\frac{\lambda}{(D\lambda)(u)}\alpha(u)\Big)$$

en dehors des zéros de J. Plus précisément, on écrit

$$(D\lambda)(u) = -u\|J\|^2\Big(1 - \frac{d\lambda}{u\|J\|^2}\Big),$$

de sorte que

$$\Big(\frac{\lambda}{(D\lambda)(u)}\alpha(u)\Big) = \frac{\lambda}{-u\|J\|^2}\Big(\sum_k\Big(\frac{d\lambda}{u\|J\|^2}\Big)^k\Big)\alpha(u)$$

est dans $\mathbb{C}[u, u^{-1}] \otimes \mathscr{A}(M)^J$. En effet, la somme sur les k est finie puisqu'elle s'arrête dès que $2k > \dim M$. On voit donc qu'il existe un entier K tel que $u^K\alpha(u)|_U \equiv 0$ dans la cohomologie $H^*_{S^1}(U)$ où U est l'ouvert $J \neq 0$. En particulier la cohomologie $H^*_{S^1}(U)$ est un module de torsion pour l'anneau $\mathbb{C}[u]$ et $H^*_{S^1}(U)_{u^{-1}} = 0$.

Il est donc plausible de penser que seule la variété M^{S^1} fait apparaître des classes non nulles après localisation.

Soit N un voisinage ouvert invariant de M^{S^1}. La cohomologie équivariante à support compact de N s'envoie naturellement dans la cohomologie équivariante de M. En effet, une forme à support compact sur N se prolonge naturellement en une forme sur M en la prolongeant par 0 en dehors de N.

Théorème 5. — *Soit N un voisinage ouvert invariant de M^{S^1}. L'application*

$$Q : H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(N)_{u^{-1}} \longrightarrow H^*_{S^1}(M)_{u^{-1}}$$

est un isomorphisme.

La signification de ce théorème est la suivante : pour toute forme équivariante fermée α sur M, il existe une forme équivariante fermée β à support compact *contenu* *dans* N, un entier k et une forme équivariante $\gamma(u)$ sur M tels que $u^k(\alpha(u)) - \beta(u) = D(\gamma(u))$. De plus, on peut supposer que $\beta(u)$ et $\gamma(u)$ dépendent polynomialement de u.

En fait on va donner un inverse explicite à l'application Q. On va construire une forme équivariante fermée $\operatorname{Par}(u) \in \mathbb{C}[u, u^{-1}] \otimes \mathscr{A}(M)^J$ (appelée forme de Paradan par la suite) à support compact contenu dans N *qui est congrue à 1 dans le complexe* $\mathbb{C}[u, u^{-1}] \otimes \mathscr{A}(M)^J$ et qui vaut identiquement 1 sur l'ensemble des zéros de J. On désire donc que $\operatorname{Par}(u) = \sum_k u^k P_k$ où la somme est sur un ensemble fini d'entiers relatifs k. Les formes P_k sont des formes sur M à support compact contenu dans N. D'autre part toutes les formes P_k pour $k \neq 0$ seront nulles sur l'ensemble $J = 0$ tandis que la forme P_0 sera une fonction égale à 1 sur l'ensemble $\{J = 0\}$.

La forme $\operatorname{Par}(u)$ est construite de la manière suivante dans [**P**]. Soit χ une fonction à support compact, qui vaut identiquement 1 au voisinage des zéros de J et qui est S^1 invariante (*i.e.* $J\chi = 0$). On suppose que χ est à support compact contenu dans N. On pose

$$\operatorname{Par}(u) = d\chi \frac{\lambda}{(D\lambda)(u)} + \chi.$$

Plus précisément

$$\operatorname{Par}(u) = \chi + (d\chi) \wedge \frac{\lambda}{-u\|J\|^2}\Big(1 + \frac{d\lambda}{u\|J\|^2} + \cdots + \frac{(d\lambda)^\ell}{u^\ell \|J\|^{2\ell}}\Big)$$

où 2ℓ est la dimension de M.

La forme $\operatorname{Par}(u)$ est bien définie sur M puisque $\|J\|^2$ est non nulle en dehors des zéros de J et que $d\chi$ par contre est identiquement nulle au voisinage des zéros de J. La forme $\operatorname{Par}(u)$ est dans $\mathbb{C}[u^{-1}] \otimes \mathscr{A}(M)^J$ et est bien de la forme désirée. Ainsi on remarquera que $\operatorname{Par}(u)$ évaluée en un point fixe p coïncide avec l'évaluation de χ en un point fixe et vaut donc 1. Elle est fermée puisque

$$D \operatorname{Par}(u) = d\chi - d\chi \wedge D\Big(\frac{\lambda}{(D\lambda)(u)}\Big) = 0$$

car

$$D\Big(\frac{\lambda}{(D\lambda)(u)}\Big) = \frac{(D\lambda)(u)}{(D\lambda)(u)} = 1.$$

D'autre part

$$\operatorname{Par}(u) - 1 = d\chi \frac{\lambda}{(D\lambda)(u)} + \chi - 1 = D\Big((\chi - 1)\frac{\lambda}{(D\lambda)(u)}\Big)$$

et $(\chi - 1)\frac{\lambda}{(D\lambda)(u)}$ est bien définie sur M puisque χ vaut 1 au voisinage des zéros de J. Donc $\operatorname{Par}(u) - 1$ est exacte dans $\mathbb{C}[u, u^{-1}] \otimes \mathscr{A}(M)^J$, autrement dit $\operatorname{Par} \equiv 1$. Le théorème 5 se précise ainsi.

Théorème 6. — *Soit N un voisinage ouvert invariant de M^{S^1}. L'application*

$$Q : H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(N)_{u^{-1}} \longrightarrow H^*_{S^1}(M)_{u^{-1}}$$

est un isomorphisme. Son inverse est donnée par l'application

$$P : H^*_{S^1}(M)_{u^{-1}} \longrightarrow H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(N)_{u^{-1}}$$

définie par $P(\alpha)(u) = \operatorname{Par}(u)\alpha(u)$.

Démonstration. — Si $\alpha(u)$ est une forme équivariante fermée sur M, alors $\alpha(u)\operatorname{Par}(u)$ est congru à $\alpha(u)$ (dans le complexe $\mathbb{C}[u,u^{-1}]\otimes\mathscr{A}(M)^J$) et est à support compact contenu dans N. On voit donc que $Q\circ P = \mathrm{Id}$.

Maintenant, soit $\beta(u)$ une forme équivariante fermée à support compact contenu dans N. Écrivons $(\operatorname{Par}(u)-1) = D\kappa(u)$. Donc $\operatorname{Par}(u)\beta(u)-\beta(u) = D(\kappa(u)\beta(u))$. Comme $\beta(u)$ est à support dans N, il en est de même pour $\kappa(u)\beta(u)$ et on obtient $P\circ Q = \mathrm{Id}$. □

Remarque. — Choisissons un voisinage N de M^{S^1} qui soit fibré sur M^{S^1}. C'est toujours possible, grâce aux voisinages tubulaires. Alors, comme on l'a vu dans le cas de $\mathbb{R}^2$ (Théorème 3), on peut montrer facilement que l'application de restriction sur M^{S^1} est un isomorphisme de $H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(N)$ sur $H^*_{S^1}(M^{S^1})$, si on se permet d'inverser la variable u. Comme la forme de Paradan vaut 1 sur M^{S^1}, on retrouve donc le théorème dans sa forme énoncée par Borel : L'application de restriction aux points fixes induit un isomorphisme de $H^*_{S^1}(M)_{u^{-1}}$ avec $\mathbb{C}[u,u^{-1}]\otimes H^*(M^{S^1})$.

