Séminaires & Congrès
8, 2004, p. 165–310

LE THÉORÈME DE POSITIVITÉ, LE THÉORÈME DE COMPARAISON ET LE THÉORÈME D'EXISTENCE DE RIEMANN

par

Zoghman Mebkhout

Résumé. — Dans ce cours on définit le complexe d'irrégularité d'un complexe holonome le long d'un espace analytique complexe. On montre que c'est un faisceau pour un module holonome et une hypersurface. On montre le critère fondamental de la régularité qui permettra d'établir la nullité du faisceau d'irrégularité. On montre que toutes les propriétés fonctorielles de la régularité sont conséquences du critère fondamental. On montre le théorème d'existence du type de Riemann en construisant explicitement des réseaux canoniques à l'aide du théorème d'extension des faisceaux analytiques cohérents. On montre enfin le théorème d'existence du type de Frobenius concernant les complexes holonomes d'ordre infini.

***Abstract* (The Positivity Theorem, the Comparison Theorem and Riemann's Existence Theorem)**

In this lecture we define the irregularity complex of an holonomic complex along a complex analytic space and we prove that it is a sheaf for an holonomic module and an hypersurface. We prove the fondamental regularity criterium giving the vanishing of the irregularity sheaf. We prove that all the fonctorial properties of the regularity are consequences of the fondamental criterium. We prove the existence theorem of Riemann type by building explicit lattices using the extension theorem for analytic coherent sheaves. We finally prove the existence theorem of Frobenius type for holonomic complexes of infinite order.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 12, 14, 32.
Mots clefs. — Positivité, faisceau d'irrégularité, critère fondamental de la régularité, théorème de comparaison, réseau canonique.

Table des matières

Formulaire des Six opérations de Grothendieck et leurs compatibilités

$X \xrightarrow{f} Y$

$\overset{L}{\otimes}$ $\quad \underline{R\mathrm{Hom}}$ $\qquad R\mathrm{Hom}, \Gamma_X$

$\overset{L}{\otimes} F \quad \underline{R\mathrm{Hom}}(F, -) \qquad \tau_F \quad h_F$

$Rf_* \quad Lf^*$

$Rf_! \quad Rf^!$

$\tau_1 \simeq id \qquad h_1 \simeq id$

$1 \otimes F \simeq F \otimes 1 \simeq F \quad \underline{R\mathrm{Hom}}(1, F) \simeq F$

$F \otimes G \simeq F \otimes G \qquad \tau_F \otimes \tau_G \simeq \tau_G \otimes \tau_F$

$(F \otimes G) \otimes H \simeq F \otimes (G \otimes H) \qquad \tau_{F \otimes G} \simeq \tau_F \otimes \tau_G$

$\underline{R\mathrm{Hom}}(F \otimes G, H) \simeq \underline{R\mathrm{Hom}}(F, \underline{R\mathrm{Hom}}(G, H))$

$\underline{R\mathrm{Hom}}(F, G \overset{L}{\otimes} H) \longleftarrow \underline{R\mathrm{Hom}}(F, G) \otimes H$

$R\mathrm{Hom}(F, G) \simeq R\Gamma_X(\underline{R\mathrm{Hom}}(F, G))$

$\mathrm{Hom}(F, G) = H^0 R\mathrm{Hom}(F, G) = H^0_X(\underline{R\mathrm{Hom}}(F, G))$

$Lf^*(1) \simeq 1_X$

$Lf^*(F \otimes_Y G) \simeq Lf^*F \otimes Lf^*G$

$Lf^* \tau_G = \tau_{Lf^*F} \circ Lf^* \longrightarrow R\Gamma_X(F) = R\mathrm{Hom}(1, F)$

$R\Gamma_X \simeq R\Gamma_Y Rf_*$

$X \quad F$, $f \downarrow$, $Y \quad G$

$Rf_*(\underline{R\mathrm{Hom}}_X(Lf^*G, F)) \simeq \underline{R\mathrm{Hom}}_Y(G, Rf_*(F))$

$[\mathrm{Hom}(Lf^*G, F) \simeq \mathrm{Hom}(G, Rf_*F)]$

$\boxed{Rf_* \underline{R\mathrm{Hom}}_X(F, Rf^!G) \simeq \underline{R\mathrm{Hom}}_Y(Rf_!F, G)}$

$[\mathrm{Hom}_X(F, Rf^!G) \simeq \mathrm{Hom}_Y(Rf_!F, G)]$

$\boxed{Rf_!(F \otimes_X Lf^*(G)) \simeq Rf_!(F) \otimes_Y G}$

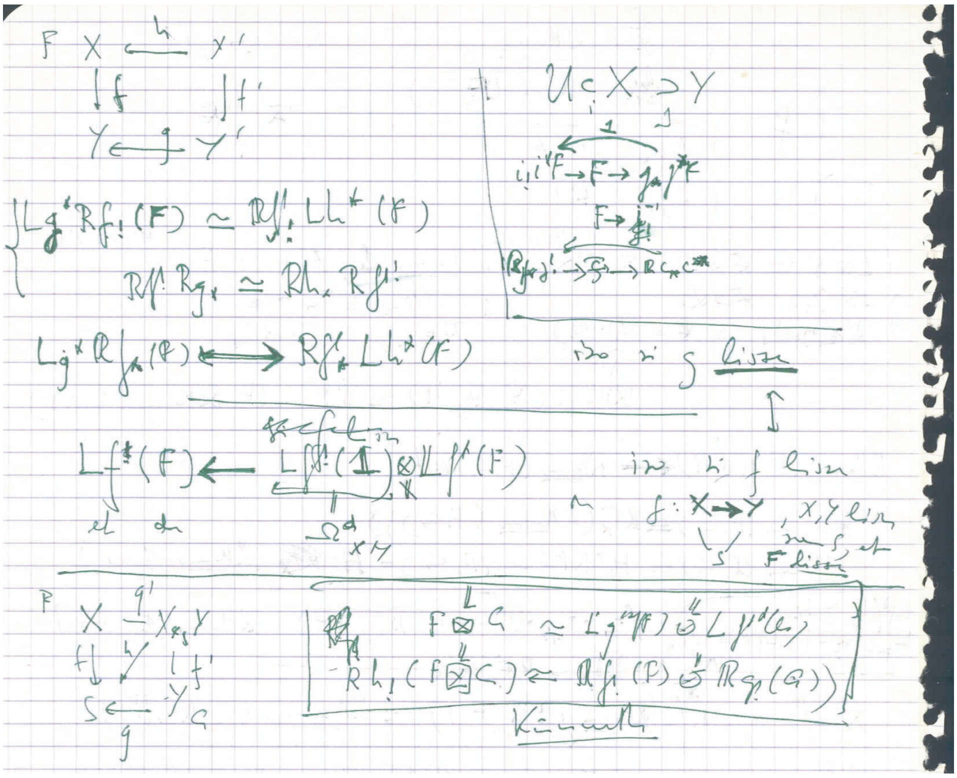
$Rf_! \circ \tau_{Lf^*(G)} \simeq \tau_G \circ Rf_!$

$h_{Lf^*G} \circ Rf^! \simeq Rf^! \circ h_G$

$\underline{R\mathrm{Hom}}_X(Lf^*G, Rf^!H) \simeq Rf^!(\underline{R\mathrm{Hom}}(G, H))$

$Rf_*(F \otimes_X Lf^*G) \longleftarrow Rf_*(F) \otimes_Y G$

pas iso



Notes de Alexandre Grothendieck d'un mini cours donné à Mormoiron dans le Vaucluse (France) en mai 1983 donnant un formulaire des six opérations cohomologiques et de leurs compatibilités.

1. Introduction

Ce texte est la rédaction du cours fait par l'auteur à l'école de Séville en septembre 1996. Ce premier chapitre est une longue introduction qui a pour but d'aider l'étudiant à comprendre l'origine des notions développées dans ce cours et leurs possibles évolutions. Les références pour cette introduction se trouvent à la fin du chapitre I.

1.1. Si X est un espace topologique localement compact réel, on peut définir ses nombres de Betti $B_i(X)$ comme les dimensions de ses espaces de cohomologie rationnelle $H^i(X;\mathbb{Q})$. Le problème central, qui s'est posé au milieu du vingtième siècle, est de définir les nombres de Betti pour les variétés algébriques dites abstraites. Ce problème est motivé par les propriétés arithmétiques de la fonction zêta d'une variété algébrique sur les corps finis.

1.2. En effet selon l'idée de A. Weil [**W**] la structure géométrique d'une variété algébrique a une grande influence sur sa structure arithmétique. Par exemple la localisation des valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius opérant sur la cohomologie d'une variété algébrique sur un corps fini détermine le comportement asymptotique du nombre de ses points à valeurs dans l'extension de degré h du corps de base quand $h \to \infty$, tout comme la localisation des zéros de la fonction zêta d'Euler-Riemann implique le théorème des nombres premiers donnant la répartition des nombres premiers.

1.3. En fait précisément la motivation de B. Riemann qui l'a conduit à proposer son hypothèse était le théorème des nombres premiers. Le théorème des nombres premiers a été démontré à la fin du dix-neuvième siècle par Hadamard et de la Vallée-Poussin à l'aide de la théorie des fonctions analytiques complexes d'une variable, mais l'hypothèse de Riemann reste encore un problème ouvert. Pourtant elle a servi de guide à une bonne partie de la géométrie algébrique et à la théorie des nombres contemporaines.

1.4. L'idée de Weil a été poussée jusqu'à son ultime aboutissement par A. Grothendieck qui a mis en évidence que pour étudier convenablement la cohomologie en toutes dimensions il faut définir la cohomologie à valeurs dans un faisceau en géométrie algébrique. L'étude de la cohomologie d'une variété se ramène le plus souvent à l'étude de la cohomologie d'une courbe à valeurs dans un système local de coefficients d'un type particulier. C'est là une réduction tout à fait prodigieuse comme nous l'illustrerons tout au long de ce cours.

1.5. Pour cette réduction Grothendieck, ses élèves et collaborateurs ont créé la topologie étale et construit la catégorie des coefficients ℓ-adiques sur toute variété algébrique et pour tout nombre premier ℓ distinct de la caractéristique du corps de base. Ils ont montré que cette catégorie est stable par les six opérations cohomologiques

([**SGA4**], [**SGA5**]). Ils ont introduit à cette occasion en très peu de temps de nombreuses idées extrêmement fécondes. Ces idées ont envahi de nombreux domaines des mathématiques en y mettant de l'ordre dans des situations les plus inextricables et les plus variées, ce qui a permis de résoudre des problèmes majeurs.

1.6. Le premier succès de cette théorie est la démonstration de la formule de trace de Grothendieck, obtenue en la réduisant à une formule de type Lefschetz sur une courbe mais à valeurs dans un faisceau constructible [**G1**]. La formule des traces fournit une expression cohomologique de la fonction zêta d'une variété algébrique quelconque sur un corps fini qui entraîne en particulier sa rationalité.

1.7. Un peu plus tard la formule des traces a permis à P. Deligne ([**D2**], [**D3**]) de montrer, par la même méthode de réduction au cas des courbes, qu'en fait les pôles et les zéros de cette fonction zêta sont des nombres purs, c'est-à-dire des nombres algébriques dont tous les conjugués ont même valeur absolue complexe qui est une puissance de la racine carrée de la caractéristique du corps fini. Ce résultat est l'analogue de l'hypothèse de Riemann sur les corps finis en dimensions supérieures.

1.8. Le but de ce cours est de développer une « théorie des coefficients » pour la topologie de Zariski sur une variété algébrique non singulière sur un corps de caractéristique nulle qui est parallèle à la « théorie des coefficients ℓ-adiques sur un corps de caractéristique positive ». L'intérêt majeur de cette théorie est son lien très étroit avec la théorie géométrique des équations différentielles et c'est cet aspect là qui nous intéresse le plus.

1.9. Pour tout nombre premier ℓ, la catégorie des coefficients ℓ-adiques a un sens sur toute variété algébrique au-dessus d'un corps de caractéristique nulle. Cette catégorie est d'ailleurs fort intéressante. Elle produit par exemple des représentations concrètes des groupes de Galois des corps de nombres comme l'important H^1 d'une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$, celui là même qui intervient dans la démonstration de A. Wiles du théorème de Fermat. Mais elle ne peut pas être considérée comme l'analogue de la catégorie des coefficients ℓ-adiques sur un corps de caractéristique positive parce que la théorie de la ramification y est triviale. Or précisément, dans les démonstrations plus récentes la théorie de la ramification joue un rôle essentiel.

1.10. Cependant la catégorie des coefficients constructibles garde un sens pour la topologie transcendante d'une variété algébrique complexe. Cette catégorie a été un modèle et un guide très précieux dans la première construction de la catégorie des coefficients que nous avons en vue. En particulier tout le formalisme de dualité et des six opérations cohomologiques se transpose de façon particulièrement naturelle dans ce contexte-là. Cela a été mis en évidence dans le séminaire de l'École Normale Supérieure 1974-75 [**V**] où l'auteur de ce cours a appris l'existence de ce formalisme avant la publication de [**SGA5**]. Ce fait a eu naturellement un rôle très important pour la théorie que nous avons développée.

1.11. Grothendieck avait suggéré qu'une telle théorie, qu'il appelle dans ses mémoires « Théorie des Coefficients de de Rham » en un sens très large, doit s'obtenir à l'aide de la cohomologie de de Rham [**G3**]. Dans l'esprit de Grothendieck, suggérée par sa théorie des Motifs, cette théorie doit compléter la série des théories ℓ-adiques aussi bien en caractéristique nulle qu'en caractéristique positive. La théorie en caractéristique nulle doit être préliminaire à la théorie en caractéristique $p > 0$. Mais la théorie en caractéristique $p > 0$ pose des difficultés considérables du point de vue technique et conceptuel, difficultés liées précisément à la ramification p-adique. Celles-ci dépassent de très loin les considérations générales, n'étaient sans doute pas prévues par Grothendieck et commencent aujourd'hui à peine à être comprises et surmontées. Aujourd'hui on a mis au point une théorie des équations différentielles p-adiques qui est à la base de la construction d'une théorie des coefficients p-adiques sur les courbes parallèle à la théorie ℓ-adique qui a les propriétés de finitude requises et qui permet de démontrer tous les résultats sur la fonction zêta sur les corps finis toujours par réduction au cas des courbes obtenus auparavant par voie ℓ-adique, ce qui montre que c'est la bonne théorie. Cependant la théorie des équations différentielles p-adiques en dimensions supérieures posent de nouveaux problèmes qui sont aujourd'hui inaccessibles.

1.12. Le théorème de comparaison de Grothendieck-Deligne ([**G2**], [**D1**]) a fourni le point de départ de la théorie des coefficients en caractéristique nulle. Nous allons résumer pour le lecteur les différentes étapes qui ont permis de la construire.

1.13. Dans le cas où l'espace X est une variété différentiable compacte M, Élie Cartan avait conjecturé que les nombres de Betti $B_i(M)$ de la variété M sont égaux aux dimensions des espaces des i-formes différentiables fermées à valeurs réelles modulo les i-formes différentiables exactes. Cette conjecture prouvée par G. de Rham en 1933 est devenue le célèbre théorème de de Rham. De façon plus précise on a le théorème de comparaison :

Théorème. — *Si M est une variété différentiable on a les isomorphismes canoniques de comparaison :*

$$H^i(M;\mathbb{R}_M) \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{dR}}(M/\mathbb{R})$$

entre la cohomologie de M à valeurs dans le faisceau $\mathbb{R}_M$ des fonctions localement constantes et la cohomologie de de Rham des formes fermées modulo les formes exactes.