10. Formule de localisation dans le cas d'une variété

Soit M une variété compacte orientée munie d'une action du groupe S^1 par le groupe de transformations $g(\theta)$. L'objectif de cette section est de calculer l'intégrale d'une forme équivariante fermée sur M.

Soit M^{S^1} l'ensemble des points fixes de l'action de S^1 sur M. Soit $\alpha(u)$ une forme équivariante fermée sur M. Considérons la forme de Paradan $\operatorname{Par}(u)$. Rappelons qu'elle vaut 1 sur M^{S^1} et que $\operatorname{Par}(u) = 1 + D\beta(u)$ avec $\beta(u)\in\mathbb{C}[u,u^{-1}]\otimes\mathscr{A}(M)^J$. On a donc

$$\alpha(u)\operatorname{Par}(u) = \alpha(u) + D(\alpha(u)\beta(u))$$

($\alpha(u)$ étant fermée). Donc, on voit que :

$$\int_M \alpha(u) = \int_M \alpha(u)\operatorname{Par}(u) = \int_N \alpha(u)\operatorname{Par}(u)$$

où N est un voisinage de l'ensemble des zéros de J.

Nous traitons le cas où les zéros de J sont isolés. On a donc

$$\int_M \alpha(u) = \sum_{\{p,\ \text{zéros de } J\}} \int_{\text{voisinage de } p} \alpha(u)\operatorname{Par}(u).$$

On peut (par exemple au moyen de l'application exponentielle définie par la structure riemannienne invariante) linéariser le champ de vecteurs J au voisinage du point fixe p. Il existe donc une carte locale d'un voisinage de p difféomorphe à un ouvert de

$\mathbb{R}^{2\ell}$ (2ℓ étant la dimension de M) et sur lequel le champ J s'écrit comme un champ de rotations infinitésimales :

$$J = a_1(p)(x_2\partial_1 - x_1\partial_2) + a_2(p)(x_4\partial_3 - x_3\partial_4) + \cdots + a_\ell(p)(x_{2\ell}\partial_{2\ell-1} - x_{2\ell-1}\partial_{2\ell}).$$

Ici les $a_i(p)$ sont des entiers dépendant du point p. Soit ξ un champ de vecteurs. Comme le point p est un point fixe isolé, tous les nombres réels $a_i(p)$ sont non nuls. Comme J s'annule au point p, la transformation $\mathscr{L}(J)_p\xi = [J,\xi]_p$ ne dépend que de la valeur du champ de vecteurs ξ_p en p. On obtient ainsi une transformation $\mathscr{L}(J)_p$ de T_pM qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_1(p) \\ a_1(p) & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -a_\ell(p) \\ a_\ell(p) & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Considérons la restriction de $\alpha(u)\operatorname{Par}(u)$ à un voisinage de p. C'est une forme équivariante fermée qui est à petit support compact dans un voisinage de p identifié via une carte locale à un ouvert de $\mathbb{R}^{2\ell}$. Elle est dans $\mathbb{C}[u,u^{-1}]\otimes\mathscr{A}_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^{2\ell})$. On peut appliquer la formule de localisation (13) à $\alpha(u)\operatorname{Par}(u)$ (en effet, il suffit de multiplier par u^K pour K assez grand pour que cette forme retombe dans $\mathbb{C}[u]\otimes\mathscr{A}_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^{2\ell})$). Comme $\operatorname{Par}(u)$ est identiquement égale à 1 sur les zéros de J, on a $i_p^*(\alpha(u)\operatorname{Par}(u)) = i_p^*\alpha(u)$. On peut donc écrire :

$$\int_{\text{voisinage de } p} \alpha(u)\operatorname{Par}(u) = \frac{(-1)^\ell(2\pi)^\ell i_p^*(\alpha(u))}{u^\ell \det(\mathscr{L}(J)_p)^{1/2}}.$$

On obtient finalement le théorème

Théorème 7. — *Soit M une variété orientée munie d'une action de S^1 ayant des points fixes isolés. Soit $\alpha(u)$ une forme fermée équivariante à support compact. Alors*

$$\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^\ell \int_M \alpha(u) = \sum_{\{p,\ \textit{zéros de } J\}} \frac{i_p^*\alpha(u)}{u^\ell(\det(\mathscr{L}(J)_p)^{1/2}}.$$

La racine carrée $\det(\mathscr{L}(J)_p)^{1/2}$ est déterminée par l'orientation de T_pM.

Ainsi aura-t-on déduit la formule de localisation sur une variété de dimension paire munie d'une action de S^1 de celle déjà obtenue sur un espace vectoriel de même dimension via la forme de Paradan.

11. Un exemple de la formule de localisation sur $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$

Soit $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$ l'espace des lignes complexes dans $\mathbb{C}^{k+1}$. Soit (e_i) la base canonique de $\mathbb{C}^{k+1}$. Si $v\in\mathbb{C}^{k+1}$ est non nul, la ligne $\mathbb{C}v$ est un élément de $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$.

Considérons la sphère S^{2k+1} réalisée comme la sous-variété de $\mathbb{C}^{k+1}$ des éléments de norme 1 :

$$S^{2k+1} = \{(z_1, \dots, z_{k+1}) \in \mathbb{C}^{k+1} \mid |z_1|^2 + \dots + |z_{k+1}|^2 = 1\}.$$

Le groupe $S^1 = \{e^{i\varphi} \mid \phi \in [0, 2\pi]\}$ agit sur S^{2k+1} par multiplication par le nombre complexe $e^{i\varphi}$

$$e^{i\varphi} \cdot (z_1, \dots, z_{k+1}) = (e^{i\varphi} z_1, \dots, e^{i\varphi} z_{k+1}).$$

On réalise l'espace projectif $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$ comme quotient S^{2k+1}/S^1 de S^{2k+1} par cette action de S^1 :

$$(z_1, \dots, z_{k+1}) \sim (z'_1, \dots, z'_{k+1}) \iff \exists \varphi, z'_j = e^{i\varphi} z_j \ \forall j \in \{1, \dots, k+1\}.$$

L'application

$$\begin{aligned} q : S^{2k+1} &\longrightarrow \mathbb{P}_k(\mathbb{C}) \\ (z_1, \dots, z_{k+1}) &\longmapsto \mathbb{C}(z_1 e_1 + \dots + z_{k+1} e_{k+1}) \end{aligned}$$

de S^{2k+1} dans $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$ passe au quotient par cette relation d'équivalence et identifie S^{2k+1}/S^1 à $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$.

On écrit $z_j = x_j + iy_j$. Il existe une unique 2-forme fermée Ω sur $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$ telle que la 2-forme tirée en arrière $q^*\Omega$ coïncide avec la 2-forme $\sum_{j=1}^{k+1} dx_j \wedge dy_j$ restreinte à la sphère S^{2k+1}. En effet, $\sum_{j=1}^{k+1} dx_j \wedge dy_j$ est une forme invariante par l'action de S^1 et qui vérifie sous l'action de la contraction i par le champ de vecteurs $\sum_j (y_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial y_j})$ la formule

$$\sum_{j=1}^{k+1} i\Big(y_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial y_j}\Big) \sum_{\ell=1}^{k+1} (dx_\ell \wedge dy_\ell) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k+1} d(x_j^2 + y_j^2) = \frac{1}{2} d\Big(\sum_{j=1}^{k+1} x_j^2 + y_j^2\Big) = 0$$

lorsque $\sum x_j^2 + y_j^2 = 1$, ce qui correspond à la restriction à la sphère. Si ξ et ξ' sont des vecteurs tangents à S^{2k+1} en $v \in S^{2k+1}$, on voit alors que $(\sum_{\ell=1}^{k+1} (dx_\ell \wedge dy_\ell), \xi \wedge \xi')$ ne dépend que des images $q_*\xi, q_*\xi'$ des vecteurs ξ, ξ' tangents en $q(v)$ à $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$. On pose alors

$$(\Omega, q_*\xi \wedge q_*\xi') = \Big(\sum_{\ell=1}^{k+1} (dx_\ell \wedge dy_\ell), \xi \wedge \xi'\Big).$$

La 2-forme Ω est fermée, car $q^*\Omega$ l'est. On voit facilement que Ω induit une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur chaque espace tangent. Autrement dit, Ω définit une forme symplectique sur l'espace $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$.

Considérons une action du cercle S^1 sur S^{2k+1} par

$$g(\theta)(z_1, \dots, z_{k+1}) = (e^{in_1\theta} z_1, \dots, e^{in_{k+1}\theta} z_{k+1})$$

où les n_j sont des entiers relatifs. Cette action préserve la relation d'équivalence $\sim$ et induit une action de S^1 sur $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$. Si tous les n_j sont égaux à n, cette action est triviale car c'est alors la multiplication par le nombre complexe $e^{in\theta}$.

On suppose dans la suite que tous les n_j sont distincts.

Le champ de vecteurs J correspondant à l'action de S^1 sur S^{2k+1} est le champ tangent à S^{2k+1} :

$$J=\sum_{j=1}^{k+1} n_j\Big(y_j\frac{\partial}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial}{\partial y_j}\Big).$$

Soit $f : S^{2k+1}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(z_1,\dots,z_{k+1})=\frac{1}{2}(n_1|z_1|^2+\cdots+n_{k+1}|z_{k+1}|^2).$$

La fonction f étant invariante par la rotation $z_j\to e^{i\varphi}z_j$, elle est bien définie sur le quotient $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$ de la sphère unité de $\mathbb{C}^{k+1}$ pour la relation $\sim$.

Un calcul analogue au précédent donne

$$i(J)\sum_{j=1}^{k+1}(dx_j\wedge dy_j)=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{2}n_j d(x_j^2+y_j^2)=df.$$

On note encore $f:\mathbb{P}_k(\mathbb{C})\to\mathbb{R}$ la fonction déduite de f. On note encore J le champ q_*J correspondant à l'action de S^1 sur $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$. On obtient donc la relation

$$i(J)\Omega=df.$$

Cette relation signifie par définition que la fonction f est le hamiltonien du champ de vecteurs J sur la variété symplectique $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$.

On voit que f et Ω sont annulées par $\mathscr{L}(J)$. La forme $\Omega(u)=uf+\Omega$ est donc une forme équivariante sur $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$. On a

$$(d-u\,i(J))(uf+\Omega)=d\Omega+u(df-i(J)\Omega)=0$$

puisque $d\Omega=0$ et $i(J)\Omega=df$. On en déduit la proposition suivante

Proposition 8. — *La forme équivariante $\Omega(u)=uf+\Omega$ est une forme équivariante fermée.*

On dira que $\Omega(u)$ est la forme symplectique équivariante de l'espace $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$.

Écrivons la formule de localisation pour

$$\int_{P_k(\mathbb{C})} e^{uf+\Omega}.$$

Le terme de degré maximum de $e^{uf+\Omega}$ est $e^{uf}\Omega^k/k!$ et $\Omega^k/k!$ est la forme de volume symplectique de $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$. Les points fixes pour l'action de S^1 sur $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$ sont les lignes $\ell=\mathbb{C}(z_1e_1+\cdots+z_{k+1}e_{k+1})$ telles que $g(\theta)\ell=\ell$, pour tout θ c'est-à-dire telles qu'il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ vérifiant

$$(e^{in_1\theta}z_1,\dots,e^{in_{k+1}\theta}z_{k+1})=\lambda(z_1,\dots,z_{k+1}).$$

Si $z_1\neq 0$, alors $z_2=z_3=\cdots=z_{k+1}=0$ puisque alors $\lambda=e^{in_1\theta}$ et que $n_1\notin\{n_2,\dots,n_{k+1}\}$. Il y a donc $k+1$ points fixes ($p_j:\mathbb{C}e_j$, $j=1,\dots,k+1$) avec

$e_j = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0), 1$ étant à la j-ème place. On a alors $f(p_j) = \frac{1}{2} n_j$ et par la formule de localisation, on obtient :

$$\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^k \int_{\mathbb{P}_k(\mathbb{C})} e^{uf+\Omega} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{e^{un_j/2}}{u^k \det(\mathscr{L}(J)_{p_j})^{1/2}}.$$

La racine carrée du déterminant de la transformation $\mathscr{L}(J)_{p_j}$ est le produit $\prod_{\{i|i\neq j\}}(n_i - n_j)$. En effet, en paramétrant par $(z_1, \ldots, z_{j-1}, 1, z_{j+1}, \ldots, z_{k+1})$ un voisinage de p_j, l'action du cercle s'écrit

$$\begin{aligned} &g(\theta)\mathbb{C}(z_1, \ldots, z_{j-1}, 1, z_{j+1}, \ldots, z_{k+1}) \\ &\qquad = \mathbb{C}(e^{in_1\theta} z_1, \ldots, e^{in_{j-1}\theta} z_{j-1}, e^{in_j\theta}, e^{in_{j+1}\theta} z_{j+1}, \ldots, e^{in_{k+1}\theta} z_{k+1}) \\ &= \mathbb{C}(e^{i(n_1-n_j)\theta} z_1, \ldots, e^{i(n_{j-1}-n_j)\theta} z_{j-1}, 1, e^{i(n_{j+1}-n_j)\theta} z_{j+1}, \ldots, e^{i(n_{k+1}-n_j)\theta} z_{k+1}). \end{aligned}$$

On voit donc que l'action de $g(\theta)$ dans le voisinage $\mathbb{C}(z_1, \ldots, z_{j-1}, 1, z_{j+1}, \ldots, z_{k+1})$ de p_j isomorphe à $\mathbb{C}^k$ est linéarisée et transforme le point de coordonnées $(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_{k+1})$ dans le point de coordonnées

$$(e^{i(n_1-n_j)\theta} z_1, \ldots, e^{i(n_{j-1}-n_j)\theta} z_{j-1}, e^{i(n_{j+1}-n_j)\theta} z_{j+1}, \ldots, e^{i(n_{k+1}-n_j)\theta} z_{k+1}).$$