De nos jours la démonstration est formelle à partir, d'une part, du lemme de Poincaré : le complexe de de Rham $(\Omega^\bullet_M, d)$ est une résolution du faisceau $\mathbb{R}_M$ des fonctions localement constantes, et d'autre part, de l'acyclicité cohomologique du faisceau des j-formes différentielles : $H^i(M;\Omega^j_M) = 0$, $i > 0$, $j \geqslant 0$. On peut étendre le théorème de de Rham au cas de la cohomologie de de Rham à coefficients dans un fibré différentiable à connexion intégrable. Cela n'introduit aucune difficulté nouvelle. Nous renvoyons le lecteur qui voudrait en savoir plus sur le contexte et le rôle joué par théorème de de Rham dans la théorie des faisceaux et de la cohomologie au livre de J. Dieudonné [**Di**].

1.14. A. Grothendieck a transposé [**G2**] le théorème de de Rham en géométrie algébrique. Si X est une variété algébrique sur un corps k on a encore le complexe de de Rham $(\Omega^{\bullet}_{X/k}, d)$ des formes différentielles régulières pour la topologie de Zariski. On définit avec Grothendieck [**G2**] les espaces de cohomologie de de Rham $H^i_{\mathrm{dR}}(X/k)$ comme les espaces d'hypercohomologie $\mathbf{H}^i(X; \Omega^{\bullet}_{X/k})$ du complexe de de Rham, qui sont alors des k-espaces vectoriels.

Théorème 5.1–1. — *Si X est une variété algébrique non singulière sur un sous-corps k du corps des nombres complexes on a les isomorphismes canoniques de comparaison :*

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X/k) \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^i(X(\mathbb{C}); \mathbb{C})$$

entre les espaces de cohomologie de Rham algébrique et les espaces de cohomologie de la variété analytique complexe sous-jacente à valeurs dans le faisceau des fonctions complexes localement constantes.

Le théorème de Grothendieck reconstitue algébriquement les nombres de Betti à partir d'un complexe de faisceaux pour la topologie de Zariski et permet alors de définir les nombres de Betti $B_{\mathrm{dR},i}(X/k)$ d'une variété algébrique non singulière X/k sur un corps de caractéristique nulle comme les dimensions $\dim_k H^i_{\mathrm{dR}}(X/k)$ des espaces de cohomologie de de Rham. Les nombres de Betti ainsi définis ont les propriétés formelles des nombres de Betti d'une variété différentiable. En effet le principe de Lefschetz ramène le cas d'un corps de caractéristique nulle ou cas d'un sous-corps du corps des nombres complexes. Le cas des variétés définies sur un corps de caractéristique $p > 0$ pose des problèmes de nature différente.

1.15. Le théorème précédent, au dire de Grothendieck lui-même, a été conjecturé par A. Kostant pour les variétés affines, mais ce qui est important pour nous est sa localisation dans la catégorie dérivée introduite à cette occasion par Grothendieck.

1.16. L'étape suivante a été réalisée par Deligne [**D1**] qui a étendu le théorème de comparaison précédent au cas d'un fibré vectoriel de rang localement fini à connexion intégrable régulière à l'infini. Le théorème de comparaison n'a pas lieu en géométrie algébrique pour un fibré vectoriel de rang localement fini à connexion intégrable sans condition de régularité à l'infini et introduit de nouvelles structures par rapport au fibré trivial. C'est là une différence essentielle avec le cas différentiable qui s'est révélée être plus tard une des clefs du problème même pour le cas des coefficients constants. Grothendieck, qui n'était pas versé dans la théorie des équations différentielles à points singuliers réguliers, n'avait pas vu en posant le problème qu'il fallait imposer une condition de régularité à l'infini ([**G2**], note 13).

Si $\mathscr{E}$ est le faisceau des sections régulières d'un fibré vectoriel à connexion intégrable sur une variété algébrique X sur un corps k on définit de même ses espaces de cohomologie de de Rham $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathscr{E}/k)$ comme les espaces d'hypercohomologie $\mathbf{H}^i(X; \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^{\cdot}_{X/k})$ du complexe de de Rham, qui sont alors des k-espaces vectoriels.

Théorème 5.2–1. — *Soient X une variété algébrique non singulière sur un sous-corps k du corps des nombres complexes et $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de rang fini à connexion intégrable et* régulier à l'infini *alors on a les isomorphismes canoniques de comparaison :*

$$H^i_{\mathrm{dR}}(\mathscr{E}/k) \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^i(X(\mathbb{C}); \mathscr{L})$$

entre les espaces de cohomologie de Rham algébrique de $\mathscr{E}$ et les espaces de cohomologie de la variété analytique complexe sous-jacente à valeurs dans le système local $\mathscr{L}$ des sections horizontales de $\mathscr{E}$.

1.17. Nous avons passé sous silence dans l'énoncé précédent la notion essentielle de fibré à connexion intégrable *régulier à l'infini.* C'est en fait là le point crucial que nous allons expliquer maintenant.

1.18. En dimension 1 la bonne définition est fournie par le théorème de Fuchs qui définit algébriquement un entier positif attaché à une singularité d'une équation différentielle dont la nullité caractérise un point singulier régulier. Les propriétés des équations différentielles à points singuliers réguliers sont faciles à établir parce qu'on peut lire le nombre de Fuchs sur l'équation.

1.19. En dimension supérieure c'est une question délicate qui a mis longtemps avant de prendre sa forme définitive. La raison est qu'en dimension supérieure il n'existe pas de compactification naturelle sans singularités. Deligne est obligé soit d'invoquer une compactification d'Hironaka pour définir la notion de fibrés à connexion intégrables *régulier à l'infini* auquel cas leurs propriétés sont immédiates comme à une variable, soit de les définir intrinsèquement sans compactification, mais il lui faut alors invoquer le théorème d'Hironaka pour démontrer leurs propriétés.

1.20. Il était devenu clair au début des années quatre vingt du siècle dernier, que cette méthode était limitée et était à l'origine de nombreux blocages et redites si on voulait en particulier faire des calculs explicites. La résolution des singularités était le seul moyen de produire des exemples non triviaux de fibrés à connexion intégrable et réguliers à l'infini, ce qui ne pouvait conduire qu'à des impasses. L'auteur de ce cours pense que ceci a eu pour effet de retarder la solution de nombreux problèmes de nature cohomologique en géométrie algébrique.

1.21. Pour avoir la bonne définition il faut revenir à la démonstration de Grothendieck. En géométrie algébrique les faisceaux des formes régulières sont encore cohomologiquement acycliques sur les variétés affines, mais le lemme de Poincaré local n'a plus lieu : le complexe de de Rham n'est plus acyclique en degrés positifs : une forme différentielle localement fermée n'est pas localement exacte pour la topologie de Zariski dont les ouverts sont « énormes ».

1.22. Pour passer de la topologie de Zariski à la topologie transcendante Grothendieck [**G2**] a introduit l'idée révolutionnaire en 1963 de *localisation* dans la catégorie dérivée. En utilisant le théorème de comparaison de Serre [**S**] pour les faisceaux algébriques cohérents sur une variété projective, Grothendieck a montré que l'obstruction du théorème de comparaison est l'hypercohomologie d'un objet de la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux *transcendants* d'espaces vectoriels complexes sur le diviseur à l'infini d'une compactification quelconque. Cette idée est la première manifestation non triviale d'un objet de la catégorie dérivée dont la portée, comme nous le verrons, est considérable. Ce complexe est défini pour tout fibré à connexion intégrable et s'est révélé avoir de remarquables propriétés de positivité.

1.23. La nullité dans la catégorie dérivée du complexe qui intervient dans la démonstration de Grothendieck est un problème local pour la topologie transcendante et implique en particulier le théorème de comparaison. Du point de vue technique le cœur de la preuve de Grothendieck et de Deligne est l'existence d'une compactification d'Hironaka pour une variété affine permettant de faire les calculs explicitement. Cependant pour comprendre vraiment cette démonstration il faudrait comprendre la démonstration du théorème d'Hironaka [**H**] qui, avec le problème analogue en caractéristique $p > 0$, a usé plusieurs générations.

1.24. Le but de ce cours est de développer une nouvelle approche introduite en 1986, indépendante du théorème de la résolution des singularités, du théorème de comparaison de Grothendieck-Deligne de ses variantes et généralisations à partir du théorème de positivité de l'irrégularité. Nous obtiendrons des résultats plus précis avec des démonstrations nettement plus simples et complètes. Nous verrons que le théorème de la résolution des singularités n'est pas au « fond du problème » contrairement à ce que Grothendieck pensait.

1.25. L'objet fondamental de ce cours est le faisceau, au sens dérivé, d'irrégularité d'un module holonome le long d'une hypersurface. Nous définissons le complexe d'irrégularité comme l'objet de la catégorie dérivée qui est l'obstruction au théorème de comparaison. Nous montrons qu'il a de très bonnes propriétés de positivité qui le force à être nul ipso facto dans les situations des théorèmes de comparaison précédents.

1.26. Nous montrons le Critère Fondamental de la Régularité donnant la nullité du faisceau d'irrégularité, qui peut être considéré comme le résultat central de la théorie de la régularité en dimensions supérieures et joue le rôle du théorème de Fuchs. Ce critère implique toutes les propriétés fonctorielles des modules holonomes réguliers qu'on est en droit d'attendre, en particulier le théorème de comparaison de Grothendieck-Deligne. Ce critère met sur un pied d'égalité la théorie de la régularité à plusieurs variables avec la théorie classique de la régularité à une variable. Tous les résultats concernant la régularité en dimensions supérieures, obtenus auparavant cas par cas et souvent de façon pénible, trouvent leur démonstration naturelle et de façon uniforme à partir du critère fondamental de la régularité qui surmonte les difficultés causées par les singularités géométriques.

1.27. Comme on on peut le constater la terminologie « irrégularité » n'est certes pas appropriée, mais introduite par les mathématiciens du dix-neuvième siècle, est devenue par la force des choses familière.

1.28. Les singularités géométriques les plus difficiles à résoudre n'interviennent pas dans le critère fondamental de la régularité, il est donc inutile de les résoudre. Le problème se ramène au cas d'un fibré sur une surface non singulière qui se ramifie le long d'une courbe, situation qui est proche de celle de la théorie ℓ-adique, mais avec une dimension en plus.

1.29. Le cycle caractéristique du faisceau d'irrégularité qui se définit de manière algébro-géométrique au-dessus d'un corps de caractéristique nulle est un cycle positif. Ses multiplicités, des entiers naturels positifs, jouent le rôle du nombre de Fuchs. Le théorème de positivité place la théorie géométrique des équations différentielles à plusieurs variables sur un même pied que la théorie des équations différentielles à une variable. Ce point de vue peut être considéré comme le point de vue moderne de la théorie géométrique des équations différentielles qui la met sans doute dans une forme définitive du point de vue théorique. Maintenant le problème est le calcul effectif du faisceau d'irrégularité et de son cycle caractéristique.

1.30. Il est apparu depuis ce résultat que de nombreux problèmes de nature cohomologique en géométrie algébrique, au-dessus d'un corps de caractéristique $p > 0$ ou d'un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0, p)$ ou d'égales caractéristiques $p > 0$, ne nécessitent que des formes élémentaires de résolutions des singularités et de ce fait ont été résolus naturellement aussitôt l'idée mise en évidence.

1.31. La notion de système holonome, introduite sous le nom de système surdéterminé maximum, remonte sans doute à Élie Cartan, voire à Lagrange. Elle était aussi connue des physiciens, par M. Sato et ses élèves en liaison avec leur théorie micro-locale ([**SKK**], définition 4.1.1, page 419). C'est la notion de finitude algébrique de base. Il n'est pas d'ailleurs fortuit de constater qu'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent est holonome si et seulement si sa variété caractéristique est lagrangienne.

1.32. Comme l'a observé Mikio Sato dès le départ l'espace des « solutions » d'un système holonome est de dimension finie. Cette propriété de finitude est la plus importante du point de vue de la théorie des équations différentielles. De façon plus précise le théorème de constructibilité de M. Kashiwara [**K**] fournit un foncteur de la catégorie des modules holonomes dans la catégorie des coefficients constructibles. Le théorème de constructibilité a joué un rôle essentiel dans la théorie. C'est un résultat remarquable et fondateur. Si son auteur n'avait pas omis la référence à la théorie des coefficients constructibles, cela aurait permis sans doute un développement plus harmonieux de la théorie qui n'aurait pas laissé de place à bien des abus des uns et des autres. Malheureusement, c'est là le prototype même de comportements qui ont eu cours ces dernières décennies et qui ont eu des effets désastreux pour la promotion des mathématiques, dont nos générations et sans doutes les générations futures n'ont pas fini de payer le prix.

1.33. La catégorie des modules holonomes avait tendance dès le début des années 1970 à avoir des propriétés de finitude analogues à celle de la catégorie des complexes constructibles.

1.34. Il s'est produit du point de vue historique des faits similaires pour le théorème de de Rham et le théorème de Grothendieck-Deligne. En effet la démonstration originale de de Rham est très compliquée, mais elle a contribué de façon essentielle au fondement de la théorie des faisceaux et de la cohomologie qui en retour a permis d'en donner une démonstration conceptuelle.

1.35. De même la première démonstration du théorème de Grothendieck-Deligne repose de façon essentielle sur le théorème d'Hironaka qui est un théorème très profond et techniquement très compliqué, mais a contribué de façon essentielle au fondement de la théorie géométrique des équations différentielles à plusieurs variables et ses nombreuses applications.

1.36. Le plus grand succès de la théorie géométrique des équations différentielles est la théorie des catégories triangulées munies de t-structures, dont le couple $(\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X), D^b_h(\mathscr{D}_X))$ est l'exemple fondateur. Ceci a contribué entre autre à la définition de la catégorie triangulée des motifs mixtes par plusieurs auteurs. En retour elle a permis une démonstration directe du théorème de comparaison qui peut être considérée comme conceptuelle et élémentaire, dont on peut suivre facilement tous les pas. De même elle a permis à G. Laumon de simplifier considérablement la démonstration de Deligne du théorème de pureté en dimension 1 sur les corps finis.

1.37. Le point de départ de l'étude de l'irrégularité à plusieurs variables est l'analogie évidente, illustrée par les formules d'Euler-Poincaré, entre les propriétés arithmétiques de la ramification des faisceaux ℓ-adiques sur une courbe et les propriétés transcendantes de l'irrégularité sur le corps des nombres complexes des équations différentielles sur une surface de Riemann. Le théorème de semi-continuité de l'irrégularité d'une famille d'équations différentielles est l'analogue du théorème de Deligne de semi-continuité du conducteur de Swan d'une famille de faisceaux ℓ-adiques sur des courbes.

1.38. La démonstration de Deligne [**D1**] du théorème de comparaison pour un fibré à connexion intégrable consiste d'abord à montrer le théorème d'existence de type de Riemann à l'aide d'une compactification d'Hironaka : construire à partir du système local des sections horizontales d'un fibré à connexion intégrable, un fibré à connexion intégrable régulier à l'infini. On obtient comme cela un fibré qui est isomorphe au fibré de départ si ce dernier est régulier à l'infini. Il suffit alors de montrer le théorème de comparaison pour la forme normale, ce qui est élémentaire.