Nous avons calculé dans la section 8 le déterminant de la transformation $\mathscr{L}(J)_0$ pour un champ de rotations infinitésimales sur un espace vectoriel. D'après ce calcul, on trouve $\det(\mathscr{L}(J)_{p_j})^{1/2} = \prod_{\{i|i\neq j\}}(n_i - n_j)$. On obtient donc la formule :

$$\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^k \int_{\mathbb{P}_k(\mathbb{C})} e^{uf} \frac{\Omega^k}{k!} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{e^{un_j/2}}{u^k \Big(\prod_{\{i|i\neq j\}}(n_i - n_j)\Big)}. \tag{14}$$

Remarquons que le premier membre de la formule est bien défini pour $u = 0$. Par contre le deuxième membre a apparemment un pôle d'ordre k, mais vérifions que l'expression de droite n'a en fait pas de pôles. La somme

$$\frac{1}{u^k} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{e^{un_j/2}}{\prod_{\{i|i\neq j\}}(n_i - n_j)}$$

fait intervenir des termes du type $\sum_{j=1}^{k+1} \frac{n_j^a}{\prod_{\{i|i\neq j\}}(n_i - n_j)}$. Évaluons le déterminant de Vandermonde afin de déterminer ces expressions.

$$V(n_1, \ldots, n_{k+1}) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ n_1 & n_2 & \ldots & n_{k+1} \\ & & & \\ n_1^k & n_2^k & \ldots & n_{k+1}^k \end{vmatrix} = \prod_{\{i,j|i\neq j, j>i\}} (n_j - n_i),$$

ce qui, en développant selon la dernière ligne, donne :

$$\begin{aligned}V(n_1,\ldots,n_{k+1})\\ &= (-1)^k n_1^k V(n_2,n_3,\ldots,n_{k+1}) + (-1)^{k+1} n_2^k V(n_1,n_3,\ldots,n_{k+1})\\ &\qquad + \cdots + (-1)^{2k} n_{k+1}^k V(n_1,\ldots,n_k)\end{aligned}$$

et donc en divisant par $V(n_1,\ldots,n_{k+1})$:

$$\begin{aligned}(-1)^k = \frac{n_1^k}{(n_2-n_1)(n_3-n_1)\cdots(n_{k+1}-n_1)} - \frac{n_2^k}{(n_2-n_1)(n_3-n_2)\cdots(n_{k+1}-n_2)}\\ + \cdots + (-1)^k \frac{n_{k+1}^k}{(n_{k+1}-n_1)\cdots(n_{k+1}-n_k)}.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{n_j^k}{\prod_{\{i|i\neq j\}}(n_i-n_j)} = (-1)^k. \tag{15}$$

Pour $a<k$, on calcule le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ n_1 & n_2 & n_3 & \ldots & n_{k+1}\\ \vdots & & & & \\ n_1^a & n_2^a & n_3^a & \ldots & n_{k+1}^a\\ \vdots & & & & \\ n_1^{k-1} & n_2^{k-1} & n_3^{k-1} & \ldots & n_{k+1}^{k-1}\\ n_1^a & n_2^a & n_3^a & \ldots & n_{k+1}^a \end{vmatrix}$$

qui s'annule puisqu'il a deux lignes égales. En développant selon la dernière ligne, on obtient, si $a<k$,

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{n_j^a}{\prod_{\{i|i\neq j\}}(n_i-n_j)} = 0. \tag{16}$$

On voit donc d'après la formule (16) que tous les termes négatifs du développement en série de Laurent de

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{e^{un_j/2}}{\Big(\prod_{\{i|i\neq j\}}(n_i-n_j)\Big)u^k}$$

sont effectivement nuls tandis que le terme constant nous donne d'après la formule (15)

$$\int_{\mathbb{P}_k(\mathbb{C})} \frac{\Omega^k}{k!} = \frac{\pi^k}{k!}.$$

Nous allons vérifier de manière élémentaire que

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{P}_k(\mathbb{C})) = \frac{\pi^k}{k!}$$

en utilisant un système de coordonnées appropriées. Soit $\Delta_k \subset \mathbb{R}^k$ le k-simplexe standard défini par

$$\Delta_k = \big\{(t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid t_j \geqslant 0,\ \textstyle\sum_{j=1}^k t_j \leqslant 1\big\}.$$

On sait que le volume de Δ_k est $(k!)^{-1}$.

Soit $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k) \in [0, 2\pi]^k$. Considérons l'application de $\Delta_k \times [0, 2\pi]^k$ dans S^{2k+1} définie par

$$z_1 = t_1^{1/2} e^{i\phi_1}, \dots,\ z_k = t_k^{1/2} e^{i\phi_k},\ z_{k+1} = \Big(1 - \sum_{j=1}^k t_j\Big)^{1/2}. \tag{17}$$

Tout point de S^{2k+1} est équivalent à l'image d'un point de $\Delta_k \times [0, 2\pi]^k$ par cette application. En effet, il suffit de multiplier $z \in S^{2k+1}$ par $e^{i\phi}$ de façon à ce que la dernière coordonnée z_{k+1} devienne un nombre réel. On pose $t_1 = |z_1|^2, \dots, t_k = |z_k|^2$, et on alors $t_j \geqslant 0$,, $\sum_{j=1}^k t_j \leqslant 1$ et $z_{k+1} = (1 - \sum_{j=1}^k t_j)^{1/2}$. On en déduit une application surjective

$$s : (\Delta_k \times [0, 2\pi]^k) \longrightarrow \mathbb{P}_k(\mathbb{C}).$$

On vérifie que l'application ainsi définie est bijective de l'intérieur de $\Delta_k \times [0, 2\pi]^k$ sur l'ouvert de $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$ dont le complémentaire est l'hypersurface $\prod_{j=1}^{n+1} z_j = 0$, qui est de dimension $2k - 2$. D'autre part, si $z = x + iy = t^{1/2} e^{i\phi}$ on a $dxdy = \frac{1}{2} dt d\phi$. L'image réciproque de Ω par l'application s est donc simplement la 2-forme $\frac{1}{2} \sum_j dt_j \wedge d\phi_j$. On obtient alors

$$\frac{\Omega^k}{k!} = \frac{1}{2^k} dt_1 \cdots dt_k d\phi_1 \cdots d\phi_k.$$

On a donc bien

$$\int_{\mathbb{P}_k(\mathbb{C})} \frac{\Omega^k}{k!} = \frac{1}{2^k} (2\pi)^k \operatorname{Vol}(\Delta_k) = \frac{\pi^k}{k!}.$$

12. Un analogue de la formule de localisation pour les polytopes convexes

Considérons d'abord le cas d'un triangle Δ de sommets ABC :

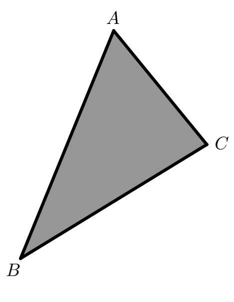

FIGURE 2

L'intégrale de surface $\int_\Delta e^{\langle y,x\rangle} dx_1dx_2$ peut se calculer de la manière suivante :

$$\int_\Delta e^{\langle y,x\rangle} dx_1 dx_2 = \int_\Delta e^{y_1x_1+y_2x_2} dx_1dx_2 = \frac{e^{\langle A,y\rangle}}{\langle y,AB\rangle\langle y,AC\rangle}|AB\wedge AC| \\ + \frac{e^{\langle B,y\rangle}}{\langle y,BA\rangle\langle y,BC\rangle}|BA\wedge BC| + \frac{e^{\langle C,y\rangle}}{\langle y,CA\rangle\langle y,CB\rangle}|CA\wedge CB|$$

où $\langle A,y\rangle = a_1y_1 + a_2y_2, (a_1,a_2)$ étant les coordonnées de $A, (y_1,y_2)$ celles de y.

Dans le cas particulier où Δ_1 est le triangle rectangle isocèle de sommets les points de coordonnées $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,0)$,

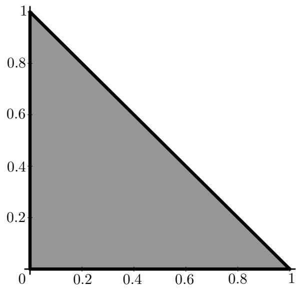

FIGURE 3

l'intégrale de surface précédente s'écrit alors :

$$\int_{\Delta_1} e^{y_1x_1+y_2x_2} dx_1dx_2 = \frac{1}{y_1y_2} + \frac{e^{y_1}}{(-y_1)(y_2-y_1)} + \frac{e^{y_2}}{(-y_2)(y_1-y_2)}.$$

Dans ce cas, c'est un cas particulier de la formule de localisation. Elle peut s'obtenir en calculant une intégrale sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$: $\{(z_1,z_2,z_3) \mid |z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2 = 1\}_{/\sim}$ et $\sim$ est la relation d'équivalence $(z_1,z_2,z_3) \sim (e^{i\phi}z_1, e^{i\phi}z_2, e^{i\phi}z_3)$.

Considérons l'action de S^1 par $e^{i\phi}\cdot(z_1,z_2,z_3) = (e^{in_1\phi}z_1, e^{in_2\phi}z_2, z_3)$. Calculons

$$I(u) = \int_{\mathbb{P}_2(\mathbb{C})} e^{uf+\Omega},$$

avec $f(z_1,z_2,z_3) = \frac{1}{2}(n_1|z_1|^2 + n_2|z_2|^2)$ et où Ω est la 2-forme symplectique de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ définie dans la section précédente.

En utilisant la formule de localisation (14) (pour $k = 2$, on obtient d'après la section précédente :

$$\frac{1}{(2\pi)^2} I(u) = \frac{1}{u^2}\left[\frac{e^{un_1/2}}{(n_2-n_1)(-n_1)} + \frac{e^{un_2/2}}{(n_1-n_2)(-n_2)} + \frac{1}{n_1n_2}\right].$$

D'autre part, effectuons le changement de coordonnées (17) décrit dans la section précédente :

$$z_1 = \sqrt{t_1}\,e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \sqrt{t_2}\,e^{i\varphi_2}, \quad z_3 = \sqrt{1-(t_1+t_2)}.$$

L'intégrale $I(u)$ devient

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{t_1\geqslant 0,\, t_2\geqslant 0,\, t_1+t_2\leqslant 1} e^{\frac{u}{2}(n_1t_1+n_2t_2)}dt_1dt_2d\varphi_1d\varphi_2 \\ &= \pi^2\int_{t_1\geqslant 0, t_2\geqslant 0, t_1+t_2\leqslant 1} e^{\frac{u}{2}(n_1t_1+n_2t_2)}dt_1dt_2. \end{aligned}$$

En posant $un_1/2 = y_1$, $un_2/2 = y_2$, on trouve

$$\int_{\Delta_1} e^{y_1t_1+y_2t_2}dt_1dt_2 = \frac{1}{y_1y_2} + \frac{e^{y_1}}{(-y_1)(y_2-y_1)} + \frac{e^{y_2}}{(-y_2)(y_1-y_2)}.$$

Ici les valeurs de y_1 et y_2 ne sont pas quelconques, car $y_1/y_2 = n_1/n_2$ est rationnel. Cependant, par continuité on pourrait en déduire la formule pour tout y_1, y_2.

La formule d'intégration d'une exponentielle sur un triangle se généralise aux polyèdres convexes par un résultat de M. Brion. Nous esquissons la démonstration donnée dans [**BrV**]. Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et soit P un polygone convexe de sommets $\{S\} \subset V$ et tel que par chaque sommet S passent exactement n arêtes $V_1^S, \dots, V_n^S \in V$. On dira que P est simple. Une pyramide égyptienne de base carrée ne satisfait pas cette hypothèse, mais le cas générique est le cas simple, comme le montre le dessin suivant, en bougeant un peu les faces de la pyramide parallèlement à elles-même, on crée de nouveaux sommets par lesquels ne passent plus que 3 arêtes :

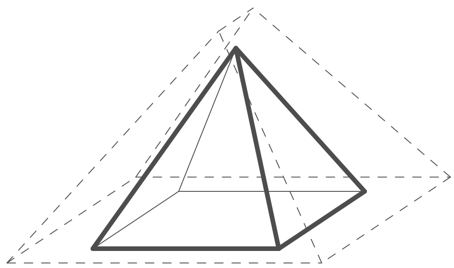

FIGURE 4

Soit $y \in V^*$. Alors

$$\int_{P\subset V} e^{\langle y,x\rangle}dx = (-1)^n \sum_{S\in \text{ sommets de } P} \frac{e^{\langle S,y\rangle}}{\langle V_1^S, y\rangle\cdots\langle V_n^S, y\rangle}|V_1^S\wedge\cdots\wedge V_n^S|.$$

Ce théorème peut se déduire de la formule de localisation. La première étape consiste à se ramener au cas où les sommets sont rationnels auquel cas il existe une variété symplectique M (éventuellement singulière) de dimension $2n$ avec une action de

$$\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n \text{ fois}}$$

(le tore de dimension n) et un ouvert U de M, dont le complémentaire est de dimension $\dim M - 2$, tel que $U \simeq \mathring{P}\times S^1\times\cdots\times S^1$, la forme symplectique sur M s'écrivant

$\frac{1}{2}(dx_1 \wedge d\varphi_1 + dx_2 \wedge d\varphi_2 + \cdots)$. Cette variété est munie d'une application $f : M \to P$. Les points fixes de l'action du tore de dimension n sur cette variété M se projettent par f sur les sommets du polyèdre P. La formule de localisation pour l'intégrale sur M de $e^{u\langle f(m),y\rangle+\Omega}$ donne le résultat cherché.

Toutefois il est possible de donner une démonstration directe de cette formule, sans passer par l'outil de la cohomologie équivariante. Pour démontrer la formule d'intégration d'une exponentielle sur un polyèdre convexe dans $\mathbb{R}^n$, on utilise le fait que la fonction caractéristique de ce polyèdre convexe peut s'écrire comme somme, avec coefficients ± 1, de fonctions caractéristiques de cônes (c'est une manière de comprendre la caractéristique d'Euler) (voir [**BV**]). Par exemple dans $\mathbb{R}^2$, on écrit facilement la fonction caractéristique d'un polygone comme somme, avec coefficients ± 1, de fonctions caractéristiques de régions du plan, égales, soit au plan tout entier, ou délimitées par une droite ou deux droites sécantes.) Nous esquissons la démonstration.