1.39. Nous procédons en sens inverse en montrant directement à partir du théorème de positivité que le théorème de comparaison en toute dimension est conséquence du théorème de comparaison local pour les fibrés méromorphes sur un petit voisinage de zéro dans $\mathbb{C}^2$ réguliers le long d'un germe d'une courbe. La résolution des singularités ne joue aucun rôle dans cette réduction.

1.40. Une fois acquis ce fait nous montrons le théorème d'existence de type de Riemann en construisant un *réseau canonique* à partir d'un système local d'espaces vectoriels complexes de dimension finie en utilisant le théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents. Cette approche est beaucoup plus précise que la précédente et ouvre, comme nous le verrons, de nouvelles perspectives.

1.41. Cette méthode, comme l'a montré B. Malgrange dans son cours de cette même école, permet de construire des réseaux canoniques pour les connexions méromorphes irrégulières où la résolution des singularités est de toute façon insuffisante. Par exemple lorsque le lieu de ramification est lisse, cas non trivial dans la situation irrégulière, la résolution des singularités ne sert à rien.

1.42. L'un des buts fixés par les organisateurs de l'école du Cimpa de Nice de 1990 était la démonstration géométrique du théorème de constructibilité. L'un des buts fixés par les organisateurs de l'école du Cimpa de Séville de 1996 est la démonstration du théorème de comparaison. La démonstration géométrique du théorème de constructibilité et la démonstration du théorème de comparaison relèvent du même principe par récurrence sur la dimension. Pour le théorème de constructibilité la récurrence commence à partir du cas trivial de la dimension zéro. Pour le théorème de comparaison la récurrence commence à partir du cas non trivial de la dimension 2. Les cas des dimensions zéro et un sont sans intérêt. Mais la chose très importante à avoir à l'esprit est que le cas de la dimension 2 *ne se ramène pas* au cas de la dimension 1. C'est là un exemple de situation pour les équations différentielles à plusieurs variables où le cas de la dimension 2 est crucial et est profondément différent du cas de la dimension 1. C'est un principe qui semble général et motive l'étude en profondeur des exemples d'équations différentielles à deux variables à la manière des équations différentielles d'une variable.

1.43. Nous attirons l'attention du lecteur sur l'importance des questions de variance dans les catégories dérivées, en particulier la distinction entre l'existence d'un morphisme et l'existence d'un morphisme canonique entre complexes dans les catégorie dérivées. Ainsi par exemple si l'on a deux triangles distingués et des morphismes entre deux couples de sommets, il existe en général plusieurs morphismes entre le troisième couple qui complètent le tout en un morphisme de triangles. Le lecteur se rendra compte qu'en faisant cet effort il constatera que de nombreux résultats qui étaient considérés comme difficiles et prestigieux, tels que la conservation de la régularité par un morphisme propre, sont des conséquences faciles du formalisme des catégories et des foncteurs dérivés.

1.44. Le cours du Cimpa de Nice contient une introduction essentiellement complète aux catégories dérivées, foncteurs dérivés et complexes constructibles ainsi qu'à leur utilisation dans des situations concrètes provenant de l'expérience que l'on peut tirer de la théorie des équations différentielles à plusieurs variables.

1.45. Il y a un autre point sur lequel nous voulons attirer l'attention du lecteur concernant la confusion, entretenue dans la littérature pour faire diversion, entre la situation algébrique et la situation analytique. Beaucoup de résultats sont valables aussi bien pour une variété algébrique lisse sur un corps de caractéristique nulle muni de la topologie de Zariski que sur une variété algébrique complexe munie de la topologie transcendante. Les démonstrations sont parfois similaires parfois différentes. Il y a même des résultats que se transposent au-dessus d'une variété algébrique lisse sur un corps de caractéristique positive.

1.46. Mais les résultats liés à la monodromie des équations différentielles ne sont valables que pour une variété analytique ou algébrique complexe munie de la topologie transcendante et c'est là le point important. Il n'y a pas de substitut algébrique de la monodromie pour la topologie de Zariski. C'est très exactement pour cela que la topologie de Zariski n'est pas assez fine pour les étudier les questions de nature arithmétiques et qu'il faille la remplacer par la topologie étale. Précisément la question cruciale dans les problèmes de nature arithmétique est toujours de trouver un substitut de la monodromie des équations différentielles. La clef du succès de la théorie ℓ-adique est que les représentations du groupe fondamental étale [**SGA1**] fournissent un substitut sensible aux représentations de monodromie des équations différentielles.

1.47. L'étudiant ne doit pas perdre de vue que les considérations générales, aussi importantes soient elles, ont des limites et que les problèmes de fond restent liés aux questions concernant la géométrie et l'arithmétique des variétés éventuellement singulières, leurs cohomologies et les singularités des équations différentielles. C'est là un domaine de recherche incomparable et est sans doute loin d'être épuisé. Aussi il est illusoire de croire qu'on peut obtenir des résultats significatifs sans rentrer en profondeur dans le calcul qui est invariablement le même depuis la création du calcul infinitésimal. D'un autre coté les calculs aveugles ne mènent nulle part. Au bout d'un certain temps ils doivent dégager un théorème de structure pour pouvoir progresser. Les résultats de ce cours ont été précédés d'innombrables calculs pendant plusieurs années qui bien entendu n'apparaissent pas dans le texte final. En particulier le théorème de positivité a été observé d'abord dans de nombreux exemples explicites.

1.48. Conformément à l'esprit et au but des écoles du Cimpa, à savoir fournir aux étudiants des références commodes, nous ne ferons appel qu'aux exposés de l'école de Nice de 1990 et de l'école de Séville de 1996. Nous avons indiqué dans la bibliographie de l'introduction les points qui nous semblent avoir été les plus importants dans la théorie, tous antérieurs à l'année 1975. À partir de là, les démonstrations sont complètes et les définitions précises, c'est là le principal intérêt d'un tel cours. Une phrase qu'on lit souvent dans la littérature : « soit un module régulier », sans plus de précision, ne veut rien dire parce que souvent on énonce quelque chose qui est déjà utilisée dans la définition ou ce n'est pas cette définition qui implique le résultat qu'on veut démontrer. L'équivalence entre deux définitions qui ont des conséquences clairement distinctes mais qui se complètent, est souvent un théorème hautement non trivial. Le rôle d'une définition pour qu'elle soit utile est de fournir immédiatement des exemples non triviaux. Nous conseillons aux étudiants de ne pas se contenter d'appliquer un théorème, ou une définition sans chercher à comprendre la démonstration du théorème et l'intérêt de la définition. Par exemple la difficulté à comprendre la démonstration du théorème d'Hironaka en un temps raisonnable nous a motivé à chercher des démonstrations indépendantes de ce théorème. Un étudiant qui souhaite assimiler pleinement la théorie doit refaire lui même toutes les démonstrations.

1.49. Il y a tout de même trois points qui sont utilisés sans démonstration dans ce cours qui auraient mérité leur place dans cette école :

1) l'existence d'une résolution plongée d'un germe de courbe plane complexe,
2) l'existence d'une résolution d'un germe de surface complexe et enfin,
3) le théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents.

1.50. Il existe de nombreuses références pour les résolutions des singularités des courbes plongées. Il existe deux méthodes de résolution des surfaces, celle de Zariski qui consiste à normaliser puis éclater le lieu singulier et la méthode de Jung-Walker qui consiste à utiliser la résolution plongée des courbes. Là aussi on dispose de nombreux exposés d'accès facile. C'est d'ailleurs un très bon exercice de géométrie de faire soi même les démonstrations. Le théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents a fait l'objet de l'exposé 336 au séminaire Bourbaki par A. Douady en 1969. Il serait intéressant d'avoir un exposé mis à jour de ce théorème qui est resté marginal avant son utilisation dans le théorème d'existence du type de Riemann.

1.51. Dans les applications arithmétiques du calcul différentiel on est amené à considérer, au lieu d'une variété algébrique définie sur le corps des nombres complexes, une variété définie sur un corps p-adique. La topologie d'un tel corps est totalement discontinue et le prolongement analytique, qui joue un rôle essentiel dans le cas complexe, n'a plus de sens. Il faut procéder autrement, la théorie est beaucoup plus difficile mais fort intéressante. Le fait de s'être débarrassé de tout ce qui n'est pas indispensable dans la théorie des équations différentielles complexes a permis de faire des progrès dans la théorie des équations différentielles p-adiques.

1.52. Cette école ayant été organisée par le Cimpa, nous nous permettons de rajouter quelques mots pour les étudiants qui pour une raison ou pour une autre se trouvent isolés quelques parts dans notre monde et exclus d'office du système. C'est bien sûr un grand handicap de se retrouver dès le départ sans environnement ou dans un environnement sclérosé ou hostile ou les deux à la fois, ce qui est souvent le cas. Il est facile d'assimiler la subtilité d'une notion enseignée de vive voix. Mais il est beaucoup plus difficile de la découvrir soi-même, ce qui peut prendre plusieurs années. Le facteur temps est essentiel dans la formation d'un jeune chercheur. C'est là où se situe la différence, à talent naturel comparable, entre ceux qui réussissent et ceux qui ne réussissent pas. Mais l'avantage des mathématiques, quand on est attiré par elles, est qu'on n'a besoin que de très peu de choses. Il suffit d'un peu de foi, de persévérance et de quelques livres. Les théories qui paraissent les plus inaccessibles de prime abord, ont souvent une longue histoire humaine riche et finissent par livrer leurs secrets. L'histoire du théorème de Fermat ou de l'hypothèse de Riemann, qui n'a cependant pas encore livré tout son secret, sont des exemples fascinants à cet égard. Le travail est la seule façon de contribuer et d'enrichir le débat scientifique par les points de vue venant d'horizons divers, pouvant garantir son équilibre, son authenticité et sa pérennité en échappant à tout monopole destructeur. Ce qui compte vraiment est l'effort de recherche honnête et sans concessions. Les mathématiques d'aujourd'hui sont le résultats des efforts de tous les hommes depuis plus de deux mille ans, elles sont une activité collective qui se poursuit depuis des millénaires. Il y a certes des hommes qui ont plus d'influence que d'autres hommes, mais ceci ne peut être tranché que par l'épreuve du temps et certainement pas décrété a priori. Le progrès est à la fois une notion objective et tangible qui ne doit pas dépendre de l'arbitraire ou des préjugés des hommes. Toutes les civilisations à travers les âges y ont contribué. Aucun groupe, aussi puissant soit-il sur le terrain à un moment donné, ne peut prétendre à l'exclusivité et exclure autrui du savoir et de la connaissance.

1.53. Comme illustration, les résultats de ce cours sont appliqués à la démonstration complète du théorème de comparaison pour les cycles évanescents qui fait l'objet du cours dans ce même volume rédigé en collaboration avec Philippe Maisonobe.

1.54. Ce cours comporte 11 chapitres. Chaque chapitre est centré sur un thème clef indiqué dans le titre. La table des matières donne une idée du contenu de chaque chapitre. L'étudiant peut étudier chaque chapitre séparément en le complétant éventuellement selon ses intérêts.

1.55. Voici pour aider l'étudiant le contenu de chaque chapitre et le lien entre les différents chapitres. Le chapitre 2 reprend rapidement quelques notions bien connues exposées dans le cours [**G-M**] de l'école Cimpa de Nice en élargissant le contexte au cas d'un corps de base non nécessairement de caractéristique nulle et en faisant le lien avec le point de vue de Grothendieck du site infinitésimal. On montre que le langage des $\mathscr{D}_X$-modules fournit une démonstration simple de l'isomorphisme entre la cohomologie de de Rham d'une variété algébrique non singulière sur un corps de caractéristique nulle et la cohomologie de son site infinitésimal à valeurs dans le faisceau structural, c'est là un résultat de nature formelle. Nous signalons au lecteur que le formalisme des $\mathscr{D}_X$-modules est très largement insuffisant pour une théorie de de Rham sensible pour les variétés algébriques non singulières sur un corps de caractéristique positive. Le chapitre 3 démontre le théorème de positivité. À un triplet $(X, Z, \mathscr{M})$ où X est une variété analytique complexe, Z une hypersurface et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome, on associe le complexe d'irrégularité $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ de $\mathscr{M}$ le long de Z défini comme obstruction du théorème de comparaison. On montre que le complexe $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ a la propriété de support et la propriété de co-support et est donc un faisceau dit pervers dans la littérature. À un tel faisceau on peut associer son cycle caractéristique dans le cotangent T^*X dont les multiplicités sont des nombres positifs ce qui explique la terminologie du théorème. La démonstration procède par récurrence sur la dimension de X. On obtient de nombreuses conséquences remarquables sur la catégorie des modules holonomes réguliers le long d'une hypersurface, stabilité par sous-quotient, par cohomologie et pleine fidélité du foncteur de de Rham dans la catégorie des connexions génériquement régulières. Le chapitre 4 démontre le critère fondamental de la régularité : si le module $\mathscr{M}$ est lisse en dehors de Z le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est nul si et seulement si son support est de dimension strictement plus petite que la dimension de Z. La représentation de monodromie d'une équation différentielle permet de se réduire au cas où Z est un germe de courbe place. Toutes les propriétés de la régularité sont conséquences faciles du critère fondamental. Le chapitre 5 utilise le critère fondamental pour montrer le théorème de comparaison global de Grothendieck-Deligne. Le chapitre 6 utilise le critère fondamental pour montrer que la catégorie des complexes holonome réguliers est stables par images inverses. Le chapitre 7 utilise le critère fondamental pour montrer que la catégorie des complexes holonome réguliers est stables par dualité. Le chapitre 8 résume les résultats importants dont la démonstration est de nature non formelle. Le chapitre 9 considère le cas d'une variété algébrique complexe non singulière. Le chapitre 10 reprend le théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents et démontre le théorème d'existence du type de Riemann dans ses différentes formes. Le chapitre 11 considère le cas de la catégorie des complexes holonomes d'ordre infini et explicite un foncteur de la catégorie des complexes constructibles vers la catégorie des complexes holonomes d'ordre infini qui est un quasi-inverse au foncteur de de Rham. Ce dernier résultat généralise l'équivalence de catégories évidente entre la catégorie des fibrés vectoriels analytiques munis d'une connexion intégrable et la catégorie des systèmes locaux de vectoriels complexes sur une variété analytique complexe connue parfois comme le théorème d'existence de Frobenius. Cependant le lecteur prendra garde que, dans le cas des faisceaux constructibles ayant des singularités, la démonstration utilise tous les résultas des chapitres précédents et donc peut-être considérée, en dépit des apparences, comme le résultat le plus profond de la théorie dont la richesse n'est toujours pas épuisée.

Références bibliographiques citées dans l'introduction

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck & J.-L. Verdier – *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1963-64, Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas*, Lect. Notes in Math., vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-73.

[D1] P. Deligne – *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes in Math., vol. 163, Springer-Verlag, 1970.

[D2] ______, « La Conjecture de Weil I », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **43** (1974), p. 273–307.

[D3] ______, « La Conjecture de Weil II », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **52** (1981), p. 313–428.

[Di] J. Dieudonné – *A History of Algebraic and Differential Topology. 1900-1960*, Birkhaüser, Boston, 1989.

[G1] A. Grothendieck – « Formule de Lefschetz et Rationalité des fonctions L », in *Séminaire Bourbaki*, 1965, exposé 279.