Appliqué au triangle $\Delta = (A, B, C)$, on a, au sens de la somme des fonctions caractéristiques χ des régions représentées,

$$\chi_\Delta = \chi_{\Gamma_A} + \chi_{\Gamma_B} + \chi_{\Gamma_C} - \chi_{\Gamma_{AB}} - \chi_{\Gamma_{AC}} - \chi_{\Gamma_{BC}} + 1_{\mathbb{R}^2},$$

comme il est facile de le vérifier sur la figure 5.

Prenons la transformée de Fourier de la fonction χ_Δ. C'est la fonction analytique de y_1, y_2 égale à

$$\int_\Delta e^{i(y_1x_1+y_2x_2)}dx_1dx_2.$$

On l'écrit donc :

$$\int_{\Gamma_A} e^{i(y_1x_1+y_2x_2)}dx_1dx_2 + \int_{\Gamma_B} e^{i(y_1x_1+y_2x_2)}dx_1dx_2 + \int_{\Gamma_C} e^{i(y_1x_1+y_2x_2)}dx_1dx_2$$
$$- \int_{\Gamma_{BC}} e^{i(y_1x_1+y_2x_2)}dx_1dx_2 - \int_{\Gamma_{AC}} e^{i(y_1x_1+y_2x_2)}dx_1dx_2 - \int_{\Gamma_{AB}} e^{i(y_1x_1+y_2x_2)}dx_1dx_2$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(y_1x_1+y_2x_2)}dx_1dx_2.$$

D'autre part la fonction transformée de Fourier d'une demi-droite

$$\int_{x\geqslant 0} e^{iyx}dx$$

est une distribution en y qui vaut $(-iy)^{-1}$ lorsque y n'est pas nulle, tandis que la tranformée de Fourier de la mesure d'une droite

$$\int_{x\in\mathbb{R}} e^{iyx}dx$$

est la fonction généralisée δ_0 nulle sauf en 0.

Donc, si on choisit un point $y \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\langle AB, y\rangle \neq 0, \langle BC, y\rangle \neq 0, \langle CA, y\rangle \neq 0$, on voit que dans la somme précédente les seules distributions non nulles en ce point

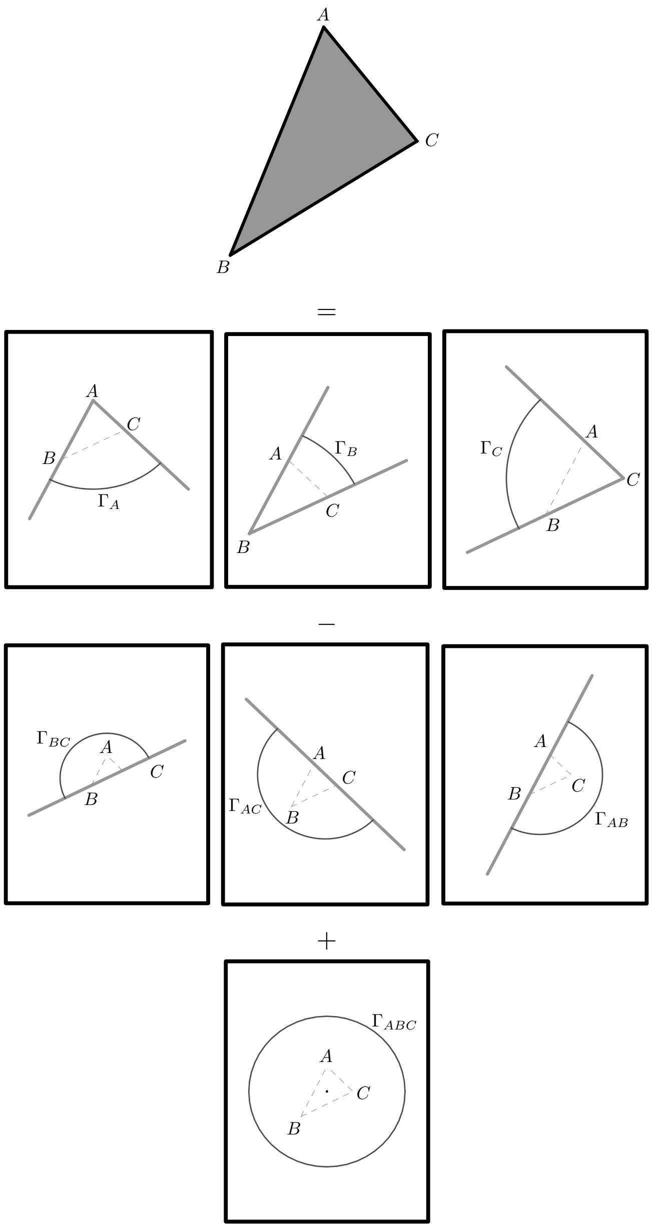

FIGURE 5. Les cônes Γ_A, Γ_B et Γ_C sont des cônes saillants, les cônes Γ_{BC}, Γ_{AC} et Γ_{AB} sont des demi-espaces et le cône Γ_{ABC} est le plan $\mathbb{R}^2$ tout entier.

sont les transformées de Fourier des cônes saillants Γ_A, Γ_B et Γ_C. On a par exemple

$$\int_{\Gamma_A} e^{i(y_1x_1+y_2x_2)}dx_1dx_2 = \frac{e^{\langle A,iy\rangle}}{\langle iy,AB\rangle\langle iy,AC\rangle}|AB\wedge AC|.$$

En un tel point y on obtient donc la formule

$$\begin{aligned}\int_{\Delta} e^{i(y_1x_1+y_2x_2)}dx_1dx_2 &= \frac{e^{\langle A,iy\rangle}}{\langle iy,AB\rangle\langle iy,AC\rangle}|AB\wedge AC| \\ &\quad + \frac{e^{\langle B,iy\rangle}}{\langle iy,BA\rangle\langle iy,BC\rangle}|BA\wedge BC| + \frac{e^{\langle C,iy\rangle}}{\langle iy,CA\rangle\langle iy,CB\rangle}|CA\wedge CB|\end{aligned}$$

ce qui donne l'expression attendue d'après les calculs précédents.

Remarquons que

$$\int_{\Delta} e^{i(y_1x_1+y_2x_2)}dx_1dx_2$$

est une fonction analytique de y_1, y_2, alors que l'expression obtenue a apparemment des pôles en y. Nous avons vérifié dans l'exemple correspondant à $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ qu'en fait il n'y a pas de pôles.