[G2] ______, « On the de Rham cohomology of algebraic varieties », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **29** (1966), p. 95–105.

[G3] ______, « Crystals and De Rham cohomology of schemes », in *Dix exposés sur la Cohomologie des Schémas*, Advanced Studies in pures Math., vol. 3, North-Holland, 1968, p. 306–358.

[SGA1] ______, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960-61, Revêtements Étales et Groupe Fondamental*, Lect. Notes in Math., vol. 224, Springer-Verlag, 1971.

[SGA5] ______, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1965-66, Cohomologie ℓ-adique et fonctions L*, Lect. Notes in Math., vol. 589, Springer-Verlag, 1977.

[H] H. Hironaka – « Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a field of characteristic zero », *Ann. of Math.* **79** (1964), p. 109–326.

[K] M. Kashiwara – « On the maximally overdetermined systems of differential equations », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **10** (1975), p. 563–579.

[SKK] M. Sato, M. Kashiwara & T. Kawai – « Microfunctions and pseudo-differential equations », in *Hyperfunctions and pseudo-differential equations, Proc. Conf. Katata, (1971)*, Lect. Notes in Math., vol. 287, Springer-Verlag, 1973, p. 265–529.

[S] J.-P. Serre – « Géométrie algébrique et géométrie analytique », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **6** (1956), p. 1–42.

[V] J.-L. Verdier – « Classe d'homologie associée à un cycle », in *Séminaire de l'École Normale supérieure (1974-75)*, Astérisque, vol. 36-37, Société Mathématique de France, 1976, p. 101–151.

[W] A. Weil – « Number of solutions of equations over finite fields », *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), p. 497–508.

Notations

Si $\mathscr{A}$ est un faisceau d'anneaux sur un espace topologique on note $D(\mathscr{A})$ la catégorie dérivée ([**M-N1**], II) de la catégorie abélienne des $\mathscr{A}$-modules (à droite ou à gauche) et $D^b(\mathscr{A})$ sa sous-catégorie pleine des complexes à cohomologie bornée.

Rappelons qu'on dit qu'un $\mathscr{A}$-module $\mathscr{M}$ est cohérent s'il est localement de type fini et si le noyau de tout morphisme local $\mathscr{A}^m \to \mathscr{M}$ est localement de type fini. Le faisceau d'anneau $\mathscr{A}$ est dit cohérent s'il est cohérent comme $\mathscr{A}$-module.

Si le faisceau $\mathscr{A}$ est cohérent il y a alors équivalence pour un module entre être cohérent et être localement de présentation finie. Si $\mathscr{A}$ est un faisceau d'anneaux cohérent on note $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{A})$ la sous-catégorie des complexes à cohomologie bornée et cohérente. La catégorie $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{A})$ est une sous-catégorie triangulée ([**M-N1**], II).

Le lecteur prendra garde du fait que la cohérence d'un faisceau d'anneaux est souvent un résultat non trivial. Par exemple le théorème de Oka sur la cohérence du faisceau des fonctions analytiques complexes sur un espace analytique forme avec les théorèmes A et B de H. Cartan les piliers de la géométrie analytique complexe.

Nous ne considérerons que les $\mathscr{A}$-modules à gauche sauf rares exceptions. Nous notons $h^i(\mathscr{F})$ le i-ème faisceau de cohomologie d'un complexe $\mathscr{F}$.

2. Fondement de la Théorie des $\mathscr{D}_X$-modules

Nous reprenons quelques points bien connus du cours [**G-M**] de la théorie des $\mathscr{D}_X$-modules afin d'élargir le contexte pour des références futures et faire le lien avec le point de vue de Grothendieck des topos infinitésimal et cristallin. Nous verrons que le langage des $\mathscr{D}_X$-modules fournit une démonstration simple de l'isomorphisme entre la cohomologie de de Rham d'une variété algébrique non singulière sur un corps de caractéristique nulle et la cohomologie de son site infinitésimal à valeur dans la faisceau structural. Ce lien n'est pas utilisé dans ce cours, aussi le lecteur peut l'omettre en première lecture. Il a pour but de permettre de dépasser la rhétorique parfois stérile utilisée dans ce domaine et à encourager le lecteur à ne pas être impressionné par une terminologie savante. Pour nous il s'agit de faire des progrès et non de faire du surplace en répétant indéfiniment les mêmes choses. Cependant ce lien est indispensable pour comprendre les développements de la théorie sur un corps de caractéristique $p > 0$.

2.1. Le faisceau des opérateurs différentiels. — Le faisceau des opérateurs différentiels $\mathscr{D}\!\mathit{iff}_{X/S}(\mathscr{O}_X)$ d'un espace annelé au-dessus d'un autre $X \to S$ a été défini et étudié par Grothendieck-Dieudonné dans ([E.G.A IV], § 16). Cette généralité n'est nullement superflue. Elle unifie remarquablement le cas d'une variété algébrique sur un corps de caractéristique quelconque, le cas d'un schéma au-dessus d'un autre en particulier au-dessus d'un anneau de valuation discrète, le cas d'une variété analytique, le cas d'un schéma formel, le cas d'un schéma †-adique. Chaque situation a sa problématique propre et ses intérêts.

Définition 2.1–1. — Si $f : X \to S$ est un morphisme d'espace annelé pour tout entier m on définit par récurrence le faisceau des opérateurs différentiels

$$\mathscr{D}\!\mathit{iff}^m_{X/S}(\mathscr{O}_X)$$

d'ordre borné par m comme le sous-faisceau du faisceau $\mathscr{H}\!\mathit{om}_{f^{-1}\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$ en posant $\mathscr{D}\!\mathit{iff}^0_{X/S}(\mathscr{O}_X) := \mathscr{O}_X$ et un endomorphisme local P, $f^{-1}\mathscr{O}_S$-linéaire, du faisceau structural est un opérateur différentiel d'ordre borné par m si le commutateur $[P, a] := Pa - aP$ de P avec toute section locale a de $\mathscr{O}_X$ est un opérateur différentiel d'ordre borné par $m - 1$. On définit le faisceau des opérateurs différentiels

$$\mathscr{D}\!\mathit{iff}_{X/S}(\mathscr{O}_X)$$

d'ordre localement borné comme la réunion des faisceaux $\mathscr{D}\!\mathit{iff}^m_{X/S}(\mathscr{O}_X)$ quand m varie.

Par construction le faisceau $\mathscr{D}\!\mathit{iff}_{X/S}(\mathscr{O}_X)$ est un sous-faisceau de $\mathscr{O}_X$-algèbres du faisceau des endomorphismes $\mathscr{H}\!\mathit{om}_{f^{-1}\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$ filtré par les sous $\mathscr{O}_X$-modules $\mathscr{D}\!\mathit{iff}^m_{X/S}(\mathscr{O}_X)$. On peut alors considérer le faisceau gradué $\mathscr{G}\!r(\mathscr{D}\!\mathit{iff}_{X/S}(\mathscr{O}_X))$ qui est un faisceau de $\mathscr{O}_X$-algèbres commutatives.

Mais pour avoir des propriétés de finitude raisonnables sur le faisceau des opérateurs différentiels il faut avoir des propriétés de finitude sur le faisceau gradué. C'est le cas des morphismes « lisses » de schémas qui donnent lieu au calcul différentiel algébrique analogue dans ce contexte au calcul différentiel des variétés différentiables ([E.G.A IV], § 16).

2.2. Cas d'une variété analytique complexe, cohérence, cycles caractéristiques, holonomie, dualité

2.2.1. Le faisceau des opérateurs différentiels. — Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ une variété analytique complexe. On désigne traditionnellement le faisceau $\mathscr{D}\!\mathit{iff}_{X/\mathbb{C}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$ par $\mathscr{D}_X$ et par $\mathscr{D}_X^m$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre au plus m. On utilise les notations classiques de l'analyse infinitésimale : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un système de coordonnées locales et $k = (k_1, \dots, k_n)$ est un multi-indice,

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \partial_x := (\partial_{x_1} \dots, \partial_{x_n})$$

les dérivations associées,

$$\Delta_x^k := \frac{\partial_{x_1}^{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{\partial_{x_n}^{k_n}}{k_n!}$$

les puissances divisées associées,

$$k! := k_1! \dots k_n!, \ \ |k| := k_1 + \dots + k_n, \ \ \binom{k}{\alpha} := \frac{k!}{\alpha!\,(k-\alpha)!}$$

le nombre combinatoire associé au couple $\alpha \leqslant k$, $\alpha_1 \leqslant k_1, \dots, \alpha_n \leqslant k_n$.

Théorème 2.2–1. — *Pour tout entier $m \geqslant 0$ le faisceau $\mathscr{D}_X^m$ est un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de rang fini. Plus précisément si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un système de coordonnées locales la suite des opérateurs différentiels associés Δ_x^k, $|k| \leqslant m$ est une base de $\mathscr{D}_X^m$.*

Démonstration. — La question est locale. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées locales et P un opérateur différentiel d'ordre m. On lui associe la suite $a_k(x)$, $|k| \leqslant m$ de fonctions analytiques à l'aide de la formule :

$$a_k(x) := \sum_{\alpha \leqslant k} \binom{k}{\alpha} (-x)^\alpha P(x^{k-\alpha}).$$

Notons

$$\Phi_P := \sum_{k \leqslant m} a_k(x) \Delta_x^k$$

l'opérateur différentiel d'ordre m associé aux fonctions analytiques a_k. Nous allons montrer par récurrence sur m que $P(x^k) = \Phi_P(x^k)$ et que P est *continu* pour la topologie x-adique de $\mathscr{O}_x$. Par définition d'un opérateur différentiel on a :

$$P(x_i x^k) = x_i P(x^k) + [P, x_i](x^k).$$

D'autre part on a de façon évidente

$$\Phi_{[P,x_i]} = [\Phi_P, x_i]$$

ce qui entraîne par récurrence sur l'ordre la première assertion, puis par récurrence sur ℓ que $P(x^{\ell+m})$ est contenu dans l'idéal $(x)^\ell$. Cela entraîne que $P = \Phi_P$ puisque pour une série convergente g la série $(P - \Phi_P)(g)$, qui est convergente par construction, est nulle si et seulement si la série formelle $(P - \Phi_P)(g)$ est nulle.

2.2.2. Cohérence. — À partir du théorème de Oka sur la cohérence des fonctions analytiques, on en déduit une extension $\mathscr{O}_X \to \mathscr{D}_X$ de faisceaux de $\mathbb{C}$-algèbres *cohérents* ([**G-M**], I.4.9). Il y a donc identité entre modules à gauche ou à droite sur $\mathscr{D}_X$ localement de présentation finie et modules cohérents. On dispose donc des catégories triangulées $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_X)$ et $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X)$.

Rappelons les résultats suivants. Si $\pi : T^*X \to X$ est le fibré cotangent de X le gradué $\mathscr{G}r(\mathscr{D}_X)$ pour la filtration par l'ordre s'identifie à l'image directe par la projection π du faisceau $\mathscr{O}_{[T^*X]}$ des fonctions analytiques qui sont algébriques sur les fibres. Le faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres $Gr(\mathscr{D}_X)$ est cohérent. Une filtration par des $\mathscr{O}_X$-modules $\mathscr{M}^k$, $k \geqslant 0$ d'un $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$ est localement bonne si et seulement si le gradué $\mathscr{G}r(\mathscr{M})$ associé est un $\mathscr{G}r(\mathscr{D}_X)$-cohérent ([**G-M**], II.3.1). La filtration induite sur un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ dans une présentation est bonne ([**G-M**], II.2.10). Un $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$ est cohérent si et seulement s'il admet localement des bonnes filtrations ([**G-M**], II.3.1).

Le fibré cotangent T^*X est associé au faisceau cohérent $\mathscr{G}r(\mathscr{D}_X)$ de $\mathscr{O}_X$-algèbres de présentation finie. Un $\mathscr{G}r(\mathscr{D}_X)$-module cohérent définit un cycle positif du fibré cotangent. Le cycle associé au gradué d'une bonne filtration d'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ ne dépend pas de la filtration choisie ([**G-M**], III.1.17, V.2.25). C'est le cycle caractéristique de $\mathscr{M}$, on le note alors $\mathrm{CCh}(\mathscr{M})$ qui est un cycle défini globalement. Le support du cycle caractéristique est par définition la variété caractéristique de $\mathscr{M}$. On la note $\mathrm{Ch}(\mathscr{M})$. La variété caractéristique $\mathrm{Ch}(\mathscr{M})$ d'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent est involutive : son idéal réduit dans $\mathscr{G}r(\mathscr{D}_X)$ est stable par crochet de Poisson ([**G-M**], appendice B). Ceci entraîne que les dimensions des composantes irréductibles de la variété caractéristique d'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent non nul sont bornées inférieurement par $\dim X$. Une variété involutive de T^*X de dimension égale à $\dim X$ est lagrangienne : son espace tangent en tout point lisse est égal à son orthogonal pour la deux forme canonique du fibré cotangent.

2.2.3. Holonomie, la Catégorie des Complexes Holonomes $D^b_h(\mathscr{D}_X)$

Définition 2.2–2. — On dit qu'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ est *holonome* s'il est nul ou si sa variété caractéristique est lagrangienne.

En vertu du théorème de l'involutivité des variétés caractéristiques, dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{P} \longrightarrow 0$$

de $\mathscr{D}_X$-modules cohérents le terme médian est holonome si et seulement les termes extrêmes sont holonomes. De plus on a l'égalité des cycles caractéristiques ([**G-M**], V.3.26)

$$\mathrm{CCh}(\mathscr{M}) = \mathrm{CCh}(\mathscr{N}) + \mathrm{CCh}(\mathscr{P}).$$

En particulier la catégorie $\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X)$ des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes est abélienne, stable par sous-quotient et par extension.

La catégorie des modules holonomes élargit considérablement la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules localement libres de rang fini à connexion intégrable qui apparaissent comme les $\mathscr{D}_X$-modules cohérents dont la variété caractéristique est réduite à la section nulle du fibré cotangent ([**G-M**], IV.2.4) tout comme la catégorie des faisceaux constructibles élargit la catégorie des systèmes locaux de rang fini.

On note $D^b_h(\mathscr{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X)$ des complexes à cohomologie bornée et holonome qui alors triangulée.

Le couple $(D^b_h(\mathscr{D}_X), \mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X))$ est l'exemple fondamental d'une catégorie triangulée munie d'une t-structure non triviale qui a servi de modèle à la théorie générale.

Définition 2.2–3. — On appelle *complexe holonome* un objet de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_X)$.

2.2.4. Dualité. — Pour tout point x de X la dimension homologique de la fibre $\mathscr{D}_{X,x}$ du faisceau $\mathscr{D}_X$ est égale à $n := \dim X$ ([**G-M**], V.3.7). En particulier pout tout $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ les faisceaux $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X)$ sont concentrés entre les degrés 0 et $\dim X$. De plus pour un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ le

$$grade(\mathscr{M}) := \min(i, \mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X) \neq 0)$$

est égal à la codimension de la variété caractéristique $\mathrm{Ch}(\mathscr{M})$ ([**G-M**], V.6.8). Un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ est donc holonome si et seulement si

$$\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X) = 0 \text{ pour } i \neq \dim X,$$

qui est la caractérisation homologique de l'holonomie.

Pour un $\mathscr{D}_X$-module à gauche holonome $\mathscr{M}$, le $\mathscr{D}_X$-module à droite $\mathscr{M}^\vee := \mathscr{E}xt^n_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X)$ est holonome. Le foncteur exact de dualité $\mathscr{M} \to \mathscr{M}^\vee$ est une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules à gauche holonomes et la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules à droite holonomes.

Le faisceau ω_X des n-formes différentielles holomorphes est naturellement un $\mathscr{D}_X$-module à droite holonome. Si $\mathscr{N}$ est $\mathscr{D}_X$-module à droite le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, \mathscr{N})$ est naturellement un $\mathscr{D}_X$-module à gauche ([**C**], 1.1.4).

On définit les foncteurs de dualité dans $D^b(\mathscr{D}_X)$ par :

$$\begin{aligned}\mathscr{M}^\vee &:= \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_X)[\dim X],\\ \mathscr{M}^* &:= \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X,\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_X))[\dim X].\end{aligned}$$

Le foncteur exact de dualité $\mathscr{M}\to\mathscr{M}^*$ est une anti-équivalence de catégories et est involutif de la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules à gauche holonomes dans elle même. On a alors les morphismes de bidualité :

$$\mathscr{M}\longrightarrow\mathscr{M}^{\vee\vee},\qquad \mathscr{M}\longrightarrow\mathscr{M}^{**}$$

qui sont des isomorphismes pour tout complexe $\mathscr{M}$ de la catégorie $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X)$ en vertu du lemme du way-out.

Le couple $(D^b_h(\mathscr{D}_X),\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X))$ est stable par dualité.

2.3. Cas d'une variété algébrique non singulière. — À partir du théorème de Oka : *le faisceau des fonctions holomorphes est cohérent* et le théorème B de Cartan pour les polycylindres : *la cohomologie d'un polycylindre à valeurs dans un faisceau cohérent est triviale*, dans toutes les notions précédentes, la topologie du corps des nombres complexes n'a pas joué un rôle essentiel.

Aussi on peut partir d'une variété algébrique X non singulière au-dessus d'un corps k de caractéristique $p\geqslant 0$. Le faisceau $\mathscr{O}_X$ est cohérent et la cohomologie d'une variété affine à valeurs dans un faisceau quasi-cohérent est triviale. On note $\mathscr{D}_{X/k}:=\mathscr{D}\!\mathit{iff}_k(\mathscr{O}_X)$ le faisceau des opérateurs différentiels et $\mathscr{D}^m_{X/k}$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre au plus m.

Théorème 2.3–1. — *Si X est une variété algébrique non singulière au-dessus d'un corps k de caractéristique $p\geqslant 0$, le faisceau $\mathscr{D}^m_{X/k}$ est un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de rang fini. De façon plus précise à un système de coordonnées locales x est associé une famille d'opérateurs différentiels Δ^k_x, $|k|\leqslant\ell$ caractérisée par $\Delta^k_x(x^\ell)=\delta_{k,\ell}$ pour $|k|\leqslant m$, $|\ell|\leqslant m$ qui est une base de $\mathscr{D}^m_{X/k}$.*

Démonstration. — On ne dispose pas de développement en série. Aussi il faut reprendre le point de vue de Grothendieck-Dieudonné ([E.G.A IV], § 16) en montrant que $\mathscr{D}^m_{X/k}$ est le dual des parties principales $\mathscr{P}^m_{X/k}(\mathscr{O}_X)$ d'ordre m qui est un faisceau d'algèbres sur $\mathscr{O}_X$ admettant une base ξ^k construite à partir d'un système de coordonnées locales. Les opérateurs différentiels Δ^k_x se définissent comme la base dual de ξ^k.

À partir de là, si la caractéristique p est nulle alors le faisceau gradué $\mathscr{G}r(\mathscr{D}_{X/k})$ définit encore le fibré cotangent T^*X et toutes les notions et résultats précédents se transposent avec des démonstrations plutôt plus simples.

Mais si la caractéristique $p > 0$ le faisceau gradué $\mathscr{G}r(\mathscr{D}_{X/k})$ n'est plus une $\mathscr{O}_X$-algèbre de présentation finie et est beaucoup plus grand que le faisceau des fonctions régulières du fibré cotangent à cause de l'existence des puissances divisées.

On ne peut pas procéder de la même façon. Par exemple le fibré trivial $\mathscr{O}_X$ est un $\mathscr{D}_{X/k}$-module à gauche de type fini mais non de présentation finie.

Pour pallier ces difficultés on dispose d'une nouvelle filtration sur le faisceau $\mathscr{D}_{X/k}$ induite par le morphisme de Frobenius. Supposons pour simplifier que le corps de base est parfait, c'est-à-dire que l'élévation à la puissance p est un automorphisme de corps. Pour tout entier $h \geqslant 0$ soit $\mathscr{O}_X^{p^h}$ le sous-faisceau de k-algèbres du faisceau structural engendré par les puissances p^h-ème des fonctions régulières. Alors on peut considérer les sous-faisceaux

$$\mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_X^{p^h}}(\mathscr{O}_X)$$

de k-algèbre de $\mathscr{E}nd_k(\mathscr{O}_X)$ des endomorphismes qui sont $\mathscr{O}_X^{p^h}$-linéaires. Il se trouve que $\mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_X^{p^h}}(\mathscr{O}_X)$ est un sous-faisceau de $\mathscr{O}_X$-algèbres du faisceau $\mathscr{D}_{X/k}$ et que pour h variable, ils constituent une filtration croissante exhaustive, appelée p-filtration. On note

$$\mathscr{D}_{X/k^{,h}}$$

le faisceau $\mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_X^{p^h}}(\mathscr{O}_X)$, que l'on appelle faisceau des opérateurs différentiels d'échelon h. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées locales le faisceau $\mathscr{D}_{X/k^{,h}}$ s'identifie au faisceau

$$\mathscr{O}_X[\Delta_{x_1}, \ldots, \Delta_{x_n}, \ldots, \Delta_{x_1}^{p^h}, \ldots, \Delta_{x_n}^{p^h}]$$

ce qui montre que l'anneau de ses sections globales au-dessus d'un ouvert affine est noethérien. En particulier le faisceau $\mathscr{D}_{X/k^{,h}}$ est cohérent. D'autre par les extensions $\mathscr{D}_{X/k^{,h}} \to \mathscr{D}_{X/k^{,h+1}}$ sont libres. En particulier tout $\mathscr{D}_{X/k}$-module de présentation finie, provient localement d'un $\mathscr{D}_{X/k^{,h}}$-module de présentation finie, pour un certain h. En particulier le faisceau $\mathscr{D}_{X/k}$ est cohérent.

Prendre cependant garde que l'anneau de ses sections globales au-dessus d'un ouvert affine *n'est pas* noethérien, mais un exemple remarquable d'anneau cohérent, c'est-à-dire un anneau où tout idéal de type fini est de présentation finie. La théorie des anneaux cohérents est beaucoup plus difficile que la théorie des anneaux noethériens. Il y a des différences profondes.

Pour tout h la dimension homologique de $\mathscr{D}_{X/k^{,h}}$ est égale à $\dim X$, ce qui entraîne que la dimension projective d'un $\mathscr{D}_{X/k}$-module cohérent est bornée par $\dim X$, et donc la dimension plate de $\mathscr{D}_{X/k}$ est égale à $\dim X$, c'est le théorème de Chase : « On the homological dimension of algebras of differential operators », *Comm. Algebra* **5** (1974), p. 351-363. En fait, c'est plus difficile, la dimension homologique de l'anneau des sections globales au-dessus d'un ouvert affine du faisceau $\mathscr{D}_{X/k}$ est *égale* à $\dim X$, c'est le théorème de Smith : « The global homological dimension of ring of differential operators on a non singular variety over a field of positive characteristic », *J. Algebra* **107** (1987), p. 98-105.

La propriété de finitude qui subsiste est d'être de longueur finie. Le morphisme de Frobenius a permis à R. Bogvad de montrer que les faisceaux de cohomologie locale $H^i_Y(\mathscr{O}_X)$ sont des $\mathscr{D}_{X/k}$-modules de longueur finie pour toute sous-variété éventuellement singulière Y de X : « Some results on D-modules on Borel varieties in characteristic $p > 0$ », *J. Algebra* **173** (1995), p. 638-667.

2.4. Cristaux de Grothendieck et $\mathscr{D}_X$-modules. — Grothendieck n'a pas considéré curieusement la notion de $\mathscr{D}_{X/k}$-module, mais il a défini la catégorie des cristaux sur le site infinitésimal ([**G3**]) sur un schéma X/S au-dessus d'un autre qui est équivalente, quand le schéma X est lisse sur la base S, à la catégorie des $\mathscr{D}_{X/S}$-modules à gauche. Il a aussi défini la catégorie des cristaux sur le site cristallin qui donne naissance à la cohomologie cristalline des variétés algébriques définies sur des corps de caractéristique $p > 0$. Ce paragraphe ne sera pas utilisé dans la suite de ce cours. Le lecteur est invité à l'omettre en première lecture. Il est destiné à faire le lien entre le point de vue des $\mathscr{D}_X$-modules et le point de vue des topos infinitésimal et cristallin pour mettre en évidence leurs intérêts et leurs limites respectives. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [**G3**].

Définition 2.4–1. — Soit un schéma $(X, \mathscr{O}_X)$ sur un autre schéma S, nous allons définir le site infinitésimal $\operatorname{Inf}(X/S)$. Tous les morphismes sont des morphismes de S-schémas.

1) Objet du site. Un objet du site est une immersion $U \to \overline{U}$ nilpotente d'un ouvert de Zariski de X.

2) Morphismes du site. Un morphisme du site est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & \overline{U} \arrow[d] \\ V \arrow[r] & \overline{V} \end{tikzcd}$$

où $U \to V$ est une inclusion d'ouverts pour la topologie de Zariski.

3) Topologie du site. Un recouvrement d'un objet $U \to \overline{U}$ est induit par un recouvrement de $\overline{U}$ par des ouverts de Zariski $\overline{U}_i$, $i \in I$: $(U_i \to \overline{U}_i)_{i\in I} \to U \to \overline{U}$ telle que $U_i := U \times_{\overline{U}} \overline{U}_i$ est l'ouvert induit sur U.

Les recouvrements satisfont de façon évidente aux axiomes d'une topologie de Grothendieck.

Un faisceau d'ensemble sur ce site s'identifie aux données d'un faisceau $\mathscr{F}_{U\to\overline{U}}$ sur $\overline{U}$ pour la topologie de Zariski pour tout objet $U \to \overline{U}$ et d'un morphisme de restriction $u^{-1}\mathscr{F}_{V\to\overline{V}} \to \mathscr{F}_{U\to\overline{U}}$ pour tout morphisme $u : \overline{U} \to \overline{V}$ du site. Ces données satisfont aux compatibilités évidentes pour deux morphismes $\overline{U} \to \overline{V} \to \overline{W}$ et tels que u^{-1} est un isomorphisme pour une immersion ouverte u.

En particulier le site infinitésimal est muni d'un faisceau structural $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{inf}}}$ qui est par définition

$$\mathscr{O}_{X_{\mathrm{inf}} U \to \overline{U}} := \mathscr{O}_{\overline{U}}.$$

Définition 2.4–2. — On définit la catégorie des cristaux sur le site infinitésimal comme la sous-catégorie des $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{inf}}}$-modules $\mathscr{E}$ tels que les morphismes de restriction se prolongent en des isomorphismes $u^*\mathscr{F}_{V\to\overline{V}} \to \mathscr{F}_{U\to\overline{U}}$ où u^* désigne l'image inverse d'espaces annelés.

Le résultat est que la catégorie des cristaux sur le site infinitésimal est équivalente de façon tautologique à la catégorie des $\mathscr{D}_{X/S}$-modules à gauche du moins quand X est lisse sur S. Pour montrer ce résultat il faut introduire une catégorie intermédiaire : la catégorie des modules stratifiés, terminologie qui peut prêter à confusion avec celle de la théorie géométrique des stratifications des espaces.

Soient X un schéma au-dessus d'un autre S, $\Delta^1(m)$ le m-ème voisinage de la diagonale dans le produit double $X \times_S X$ et $\Delta^2(m)$ le m-ème voisinage de la diagonale dans le produit triple $X \times_S X \times_S X$. On a alors le diagramme des projections canoniques :

$$X \overset{p_1(m)}{\underset{p_2(m)}{\leftleftarrows}} \Delta^1(m) \overset{\xleftarrow{\phantom{p_{31}(m)}}}{\underset{p_{21}(m)}{\overset{p_{31}(m)}{\xleftarrow{p_{32}(m)}}}} \Delta^2(m)\ .$$

Définition 2.4–3. — Une m-connexion sur un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{E}$ est la donnée d'une *donnée de descente* : un isomorphisme

$$\phi : p_1(m)^*\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} p_2(m)^*\mathscr{E}$$

satisfaisant à la condition de cocycle :

$$p_{31}^*(\phi) = p_{32}^*(\phi) \circ p_{21}^*(\phi).$$

Une stratification sur un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{E}$ est la donnée d'une famille de m-connexions compatibles : la m'-connexion est induite par la m-connexion pour tout $m \geqslant m'$.

Exercice 2.4–4. — Montrer que si X est lisse sur S la donnée d'une 1-connexion sur un $\mathscr{O}_X$-module est équivalente à la donnée d'une S-connexion au sens usuel.

Théorème 2.4–5. — *Soit X un schéma lisse sur un autre S, les trois catégories suivantes sont naturellement équivalentes :*

1) *la catégorie des cristaux sur le site infinitésimal,*
2) *la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules stratifiés,*
3) *la catégorie des $\mathscr{D}_{X/S}$-modules à gauche.*

Démonstration. — La démonstration n'est pas difficile : il s'agit en fait de dire la même chose de trois façons. Il suffit de suivre les définitions. Nous nous contentons de l'esquisser. Rappelons d'abord le point essentiel : par définition d'un morphisme lisse, si $U \to \overline{U}$ est un objet du site infinitésimal, l'inclusion $U \to X$ se prolonge en un morphisme $f_1 : \overline{U} \to X$. Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_X$-module muni d'une stratification, deux prolongements f_1, f_2 induisent un isomorphisme

$$f_1^* \mathscr{E} \simeq f_2^* \mathscr{E}$$

qui est canonique [**G3**]. Si on définit comme cela un faisceau $\mathscr{E}_{U \to \overline{U}}$ de modules, on obtient un cristal grâce aux conditions de cocycle. Si $\mathscr{E}$ est un cristal, le $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{E}_{X \to X}$ est muni de façon évidente d'une stratification. Ces constructions fournissent des foncteurs inverses l'un de l'autre qui sont alors des équivalences de catégories entre les catégories 1) et 2). L'équivalence entre la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules stratifiés et celle des $\mathscr{D}_{X/S}$-modules prolonge l'équivalence entre la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules à S-connexion intégrable et celle des $\mathscr{D}_{X/S}$-modules à gauche en caractéristique nulle.

Soit $\mathscr{M}_{\mathrm{inf}}$ un faisceau de groupe abélien sur le site $\mathrm{Inf}(X/S)$, on définit sa cohomologie infinitésimale $H^\bullet(\mathscr{M}_{\mathrm{inf}})$ comme d'habitude comme les foncteurs dérivés du foncteur des sections globales

$$\Gamma(\mathscr{M}_{\mathrm{inf}}) := Hom_{\mathbb{Z}_{\mathrm{inf}}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{inf}}, \mathscr{M}_{\mathrm{inf}})$$

où $\mathbb{Z}_{\mathrm{inf}}$ est le faisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$.