13. Une application de la formule de localisation : le théorème de Duistermaat-Heckman

Soit M une variété compacte orientée de dimension 2ℓ, soit f une fonction C^∞ sur M et $|dx|$ une densité C^∞ strictement positive sur M. Soit p un point stationnaire de f, c'est-à-dire un point où $df = 0$. Soit H_p la hessienne de f au point p. On a alors $H_p(X,Y) = (\mathscr{L}(X)\mathscr{L}(Y)f)(p)$ et on vérifie que $H_p(X,Y)$ ne dépend que des valeurs des champs X, Y en p. On suppose que les points stationnaires de f sont isolés et non dégénérés (*i.e.* H_p est une forme quadratique non dégénérée sur $T_p(M)$) en tout point stationnaire p. Soit t une variable réelle. Alors $F(t) := \int_M e^{itf}|dx|$ a un comportement asymptotique lorsque t tend vers $+\infty$ du type :

$$F(t) = \sum_{\{p\in M|df_p=0\}} \frac{(2\pi)^\ell}{t^\ell} e^{\pi i\frac{\mathrm{sign}(H_p)}{4}} |\det H_p(e_i,e_j)|^{-1/2} e^{itf(p)} + 0(t^{-\ell-1})$$

où $\mathrm{sgn}(H_p)$ désigne la signature de la forme quadratique H_p et (e_i) est une base de T_pM de volume 1 par rapport à la densité $|dx|$. C'est le théorème de la phase stationnaire.

La formule de Duistermaat-Heckman (qui s'applique dans le cas où M est une variété symplectique) donne un cas où cette formule asymptotique devient exacte. On se donne une action de S^1 sur M par transformations symplectiques. On note $-J$ le champ hamiltonien correspondant. Notons Ω la forme symplectique de M. On suppose qu'il existe une fonction hamiltonienne f pour l'action, c'est-à-dire une fonction vérifiant $df = i(J)\Omega$. De la relation liant f et Ω et de la relation $d\Omega = 0$, on vérifie que la forme $uf + \Omega$ est une forme équivariante fermée. On considère alors la formule de localisation appliquée à $\alpha(u) = e^{uf+\Omega}$.

De la relation $df = i(J)\Omega$, f étant la fonction hamiltonienne associée au champ hamiltonien J, on déduit que les points critiques de f correspondent aux zéros du champ J. La formule de localisation dans le cas de zéros isolés pour l'action de S^1 donne (en changeant u en it) :

$$\int_M e^{itf+\Omega} = \int_M e^{itf} \frac{\Omega^\ell}{\ell!} = \frac{(-2\pi)^\ell}{(it)^\ell} \sum_{\{p \mid df_p = 0\}} \frac{e^{itf(p)}}{\det^{1/2}(\mathscr{L}(J)_p)}$$

où, dans la première égalité, on a utilisé le fait que le terme de degré maximal de la forme $e^{uf+\Omega}$ est $\frac{\Omega^\ell}{\ell!}e^{uf}$ et, dans la deuxième égalité, que celui de degré 0 est e^{uf}.

Pour montrer que c'est la formule de phase stationnaire exacte, il reste à montrer que

$$i^\ell \det{}^{-1/2}(\mathscr{L}(J))_p = e^{\pi i \operatorname{sign}(H_p)/4} |\det H_p(e_i, e_j)|^{-1/2}. \tag{18}$$

Lemme 9. — *Le hessien de la fonction f au point p est donnée par la formule*

$$H_p(X, Y) = -\Omega_p(\mathscr{L}(J)_p X, Y).$$

Démonstration. — Il faut calculer $\mathscr{L}(X)\mathscr{L}(Y)f$ pour deux champs de vecteurs X, Y. On a $\mathscr{L}(Y)f = i(Y)df = i(Y)i(J)\Omega$. Donc

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(X)(\mathscr{L}(Y)f) &= \mathscr{L}(X)(i(Y)i(J)\Omega)\\ &= i([X,Y])i(J)\Omega + i(Y)i([X,J])\Omega + i(Y)i(J)\mathscr{L}(X)\Omega.\end{aligned}$$

Comme J s'annule en p, il vient

$$\mathscr{L}(X)\mathscr{L}(Y)f(p) = \Omega_p([X,J],Y) = -\Omega_p(\mathscr{L}(J)_p X, Y). \qquad \square$$

On peut choisir une base symplectique $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_\ell, Q_\ell$ de V telle que la transformation $\mathscr{L}(J)_p$ soit donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_1(p) \\ a_1(p) & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -a_\ell(p) \\ a_\ell(p) & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas la matrice H_p est la matrice

$$H_p = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(p) & 0 \\ 0 & a_1(p) \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} a_\ell(p) & 0 \\ 0 & a_\ell(p) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors de vérifier l'égalité voulue (18) en dimension 2 pour les matrices

$$\mathscr{L}(J)_p = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad H_p = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Si $a > 0$, la signature de H_p est 2, le premier membre de l'égalité est ia^{-1} tandis que le deuxième membre est $e^{i\pi/2}a^{-1}$. De même si a est négatif, le premier membre est ia^{-1} et le deuxième membre est $e^{-i\pi/2}|a|^{-1}$.

On obtient donc l'égalité voulue. Par l'outil de la formule de localisation en cohomologie équivariante, on a obtenu une démonstration de la formule de la phase stationnaire exacte de Duistermaat-Heckman.

14. Le cas général de la formule de localisation pour un champ avec zéros non isolés

Cette section présente succinctement des résultats dont on pourra trouver une démonstration dans [**BGV**], chapitre 7.

Soit M une variété sur laquelle agit un groupe de Lie compact G. Un fibré vectoriel réel ou complexe $\pi : E \to M$ de base M sur lequel le groupe G agit (à gauche) fibre par fibre (*i.e.* tel que $\gamma \cdot \pi = \pi \cdot \gamma \ \forall \gamma \in G$) et agit par des transformations linéaires sur chaque fibre s'appelle fibré équivariant sur M. Une connexion ∇^E sur E est dite invariante si elle commute avec l'action de G :

$$\gamma \cdot \nabla^E = \nabla^E \cdot \ \gamma$$

pour tout $\gamma \in G$ étant entendu que G agit à la fois sur T^*M et sur E.

Soit $J \in \mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On note $\overline{J}$ le champ sur M tangent en $x \in M$ à la courbe $\exp(-\theta J)$. On note $\mu^E(J)$ l'opérateur différentiel sur les sections du fibré E défini par :

$$\mu^E(J) = \mathscr{L}^E(J) - \nabla^E_{\overline{J}},$$

$\mathscr{L}^E(J)$ désignant la dérivée de Lie sur les sections de $E, \overline{J}$ le champ canonique associé à J. L'opérateur $\mu^E(J)$ est d'ordre 0, *i.e.* il est donné fibre par fibre par l'action d'un élément de $\mathrm{End}(E)$. On note encore $\mu^E(J)$ la section du fibré $\mathrm{End}(E)$ tel que

$$\mu^E(J)s = \mathscr{L}^E(J)s - \nabla^E_{\overline{J}}s$$

pour toute section s du fibré E. Nous appelons $\mu^E(J)$ la fonction moment de la connexion ∇^E.

Supposons le fibré E réel orienté de dimension paire et munie d'une structure euclidienne. Supposons que la connexion ∇^E soit une connexion euclidienne. Alors, en chaque point m de M, $\mu^E(J)$ au point m est un endomorphisme antisymétrique de la fibre E_m. Remarquons qu'en un point p où $\overline{J}_p$ s'annule,

$$\mu^E(J)_p = \mathscr{L}^E(J).$$

C'est la transformation linéaire infinitésimalement orthogonale de la fibre E_p tangente à l'action du groupe à un paramètre $\exp\theta J$ dans la fibre E_p.