Théorème 2.4–6. — *Supposons X lisse sur S. Soit $\mathscr{M}_{\mathrm{inf}}$ un cristal sur le site $\mathrm{Inf}(X/S)$ et $\mathscr{M}$ le $\mathscr{D}_{X/S}$-module à gauche associé. Alors la cohomologie infinitésimale est canoniquement isomorphe à l'hypercohomologie du complexe $\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X/S}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{M})$ pour la topologie de Zariski :*

$$H^\bullet(\mathscr{M}_{\mathrm{inf}}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(X; \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X/S}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{M})).$$

Démonstration. — Soit

$$0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{I}^0 \longrightarrow \mathscr{I}^1 \dots$$

une résolution $\mathscr{D}_{X/S}$-injective et

$$0 \longrightarrow \mathscr{M}_{\mathrm{inf}} \longrightarrow \mathscr{I}^0_{\mathrm{inf}} \longrightarrow \mathscr{I}^1_{\mathrm{inf}} \dots$$

la résolution du cristal fournie par l'équivalence de catégories précédente. C'est donc une résolution par des objets *injectifs* de la catégorie des cristaux sur le site infinitésimal. On a alors un isomorphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & Hom_{\mathscr{O}_{X_{\mathrm{inf}}}}(\mathscr{O}_{X_{\mathrm{inf}}}, \mathscr{I}^0_{\mathrm{inf}}) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{O}_{X_{\mathrm{inf}}}}(\mathscr{O}_{X_{\mathrm{inf}}}, \mathscr{I}^1_{\mathrm{inf}}) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}_{X/S}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{I}^0) & \longrightarrow & Hom_{\mathscr{D}_{X/S}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{I}^1) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

qui induit en particulier un isomorphisme entre la cohomologie de la première ligne qui est la cohomologie infinitésimal et la cohomologie de la deuxième ligne qui est la cohomologie de Zariski à valeur dans le complexe $\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X/S}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{M})$.

Corollaire 2.4–7. — *Supposons X lisse sur un schéma S de caractéristique nulle et soit $\mathscr{M}_{\mathrm{inf}}$ un cristal sur le site* $\mathrm{Inf}(X/S)$ *et $\mathscr{M}$ le $\mathscr{D}_{X/k}$-module à gauche associé. Alors la cohomologie infinitésimale est canoniquement isomorphe à la cohomologie de de Rham de $\mathscr{M}$:*

$$H^\bullet(\mathscr{M}_{\mathrm{inf}}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet_{\mathrm{DR}}(\mathscr{M}/S).$$

Démonstration. — Rappelons *cf.* [**C**] que $H^\bullet_{\mathrm{DR}}(\mathscr{M}/S)$ est l'hypercohomologie du complexe de de Rham $\mathrm{DR}(\mathscr{M})$:

$$0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^1_{X/S} \longrightarrow \cdots .$$

L'augmentation naturelle $\mathscr{D}_{X/S} \to \mathscr{O}_X \to 0$ est le début sous les hypothèses de non singularité de X sur S de caractéristique nulle, d'une résolution canonique de Spencer *cf.* [**C**] par des $\mathscr{D}_{X/S}$-modules libres de rang fini qui montre que le complexe de de Rham est un représentant canonique du complexe $\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X/S}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{M})$.

Le point de vue des $\mathscr{D}_{X/S}$-modules fournit rapidement et formellement l'isomorphisme de comparaison qui est le point de départ de la théorie cristalline. La démonstration de Grothendieck [**G3**] de l'isomorphisme précédent est nettement plus compliquée, ce qui a contribué pendant longtemps à entretenir, au moins dans notre esprit, la confusion des structures.

Si on abandonne l'hypothèse de non singularité de X sur S la catégorie des $\mathscr{D}_{X/S}$-modules n'est pas intéressante à considérer. Pourtant la catégorie des cristaux sur le site infinitésimal en fournit un substitut naturel quand la base est de caractéristique nulle en ce sens que, si $S = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$, la cohomologie infinitésimale du faisceau structural fournit les bons nombres de Betti, en vertu d'un théorème non publié de Deligne et conjecturé par Grothendieck ([**G3**], conjecture 4.2).

Définition 2.4–8. — Une m-co-connexion sur un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{E}$ sur un schéma X au-dessus d'un autre schéma S est la donnée d'une *donnée de co-descente* : un isomorphisme

$$\phi : p_1(m)^!\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} p_2(m)^!\mathscr{E}$$

satisfaisant la condition de cocycle :

$$p^!_{31}(\phi) = p^!_{21}(\phi) \circ p^!_{32}(\phi).$$

Une co-stratification sur un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{E}$ est la donnée d'une famille de m-co-connexions compatibles : la m'-co-connexion est induite par la m-connexion pour tout $m \geqslant m'$.

Exercice 2.4–9. — Soit X un schéma lisse sur un autre schéma S.

1) Montrer que la catégorie des $\mathscr{D}_{X/S}$-modules à droite est équivalente à la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules munis d'une co-stratification :

2) Étendre alors l'équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathscr{D}_{X/S}$-modules à gauche et celle des $\mathscr{D}_{X/S}$-modules à droite.

Si la base est de caractéristique $p > 0$ la cohomologie infinitésimale ne fournit plus des nombres de Betti ayant les propriétés raisonnables. Aussi il faut remplacer dans un premier temps le site infinitésimal par le site cristallin.

Il faut partir d'une situation un peu plus générale et supposer que la base S est munie d'un idéal $\mathscr{I}$ lui-même muni d'une structure de puissances divisées : une famille d'applications $\gamma_n : \mathscr{I} \to \mathscr{I}$ ayant les propriétés formelles des applications $x^n/n!$. Dans la définition du site infinitésimal, il ne faut considérer que les épaississements $U \to \overline{U}$ dont l'idéal de définition est muni d'une structure de puissances divisées compatible de façon évidente à la structure de $\mathscr{I}$. On obtient alors le site cristallin $\mathrm{Cris}(X, S, \mathscr{I}, \gamma)$ et on définit de manière analogue la catégorie des cristaux sur le site cristallin. Le cas d'une base $S = \operatorname{Spec} V$ pour un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$ est le plus important.

La cohomologie cristalline a permis de montrer la rationalité de la fonction zêta d'une variété propre et lisse sur un corps fini. Mais elle n'a pas permis de montrer la pureté de ses zéros et de ses pôles.

D'autre part la cohomologie cristalline d'une variété affine non singulière sur un corps fini est de dimension infinie et ne fournit donc pas les bons nombres de Betti.

Ces définitions aussi intéressantes soient-elles sont trop formelles pour avoir une prise sérieuse sur ces problèmes. Il faut recourir à la cohomologie p-adique de Dwork-Monsky-Washnitzer et à la théorie des équations différentielles p-adique, mais c'est là une autre histoire. Nous avons inclus dans ce cours ce paragraphe 2.4 pour souligner précisément cette insuffisance qui ne peut être noyée dans des considérations formelles pour entretenir l'illusion.

2.5. Les foncteurs de localisation et de cohomologie locale algébrique, suite de Mayer-Vietoris. — Soient une variété analytique complexe X et Z un sous-espace analytique fermé défini par un idéal $\mathscr{I}_Z$ et $j : U \hookrightarrow X$ son complémentaire. On définit le foncteur de localisation et le foncteur de cohomologie locale algébrique dans la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules par

$$\begin{aligned} \mathscr{M}(*Z) &:= \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{I}_Z^k, \mathscr{M}), \\ \operatorname{alg}\Gamma_Z(M) &:= \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k, \mathscr{M}). \end{aligned}$$

Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module à gauche le localisé $\mathscr{M}(*Z)$ et la cohomologie locale algébrique $\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M})$ sont encore des $\mathscr{D}_X$-modules à gauche ([**C**], 1.3.8). Ce sont des foncteurs exacts à gauche de la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules à gauche dans elle-même. Ils se dérivent à droite de façon naturelle et on note $\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)$ et $\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M})$ leurs foncteurs dérivés. Par construction pour un complexe $\mathscr{M}$ de la catégorie $D^b(\mathscr{D}_X)$ on a un triangle distingué de cohomologie locale algébrique :

$$\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{M}(*Z) \longrightarrow .$$

Remarque 2.5–1. — Prendre garde que le morphisme $\mathscr{M}(*Z) \to j_*j^{-1}\mathscr{M}$ n'est pas injectif en général et on ne peut pas définir la structure de $\mathscr{D}_X$-module à partir de celle évidente de $j_*j^{-1}\mathscr{M}$.

Théorème 2.5–2. — *Soit un complexe $\mathscr{M}$ holonome, alors le triangle précédent est un triangle distingué de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_X)$.*

Démonstration. — Si Z_1 et Z_2 sont deux sous-espaces analytiques de X on a les triangles distingués de Mayer-Vietoris ([**C**], 3.1.9) :

$$\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Z_1\cap Z_2,}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Z_1}(\mathscr{M}) \oplus \mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Z_2}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Z_1\cup Z_2}(\mathscr{M})$$
$$\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z_1\cap Z_2) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{M}(*Z_1) \oplus \mathbf{R}\mathscr{M}(*Z_2) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{M}(*Z_1\cup Z_2)$$

Le foncteur de localisation le long d'une hypersurface Z est exact. La suite longue de cohomologie associé au triangle de cohomologie locale algébrique pour un $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$ se réduit à la suite :

$$0 \longrightarrow \operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}(*Z) \longrightarrow \operatorname{alg}\mathscr{H}^1_Z(\mathscr{M}) \longrightarrow 0.$$

Un espace analytique Z est défini localement par un nombre fini d'équations $(f_1,\dots,f_r)$. Si on note par Z_1 l'hypersurface définie par l'équation f_1 et par Z_2 l'espace défini par les équations $(f_2,\dots,f_r)$ alors la réunion $Z_1\cup Z_2$ est défini par les équations $(f_1f_2,\dots,f_1f_r)$ et Z est l'intersection de Z_1 et Z_2. Par récurrence sur le nombre d'équations, la suite de Mayer-Vietoris ramène les propriétés qui sont de nature locale de la cohomologie locale algébrique à support un espace analytique au cas d'une hypersurface.

Par exemple pour montrer que la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_X)$ est stable par cohomologie locale algébrique le long d'un espace analytique fermé, on se réduit à montrer que le localisé $\mathscr{M}(*Z)$ le long d'une hypersurface Z d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome $\mathscr{M}$ est encore holonome, ce qui est conséquence de l'existence d'une équation fonctionnelle de Bernstein-Sato pour une section locale d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome [**M-T**].

Le foncteur de localisation et de cohomologie locale ont bien entendu un sens en géométrie algébrique, cependant il y a une différence comme d'habitude dans l'action des opérateurs différentiels en caractéristique nulle et en caractéristique positive. Si X est une variété algébrique non singulière au-dessus d'un corps k de caractéristique p et Z une sous-variété fermée définie par un idéal $\mathscr{I}_Z$. Notons $i : Z \to X$ et $j : U :=$

$X - Z \to X$ les inclusions canoniques. On a alors un morphisme de triangles pour tout complexe $\mathscr{M}$ de $D^b(\mathscr{O}_X)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{M} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{R}\mathscr{M}(*Z) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathscr{M}) \arrow[r] & \mathscr{M} \arrow[r] & \mathbf{R}j_*j^{-1}M \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

qui est un isomorphisme si le complexe $\mathscr{M}$ est à cohomologie quasi-cohérente en vertu du lemme du way-out. Si $\mathscr{M}$ est un complexe de $D^b(\mathscr{D}_{X/k})$ le deuxième triangle est un triangle de $D^b(\mathscr{D}_{X/k})$ de façon évidente. Un opérateur différentiel d'ordre m envoie, pour un $\mathscr{D}_{X/k}$-module $\mathscr{M}$,

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{I}_Z^k, \mathscr{M}) \quad \text{sur} \quad \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{I}_Z^{k+m}, \mathscr{M})$$

et

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k, \mathscr{M}) \quad \text{sur} \quad \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_X}(\mathscr{I}_Z^{k+m}, \mathscr{M}).$$

On définit ainsi des foncteurs exacts à gauche de la catégorie des $\mathscr{D}_{X/k}$ dans elle-même qui se dérivent à droite. Le premier triangle est un triangle de la catégorie $D^b(\mathscr{D}_X)$. Le morphisme de triangles précédent est compatible aux structures de $\mathscr{D}_{X/k}$-modules et c'est un isomorphisme si la cohomologie de $\mathscr{M}$ est quasi-cohérente.

2.6. Commutation de la cohomologie locale algébrique avec l'image inverse. — Soit un morphisme $f : X' \to X$ de variétés analytiques complexes ou algébriques non singulières sur un corps de caractéristique nulle. Rappelons que l'image inverse annelée est définit pour un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{M}$ par :

$$f^*\mathscr{M} := \mathscr{O}_{X'} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}\mathscr{M}$$

qui définit un foncteur exact à droite entre la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules à gauche et la catégorie des $\mathscr{D}_{X'}$-modules à gauche. Il se dérive pour donner naissance à un foncteur triangulé entre la catégorie $D^b(\mathscr{D}_X)$ et la catégorie $D^b(\mathscr{D}_{X'})$ qui à un complexe $\mathscr{M}$ associe son image inverse totale par :

$$\mathscr{M}' := f_d^*\mathscr{M} := \mathscr{O}_{X'} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}\mathscr{M}.$$

Remarque 2.6–1. — Puisque le faisceau $\mathscr{D}_X$ est libre sur $\mathscr{O}_X$ le foncteur image inverse total est la restriction du foncteur analogue dans la catégorie $D^b(\mathscr{O}_X)$. La notation $f_d^*\mathscr{M}$ rappelle que l'on prend une image inverse différentielle.

Si Z est un sous-espace analytique ou une sous-variété algébrique de X on note $Z' := f^{-1}Z$ son image inverse. Le théorème suivant est montré dans [**M-T**].

Théorème 2.6–2. — *Il existe un morphisme canonique de triangles distingués :*

$$\begin{array}{ccccc} f_d^*\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M}) & \longrightarrow & f_d^*\mathscr{M} & \longrightarrow & f_d^*\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Z'}(\mathscr{M}') & \longrightarrow & \mathscr{M}' & \longrightarrow & \mathbf{R}\mathscr{M}'(*Z') \end{array}$$

qui est un isomorphisme de la catégorie $D^b(\mathscr{D}_{X'})$. De plus si $\mathscr{M}$ est un complexe holonome *son image inverse $\mathscr{M}'$ est un* complexe holonome*.*

Remarque 2.6–3. — Un morphisme $f : X' \to X$ de variétés algébriques non singulière donne naissance à un morphisme (f_*^c, f_c^*) de topos entre les catégories des cristaux sur les sites infinitésimaux sur X' et X. Le foncteur image inverse cristalline f_c^* coïncide avec l'image inverse différentielle f_d^*, c'est-à-dire au sens des $\mathscr{D}_X$-modules. Mais le foncteur image directe cristalline f_*^c ne coïncide pas avec le foncteur image directe différentielle f_*^d, c'est-à-dire au sens des $\mathscr{D}_X$-modules. Ainsi, si $f : Y \hookrightarrow X$ est une immersion fermée de variétés lisses, le module $f_*^c\mathscr{O}_Y$ est le complété formel de $\mathscr{O}_X$ le long de Y, mais le module $f_*^d\mathscr{O}_Y$ est la cohomologie locale de $\mathscr{O}_X$ le long de Y. On passe de $f_*^d\mathscr{O}_Y$ à $f_*^c\mathscr{O}_Y$ par dualité comme nous allons l'illustrer dans la paragraphe suivant.