On introduit la courbure équivariante de la connexion ∇^E : si $J \in \mathfrak{g}$,

$$R^E_G(J) = \nabla^E\nabla^E + \mu^E(J)$$

qui définit un élément R^E_G de $\mathscr{A}_G(M, \mathrm{End}(E)) = (\mathbb{C}[\mathfrak{g}]\otimes\mathscr{A}(M,E))^G$. La forme d'Euler équivariante du fibré euclidien orienté E est donnée par

$$\chi^E_G(J) := \det{}^{1/2}(-R^G(J)) \quad \text{pour tout J} \in \mathfrak{g}.$$

La racine carrée du déterminant est déterminée par l'orientation. Cette formule définit une forme équivariante fermée et sa classe en cohomologie ne dépend ni de la connexion ni de la structure euclidienne sur E. Par contre elle dépend de l'orientation.

Soit $M^J = \{p \in M \mid \overline{J}_p = 0\}$. On peut vérifier ([**BGV**, prop. 7.12]) que M^J est une sous-variété de M et que le fibré normal $\mathscr{N}$ de M^J dans M (on a $T_pM = T_pM^J \oplus \mathscr{N}_p$) est un fibré vectoriel orientable de rang pair noté $\mathrm{rg}(\mathscr{N})$.

Soit $J \in \mathfrak{g}$ et supposons que le groupe à un paramètre engendré par J soit isomorphe au groupe S^1. Considérons l'action du groupe à un paramètre $g(\theta) = \exp(-\theta J)$ sur M. On considère une forme équivariante $\alpha(u)$ pour cette action, donc $\alpha(u) \in \mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}(M)^J$ vérifie $(d - u\, i(J))\alpha(u) = 0$.

Supposons que M soit une variété compacte orientée. On a alors

$$\int_M \alpha(u) = (-2\pi)^{\mathrm{rg}\,\mathscr{N}/2} \int_{M^J} \frac{\alpha(u)_{|M^J}}{\det^{1/2}((\nabla^{\mathscr{N}})^2 + u\mu^{\mathscr{N}}(J))}$$

où $\nabla^{\mathscr{N}}$ est une connexion euclidienne $G(J)$ invariante (où $G(J)$ est le sous groupe de G laissant stable J) sur le fibré normal $G(J)$-équivariant $\mathscr{N}$ et

$$\mu^{\mathscr{N}}(J)\xi = [\overline{J}, \xi] \quad \forall\, \xi \in \mathscr{N}.$$

Ici les orientations de M, M^J et $\mathscr{N}$ sont choisies de manière compatible. En utilisant la forme d'Euler équivariante, ceci s'écrit

$$\int_M \alpha(u) = (2\pi)^{\mathrm{rg}\,\mathscr{N}/2} \int_{M^J} \frac{\alpha(u)_{|M^J}}{\chi^{\mathscr{N}}_G(uJ)}.$$

Ces formules se démontrent en suivant un cheminement analogue à celui qui conduit à la formule de localisation dans les cas des zéros isolés. Par la forme de Paradan, on se ramène à démontrer la formule de localisation pour une forme équivariante à support compact dans un voisinage G-invariant de 0 de M^J, voisinage qu'on identifie à un voisinage de la section nulle dans le fibré vectoriel euclidien orienté $G(J)$ équivariant $\mathscr{N}$.

Dans ce cas, la formule de localisation pour une forme équivariante à support compact sur un fibré vectoriel orienté $\mathscr{N} \to P$ de dimension paire sur une variété compacte P se déduit des résultats suivants :

(1) On peut construire une forme de Thom $T(uJ)$ sur un fibré vectoriel euclidien orienté $\mathscr{N}$ qui soit une forme équivariante fermée dont l'intégrale sur la fibre soit identiquement 1.

(2) On vérifie que celle-ci est unique en cohomologie

(3) On montre que $H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(\mathscr{N}) = H^*_{S^1}(P)\cdot T(uJ)$ où $H^*_{S^1,\mathrm{cpt}}(\mathscr{N})$ est la cohomologie équivariante à support compact de l'espace total du fibré $\mathscr{N}$, et $H^*_{S^1}(P)$ la cohomologie équivariante de la variété compacte P.

(4) Si $i : P \to \mathscr{N}$ est la section nulle, $i^* : H^*_{S^1}(\mathscr{N}) \to H^*_{S^1}(P)$ correspond à l'évaluation à la section nulle et la forme d'Euler équivariante s'écrit en cohomologie $\chi^E_G(uJ) \equiv (2\pi)^{(\mathrm{rg}\,\mathscr{N})/2} i^*T(uJ)$. On retrouve ici que sa classe ne dépend pas du choix de la connexion.

D'après le calcul fait dans le cadre d'un espace vectoriel (voir la formule (12), section 8), en un zéro isolé de $\overline{J}_p$, on a :

$$i_p^*T(u) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{\ell} \left(\det(u\mathscr{L}(\overline{J})_p)\right)^{1/2}$$

où ici 2ℓ est la dimension de M et la formule de localisation ci-dessus donne bien :

$$\int_M \alpha(u) = (-2\pi)^{\ell} \sum_{\{p\mid \overline{J}_p=0\}} \frac{i_p^*\alpha(u)}{u^{\ell}\det(\mathscr{L}(\overline{J})_p)^{1/2}}.$$

Références

[AB] M. Atiyah & R. Bott – « The moment map and equivariant cohomology », *Topology* **23** (1984), p. 1–28.

[BGV] N. Berline, E. Getzler & M. Vergne – *Heat kernels and Dirac operators*, 2ème éd., Springer-Verlag, 1996.

[BV] N. Berline & M. Vergne – « Classes caractéristiques équivariantes. Formules de localisation en cohomologie équivariante », *C.R.A.S.* **295** (1982), p. 539–541.

[BrV] M. Brion & M. Vergne – « Lattice points in simple polytopes », *JAMS* **10** (1997), p. 371–392.

[C] H. Cartan – « La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal », in *Colloque de Topologie*, 1950, p. 57–71.

[DH] J. Duistermaat & G. Heckman – « On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space », *Inventiones Math.* **69** (1982), p. 259–268, Addendum, Inventiones Math. **72** (1983), p. 153-158.

[JK] L. Jeffrey & F. Kirwan – « Localization for non abelian group actions », *Topology* **34** (1995), p. 291–327.

[MQ] V. Mathai & D. Quillen – « Superconnections, Thom classes and equivariant differential forms », *Topology* **25** (1986), p. 25–110.

[P] P.E. Paradan – « The moment map and equivariant cohomology with generalized coefficients », *Topology* **39** (2000), p. 401–444.

[Q] D. Quillen – « Superconnections and the Chern character », *Topology* **24** (1985), p. 37–41.

[W1] E. Witten – « Supersymmetry and Morse theory », *J. Diff. Geom.* **17** (1982), p. 661–692.

[W2] ______, « Two dimensional gauge theories revisited », *J. Geom. Phys.* **9** (1992), p. 303–368.

M. Vergne, Centre de Mathématiques, École polytechnique, F-91128 Palaiseau cedex, France
E-mail : vergne@math.polytechnique.fr