2.7. Solutions formelles d'un $\mathscr{D}_X$-module. — Soit Z une sous-variété algébrique d'une variété X non singulière sur un corps de caractéristique nulle définie par un idéal $\mathscr{I}_Z$, resp. un sous-espace analytique d'une variété analytique complexe. Le complété formel

$$\mathscr{O}_{\widehat{X|Z}} := \varprojlim_k \mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k$$

est naturellement un $\mathscr{O}_X$-module. Si ∂ est une dérivation l'image $\partial(\mathscr{I}_Z^{k+1})$ est contenu dans $\mathscr{I}_Z^k$, ce qui implique un morphisme

$$\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^{k+1} \longrightarrow \mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k$$

qui est compatible aux projections. D'où une action de ∂ sur le complété formel $\varprojlim_k \mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k$ qui devient un $\mathscr{D}_X$-module à gauche.

Théorème 2.7–1. — *Le complexe*

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{O}_X), \mathscr{O}_X)$$

est un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche et l'on a un isomorphisme canonique :

$$\mathscr{O}_{\widehat{X|Z}} \simeq \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{O}_X), \mathscr{O}_X).$$

Démonstration. — Première étape : Si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont des $\mathscr{D}_X$-modules à gauche le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{M},\mathscr{N})$ est un $\mathscr{D}_X$-module gauche par

$$\partial\phi : m \longrightarrow \partial\phi(m) - \phi(\partial m)$$

où ∂ est une dérivation, ϕ une section locale de $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{M},\mathscr{N})$ et m est une section locale de $\mathscr{M}$. Si $\mathscr{N}$ est un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche le complexe $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{M},\mathscr{N})$ est un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules gauche et si $\mathscr{M}$ est un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche le complexe $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{M},\mathscr{N})$ est aussi un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche.

Soit $\mathscr{O}_X \to \mathscr{I}$ une résolution $\mathscr{D}_X$-injective de $\mathscr{O}_X$ qui est alors aussi $\mathscr{O}_X$-injective. Le complexe

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathscr{O}_X),\mathscr{O}_X)$$

est représenté par le complexe

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathscr{I}),\mathscr{I})$$

qui est donc un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à gauche.

Deuxième étape. Pour tout k on a un morphisme de bidualité qui est un isomorphisme

$$\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k,\mathscr{I}),\mathscr{I}).$$

D'où un morphisme

$$(*)\qquad \varprojlim_k \mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k \longrightarrow \varprojlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k,\mathscr{I}),\mathscr{I}) \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathscr{I}),\mathscr{I}).$$

Voyons que ce morphisme est $\mathscr{D}_X$-linéaire. Il suffit de voir que le diagramme suivant est commutatif pour tout k :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^{k+1},\mathscr{I}^p),\mathscr{I}^p) \arrow[d, "\partial"] \\
\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^{k} \arrow[r] & \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^{k},\mathscr{I}^p),\mathscr{I}^p)
\end{tikzcd}$$

Notons f_k une section locale de $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k$, g_k une section locale de

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k,\mathscr{I}^p)$$

et ϕ_k une section locale de

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k,\mathscr{I}^p),\mathscr{I}^p).$$

Alors $\partial\phi_{k+1}$ est l'application qui à g_k associe $\partial\phi_{k+1}(g_k) - \phi_{k+1}(\partial g_k)$ où on regarde g_k comme section locale du faisceau

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^{k+1},\mathscr{I}^p)$$

par l'injection naturelle du faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k,\mathscr{I}^p)$ dans le faisceau
$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^{k+1},\mathscr{I}^p).$$
Maintenant ∂g_k est l'application qui à f_{k+1} associe $\partial g_k(f_{k+1}) - g_k(\partial f_{k+1})$. En tenant compte de ces actions des dérivations on trouve que le diagramme est commutatif.

Troisième étape. Voyons que le morphisme $(*)$ est un isomorphisme. Notons
$$\mathscr{J} := \varprojlim_k \mathscr{J}_k$$
la limite projective des complexes
$$\mathscr{J}_k := \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k,\mathscr{I}),\mathscr{I}).$$
Les composantes du complexe $\mathscr{J}_k$ sont flasques et pour un ouvert V les morphismes de transition dans le système projectif $\varprojlim_k \Gamma(V;\mathscr{J}_k)$ sont surjectifs. Il résulte alors de ([E.G.A 0_{III}], (13.3.1), Publ. IHES 11, (1961), p. 1-82) que les composantes du complexe $\mathscr{J}$ sont acycliques pour le foncteur sections globales.

Pour un ouvert V de Stein ou affine les morphismes de transition entre cohomologies de degré zéro de $\Gamma(V;\mathscr{J}_k)$ sont surjectifs en vertu du théorème B et donc la cohomologie commute à la limite projective en vertu de la propriété de Mittag-Leffler. On trouve alors pour un ouvert V de Stein assez petit ou affine que la cohomologie de $\Gamma(V;\mathscr{J})$ est nulle en degré positif et isomorphe à l'espace
$$\Gamma(V;\varprojlim_k \mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k)$$
en degré nul. Le complexe $\mathscr{J}$ est acyclique en degrés positifs et son faisceau de cohomologie de degré nul est isomorphe $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Z^k$. D'où l'isomorphisme cherché.

On peut remplacer le faisceau $\mathscr{O}_X$ par n'importe quel fibré à connexion intégrable. Mais par contre cet isomorphisme est en défaut pour un $\mathscr{D}_X$-module singulier. Cependant cette démonstration montre que le complété formel le long de Z d'un faisceau analytique ou algébrique cohérent est le dual de son complexe de cohomologie locale algébrique.

Corollaire 2.7–2. — *Pour tout complexe $\mathscr{M}$ de $D^b(\mathscr{D}_X)$ on a un isomorphisme canonique :*
$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M}),\mathscr{O}_X) \simeq \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{O}_{\widehat{X|Z}}).$$
Démonstration. — Cela résulte de l'isomorphisme naturel d'adjonction
$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M}),\mathscr{O}_X) \simeq \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{O}_X),\mathscr{O}_X))$$
et de l'isomorphisme du théorème précédent.

Nous aurons besoin de l'existence d'une résolution libre finie d'un $D := \mathscr{D}_{X,x}$-module $M := \mathscr{M}_{,x}$ de type fini :

Proposition 2.7–3. — *Tout D-module M de type fini admet une résolution libre finie*

$$0 \longrightarrow D^{N_q} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D^{N_0} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Il est facile de fabriquer une résolution de longueur $\dim X$ dont les composantes sont libres de type fini à l'exception de la dernière qui est projective. Mais, à partir de là, il n'est pas clair d'obtenir une résolution finie par des modules libres de type fini. Aussi nous allons d'abord fabriquer une résolution finie par des modules de la forme $D \otimes_A F$ où $A := \mathscr{O}_{,x}$ et F un A-module de type fini et passer à une résolution finie par des D-modules libres de type fini en prenant des résolutions finies de F par des A-modules libres de type fini qui existent puisque A est un anneau local régulier de dimension $\dim X$. Soit $M = \cup M_k, k \in \mathbb{N}$ une bonne filtration de M, T l'espace tangent et

$$\delta : D \otimes_A \bigwedge^{i}(T) \otimes_A M_k \longrightarrow D \otimes_A \bigwedge^{i-1}(T) \otimes_A M_{k+1}$$

le morphisme défini par

$$\begin{aligned}\delta(P \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \otimes m_k) &:= \sum_{j=1,\ldots,i} (-1)^{i-1} P v_j \otimes (v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v}_j \wedge v_i) \otimes m_k \\ &- \sum_{j=1,\ldots,i} (-1)^{i-1} P \otimes (v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v}_j \cdots \wedge v_i) \otimes v_j(m_k) \\ &+ \sum_{1 \leqslant j \leqslant \ell \leqslant i} (-1)^{i+\ell} P \otimes ([v_j, v_\ell] \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v}_j \cdots \wedge \widehat{v}_j \cdots \wedge v_i) \otimes m_k\end{aligned}$$

où les v_j sont des vecteurs tangents. On obtient pour tout k le complexe de Spencer $\mathrm{Sp}_k(M)$ de degré k :

$$0 \longrightarrow D \otimes_A \bigwedge^{n}(T) \otimes_A M_{k-n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D \otimes_A T \otimes_A M_{k-1} \longrightarrow D \otimes_A M_k \longrightarrow 0$$

en convenant que $M_k = 0$, pour $k < 0$. Soit $\epsilon : L^0 \to M \to 0$ un morphisme surjectif de modules filtrés tel que L^0 est un D-module libre filtré. On a alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ \mathrm{Sp}_k(\mathrm{Ker}(\epsilon)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\epsilon) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \mathrm{Sp}_k(L^0) \arrow[r] \arrow[d] & L^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \mathrm{Sp}_k(M) \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Puisque le complexe de Spencer est d'amplitude n, si on montre que le complexe de Spencer d'un D-module libre filtré est une résolution on trouve la proposition :

Proposition 2.7–4. — *Pour k assez grand le complexe de Spencer* $\mathrm{Sp}_k(M)$ *de degré k est une résolution de M.*

On est réduit à montrer que le complexe de Spencer $\mathrm{Sp}_k(D)$ de degré k est une résolution de D. En fait $\mathrm{Sp}_0(D) = D$ et le morphisme injectif $\mathrm{Sp}_{k+1}(D) \to \mathrm{Sp}_k(D)$ est un quasi-isomorphisme. En effet son conoyau est le produit tensoriel de D sur A avec le complexe :

$$0 \longrightarrow Gr^{k-n}(D) \otimes_A \bigwedge^n(T) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Gr^{k-1}(D) \otimes_A T \longrightarrow Gr^k(D) \longrightarrow 0$$

où la différentielle est donnée par :

$$\delta(\overline{P} \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_i) := \sum_{j=1,\ldots,i} (-1)^{i-1} \overline{P} \xi_j \otimes (v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v}_j \cdots \wedge v_i)$$

où ξ_j est le symbole de v_j. Ce dernier complexe est acyclique parce c'est un complexe de Koszul.

Remarque 2.7–5. — Cette terminologie et cette démonstration ont été introduite par B. Malgrange dans un cours d'Orsay en 1967 intitulé « Cohomologie de Spencer » où il est déjà clairement question de $\mathscr{D}$-modules. Ce cours a été rédigé mais non publié. L'auteur du présent cours n'en n'a pris connaissance qu'en 1988 !

Démonstration de la proposition 2.7–3. — En prenant des résolutions libres de longueur n des A-modules M_k et le complexe simple associé au complexe double obtenu on trouve une résolution de M de longueur $2n$ par des D-modules libres de type fini.

Corollaire 2.7–6. — *Tout $\mathscr{D}_X$-module cohérent admet localement des résolutions de longueur $2n$ par des $\mathscr{D}_X$-modules libres de type fini.*

Démonstration. — En effet une résolution d'une fibre de $\mathscr{M}$ en un point est défini dans un voisinage de ce point qui donne alors par cohérence une résolution locale de $\mathscr{M}$ par des $\mathscr{D}_X$-modules localement libres de type fini.

3. Le Théorème de Positivité de l'Irrégularité

3.1. Introduction. — À une variable on attache à un point singulier d'un module différentiel un entier positif ou nul défini algébriquement, dont la nullité caractérise en vertu du théorème de Fuchs (1870) un point singulier régulier quel que soit le sens qu'on veuille donner à cette notion. De plus ce nombre est additif dans une suite exacte et est invariant par dualité. Dans le cas complexe ce nombre est égal à la dimension de l'espace d'irrégularité en vertu du théorème de Malgrange (1971).

Pour un système holonome et une hypersurface nous allons définir un complexe qui généralise l'espace d'irrégularité et nous montrons que c'est un *faisceau* en un certain sens. Son cycle caractéristique est *positif* et ses multiplicités généralisent le nombre de Fuchs. Ce cycle est additif dans une suite exacte et est invariant par dualité.

3.2. La Catégorie des Coefficients Constructibles $D^b_c(\mathbb{C}_X)$, Constructibilité des complexes de de Rham et des solutions holomorphes d'un complexe holonome. — Sur un espace analytique complexe X, on a la notion de faisceau constructible ([**M-N1**], I.4.1) d'espaces vectoriels complexe de dimension finie. Rappelons qu'un faisceau d'espaces vectoriels complexes $\mathscr{F}$ est dit constructible si ses fibres sont de dimension finie et s'il existe une stratification de X par des sous-variétés localement fermées connexes ayant la propriété de frontière telle que la restriction de $\mathscr{F}$ à chaque strate est un faisceau localement constant, décrit donc par une représentation de dimension finie du groupe fondamental de la strate en question. On dit qu'un complexe de faisceaux d'espaces vectoriels complexes est constructible s'il est à cohomologie bornée et constructible. On note

$$D^b_c(\mathbb{C}_X)$$

la sous-catégorie pleine de la catégorie $D(\mathbb{C}_X)$ des complexes constructibles. C'est la première catégorie de coefficients discrets qui a des propriétés de finitude remarquables et qui à servi de guide à toutes les autres. Elle a été introduite, notation comprise, par Grothendieck et ses élèves afin de faire des raisonnements par récurrence sur la dimension. Ses propriétés remarquables n'ont rien d'évident.

La propriété d'être constructible est locale ([**M-N1**], I.4.5). La catégorie des faisceaux constructibles est abélienne et stable par extension ([**M-N1**], I.4.5). La sous-catégorie $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ de la catégorie $D^b(\mathbb{C}_X)$ est triangulée ([**M-N1**], I.4.5), stable par cohomologie locale le long d'un espace analytique fermé ([**M-N1**], I.4.15), par images inverses ([**M-N1**], I.4.15), par produit tensoriel ([**M-N1**], I.4.15) et par dualité *cf.* [**N**].

Supposons pour simplifier que X est lisse de sorte qu'on peut définir le dual d'un complexe $\mathscr{F}$ par

$$\mathscr{F}^\vee := \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathbb{C}_X).$$

Le théorème de bidualité *cf.* [**N**] dit que si $\mathscr{F}$ est constructible son dual est constructible et le morphisme de bidualité $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^{\vee\vee}$ est un isomorphisme.

Le cas particulier du théorème de dualité de Grothendieck-Verdier pour une immersion $i : Z \to X$ d'un espace analytique fermé dans X, montre que

$$i^!(\mathscr{F}^\vee) \simeq \mathbf{R}\Gamma_Z(\mathscr{F}^\vee) \simeq (i^{-1}\mathscr{F})^\vee$$

et le théorème de bidualité montre que

$$i^{-1}(\mathscr{F}^\vee) \simeq (i^!\mathscr{F})^\vee.$$

Définition 3.2–1. — On appelle support $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ d'un faisceau constructible $\mathscr{F}$ sur X l'adhérence de l'ensemble des points où sa fibre n'est pas nulle. On appelle support $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ d'un complexe constructible $\mathscr{F}$ sur X la réunion des supports de ses faisceaux de cohomologie non nuls (qui sont en nombre fini par définition).

Le support d'un complexe constructible sur X est donc un sous-espace analytique fermé de X.

Si $\mathscr{M}$ est un complexe de la catégorie $D^b(\mathscr{D}_X)$ pour une variété analytique X non singulière on définit respectivement le complexe de de Rham et le complexe des solutions par :

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}) := \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X, \mathscr{M})$$

et

$$\mathbf{S}(\mathscr{M}) := \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X).$$

Par construction **DR** est un foncteur covariant exact de catégories triangulées de la catégorie $D^b(\mathscr{D}_X)$ dans la catégorie $D^b(\mathbb{C}_X)$ et **S** est un foncteur contravariant exact de catégories triangulées de la catégorie $D^b(\mathscr{D}_X)$ dans la catégorie $D(\mathbb{C}_X)$.

On a le théorème de constructibilité démontré à l'origine par Kashiwara, comme nous l'avons dit dans l'introduction, à l'aide de la théorie des équations aux dérivées partielles. La démonstration exposée dans [**M-N1**] est de nature géométrique :

Théorème 3.2–2. — *Les foncteurs exacts de catégories triangulées* **DR** *et* **S** *envoient la catégorie* $D^b_h(\mathscr{D}_X)$ *dans la catégorie* $D^b_c(\mathbb{C}_X)$

$$\mathbf{DR}, \mathbf{S} : D^b_h(\mathscr{D}_X) \longrightarrow D^b_c(\mathbb{C}_X).$$

3.3. Le Théorème de Dualité Locale. — On a le théorème de dualité locale démontré dans la Thèse de l'auteur de ce cours :

Théorème 3.3–1. — *Pour tout complexe* $\mathscr{M}$ *de la catégorie* $D^b(\mathscr{D}_X)$ *il existe un morphisme canonique*

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}), \mathbb{C}_X)$$

qui est un isomorphisme si $\mathscr{M}$ *est un complexe de la catégorie* $D^b_h(\mathscr{D}_X)$.

La démonstration du théorème de dualité locale est exposée dans le cours de L. Narváez de cette école [**N**]. Le point clef, en plus du théorème de constructibilité, est l'utilisation simultanée de la dualité discrète du type de Poincaré pour les faisceaux d'espaces vectoriels complexes de dimension infinie et de la dualité cohérente du type de Serre.

Remarque 3.3–2. — En fait l'isomorphisme précédent vaut pour tout complexe de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X)$ dont le complexe des solutions holomorphes est constructible. Mais nous verrons au chapitre 11 qu'un tel complexe est holonome, mais ce résultat est hautement non trivial.

Définition 3.3–3. — Soit un complexe constructible $\mathscr{F}$.

1) On dit que $\mathscr{F}$ a la propriété de support s'il est concentré cohomologiquement entre les degrés 0 et $\dim X$ et si la dimension du support du i-ème faisceau de cohomologie $h^i(\mathscr{F})$ est bornée par $\dim X - i$ pour $i = 0, \ldots, \dim X$.

2) On dit que $\mathscr{F}$ a la propriété de co-support si le complexe dual

$$\mathscr{F}^{\vee} := \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathbb{C}_X)$$

a la propriété de support.

3) On dit que $\mathscr{F}$ est un faisceau au sens dérivé s'il a à la fois les propriétés de support et de co-support.

On note $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ la catégorie des faisceaux au sens dérivé qui est donc une sous-catégorie pleine de la catégorie des complexes constructibles $D_c^b(\mathbb{C}_X)$. Comme le suggère la notation un faisceau au sens dérivé est appelé faisceau pervers dans la littérature. Nous ne souhaitons pas utiliser cette terminologie qui coupe net cette belle notion de ses racines et qui est sans doute l'une des notions des plus originales, des plus fécondes issues de la théorie géométrique des équations différentielles. Comme nous le verrons, elle ne mérite pas un tel nom. Nous espérons qu'à l'usage les générations futures trouveront un nom simple plus acceptable.

Proposition 3.3–4. — *Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome les complexes $\mathbf{DR}(\mathscr{M})$ et $\mathbf{S}(\mathscr{M})$ ont la propriété de support.*

La démonstration originale de Kashiwara de la condition de support est conséquence du problème de Cauchy-Kowalewska et exposée dans le cours [**M-T**]. La condition de support peut se montrer géométriquement en même temps que la constructibilité [**M-N1**].

Corollaire 3.3–5. — *Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome les complexes $\mathbf{DR}(\mathscr{M})$ et $\mathbf{S}(\mathscr{M})$ ont la propriété de co-support.*

En effet cela résulte de la proposition précédente et du théorème de dualité locale.

Corollaire 3.3–6. — *Les foncteurs* $\mathbf{DR}$ *et* $\mathbf{S}$ *envoient la catégorie des modules holonomes* $\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X)$ *dans la catégorie des faisceaux* $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$

$$\mathbf{DR}, \mathbf{S} : \mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X) \longrightarrow \mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X).$$

Remarque 3.3–7. — Nous montrerons au chapitre 10 que les objets de la catégorie $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ sont de nature locale comme les faisceaux ordinaires, ce qui explique la terminologie, contrastant vivement avec les objets plus généraux de la catégorie dérivée. Nous verrons aussi que la catégorie $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ est abélienne et que les foncteurs de de Rham et des solutions holomorphes sont des foncteurs exacts entre catégories abéliennes.

Proposition 3.3–8. — *Un faisceau au sens dérivé $\mathscr{F}$ est concentré cohomologiquement entre les degrés* $\mathrm{codim}_X \mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ *et* $\dim X$.

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}$ un complexe $\to \mathscr{F}^k \xrightarrow{d_k} \mathscr{F}^{k+1} \to$, on définit les complexes $\sigma_{>k}(\mathscr{F})$, $\sigma_{\leqslant k}(\mathscr{F})$ par

$$\sigma_{>k}(\mathscr{F}): \quad 0 \longrightarrow \mathrm{image}(d_k) \longrightarrow \mathscr{F}^{k+1} \longrightarrow$$

$$\sigma_{\leqslant k}(\mathscr{F}): \quad \longrightarrow \mathscr{F}^{k-1} \longrightarrow \mathrm{noyau}(d_k) \longrightarrow 0.$$

Par construction la cohomologie du complexe $\sigma_{\leqslant k}(\mathscr{F})$ est isomorphe à la cohomologie de $\mathscr{F}$ en degrés $\leqslant k$ et est nulle en degrés $> k$ et la cohomologie du complexe $\sigma_{>k}(\mathscr{F})$ est isomorphe à la cohomologie de $\mathscr{F}$ en degrés $> k$ et est nulle en degrés $\leqslant k$. On a une suite exacte de complexe

$$0 \longrightarrow \sigma_{\leqslant k}(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \sigma_{>k}(\mathscr{F}) \longrightarrow 0,$$

d'où un triangle distingué :

$$\longrightarrow (\sigma_{>k}(\mathscr{F}))^\vee \longrightarrow (\mathscr{F})^\vee \longrightarrow (\sigma_{\leqslant k}(\mathscr{F}))^\vee \longrightarrow .$$

Si $\mathscr{F}$ est faisceau au sens dérivé de support de codimension k, si la cohomologie du complexe $\sigma_{\leqslant k-1}(\mathscr{F})$ n'est pas nulle la suite longue de cohomologie obtenue à partir du triangle précédent montre que le complexe $\mathscr{F}$ n'a pas la propriété de co-support.

Exemple 3.3–9. — Si $\mathscr{F}$ est un faisceau au sens dérivé de support de dimension nulle alors c'est un faisceau ordinaire ponctuel placé en degré $\dim X$.

3.4. Le Complexe d'Irrégularité. — Soient X une variété analytique complexe, Z un fermé analytique et $i : Z \to X$, $j : U := X - Z \to X$ les inclusions canoniques. Pour tout complexe $\mathscr{M}$ de la catégorie $D^b(\mathscr{D}_X)$ on a un triangle distingué de la catégorie $D^b(\mathscr{D}_X)$ de cohomologie locale

$$\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathscr{M}(*Z)) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{M}(*Z) \longrightarrow \mathbf{R}j_*j^{-1}(\mathscr{M}).$$

Définition 3.4–1. — Nous définissons le complexe d'Irrégularité $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ de $\mathscr{M}$ le long de Z par :

$$\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}) := \mathbf{DR}(\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathscr{M}(*Z))) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Gamma_Z(\mathbf{DR}(\mathscr{M}(*Z))).$$

Le complexe $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})[+1]$ apparaît comme le cône du morphisme naturel :

$$a_Z(\mathscr{M}) : \mathbf{DR}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathbf{R}j_*j^{-1}(\mathscr{M})).$$

Le cône $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{O}_X)[+1]$ dans le cas du fibré trivial $\mathscr{O}_X$ et d'une hypersurface Z est précisément l'obstruction du théorème de comparaison locale de Grothendieck [**G2**].

Le foncteur $\mathscr{M} \to \mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est par construction un foncteur covariant exact de catégorie triangulées entre $D^b(\mathscr{D}_X)$ et $D^b(\mathbb{C}_X)$.

De même on a un triangle distingué :

$$i^{-1}\,\mathbf{S}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)) \longrightarrow i^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathscr{M}))$$

Définition 3.4–2. — De même nous définissons le complexe $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ par :

$$\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M}) := i^{-1}\,\mathbf{S}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)).$$

Le complexe $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})[+1]$ apparaît comme le cône du morphisme naturel :

$$b_Z(\mathscr{M}) : i^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathscr{M})).$$

Le foncteur $\mathscr{M} \to \mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ est par construction un foncteur contravariant exact de catégories triangulées entre $D^b(\mathscr{D}_X)$ et $D^b(\mathbb{C}_X)$.

Proposition 3.4–3. — *Si $\mathscr{M}$ est un complexe holonome les complexes $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ et $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ sont constructibles et s'échangent par dualité.*

Démonstration. — En vertu du théorème de constructibilité et de la stabilité des complexes constructibles par cohomologie locale les complexes $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}), \mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ sont constructibles. Alors la proposition est conséquence d'une part de l'échange par dualité des foncteurs image inverse et cohomologie locale :

$$\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathbf{S}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z))^\vee) \xrightarrow{\sim} (i^{-1}\,\mathbf{S}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)))^\vee$$

et d'autre part du théorème de dualité locale :

$$\mathbf{DR}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{S}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)))^\vee.$$

Définissons le faisceau $\mathscr{Q}_Z$ par la suite exacte de $\mathscr{D}_X$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{X|Z} \longrightarrow \mathscr{O}_{\widehat{X|Z}} \longrightarrow \mathscr{Q}_Z \longrightarrow 0.$$

Le corollaire 2.7–2 montre que l'on a un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathscr{M}), \mathscr{O}_X) \simeq \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_{\widehat{X|Z}}).$$

On en déduit le corollaire :

Corollaire 3.4–4. — *Il existe un isomorphisme :*

$$\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})[1] \simeq \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{Q}_Z).$$

Démonstration. — Par construction on a les triangles distingués

$$i^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}) \longrightarrow i^{-1}\,\mathbf{S}(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathscr{M})) \longrightarrow i^{-1}\,\mathbf{S}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z))[1],$$

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_{X|Z}) \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_{\widehat{X|Z}}) \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{Q}_Z).$$

Les deux premiers sommets de ces triangles sont canoniquement isomorphes ce qui entraîne que les troisièmes sommets sont isomorphes mais a priori non canoniquement.

3.5. Le Théorème de Positivité

Définition 3.5–1. — Si $\mathscr{M}$ est un complexe holonome on appelle complexes d'irrégularité de $\mathscr{M}$ le long de Z les complexes constructibles $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}), \mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$.

On a donc deux foncteurs exacts de catégories triangulées qui s'échangent par dualité :

$$\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}), \mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M}) : D^b_h(\mathscr{D}_X) \longrightarrow D^b_c(\mathbb{C}_X).$$

Théorème 3.5–2. — *Soit un triplet $(X, Z, \mathscr{M})$ où X est une variété analytique complexe, Z une* hypersurface *et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome. Alors les complexes* $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}), \mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ ont les propriétés de support et de co-support.

La démonstration du théorème 3.5–2 procède par récurrence sur la dimension de X. Nous allons établir quelques propositions préliminaires.

Soient une inclusion $f : X' \to X$ de variétés analytiques complexes et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent, on dit que X' est non caractéristique pour $\mathscr{M}$ au voisinage d'un point si la variété caractéristique $\mathrm{Ch}(\mathscr{M})$ et le conormal $T^*_{X'}X$ de X' dans X ne se coupent que le long de la section nulle $T^*_X X$ du fibré cotangent $\pi : T^*X \to X$ au voisinage de ce point.

Proposition 3.5–3. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome, alors en dehors d'une partie de dimension nulle de X il passe une hypersurface non singulière et non caractéristique pour $\mathscr{M}$.*

Démonstration. — Rappelons que les composantes irréductibles de la variété caractéristique d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome sont toutes de dimension $\dim X$. Appelons verticales les composantes irréductibles de la variété caractéristiques de $\mathscr{M}$ qui se projettent sur X en une partie de dimension nulle. Si x est un point de X en dehors des projections des composantes verticales, la fibre $\pi^{-1}(x) \cap \mathrm{Ch}(\mathscr{M})$ est un fermé de dimension strictement plus petite que $\dim X$. Toute hypersurface passant par x et conormale à un vecteur non nul de $\pi^{-1}(x)$ qui n'appartient pas à $\pi^{-1}(x) \cap \mathrm{Ch}(\mathscr{M})$ est non caractéristique pour $\mathscr{M}$ au voisinage de x.

Soient une inclusion $f : X' \to X$ de variétés analytiques complexes et $\mathscr{M}$ un complexe de $D^b(\mathscr{D}_X)$, rappelons qu'on on définit son image inverse totale par :

$$f^*_d\mathscr{M} := \mathscr{O}_{X'} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}\mathscr{M}.$$

C'est un complexe de $D^b(\mathscr{D}_{X'})$. La proposition suivante est un cas particulier du théorème de Cauchy-Kowalewska tel que reformulé par Kashiwara et exposé dans [**M-T**] :

Proposition 3.5–4. — *Soit $f : X' \to X$ une hypersurface non singulière et non caractéristique pour un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ au voisinage d'un point x_0. Alors, au voisinage de x_0,*

1) *le module de torsion* $Tor^1_{f^{-1}\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_{X'}, f^{-1}\mathscr{M})$ *est nul,*
2) *le* $\mathscr{D}_{X'}$*-module induit* $f^*\mathscr{M} := \mathscr{O}_{X'} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}\mathscr{M}$ *est cohérent,*
3) *il existe un morphisme de Cauchy-Kowalewska :*

$$f^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{S}(f^*\mathscr{M})$$

qui est un isomorphisme.

Démonstration. — 1) Soit un système de coordonnées $x = (x_1, \dots, x_n)$ locales au voisinage de x_0 tel que X' est définie par $x_1 = 0$. Si $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ sont les coordonnées duales, le fibré conormal $T^*_{X'}X$ est défini par les équations $x_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$. Toute section locale u de $\mathscr{M}_{,x_0}$ est annulée par un opérateur P d'ordre m de type de Weierstrass c'est-à-dire dont le symbole principal contient l'opérateur $\partial^m_{x_1}$. Soit u une section locale telle que $x_1 u = 0$. Alors le crochet $[P, x_1]$ pour un opérateur P d'ordre m de type de Weierstrass annule u. Mais le crochet divisé par m est un opérateur d'ordre $m-1$ de type de Weierstrass. Par récurrence on construit ainsi un opérateur de Weierstrass d'ordre zéro non nul qui annule u. Donc u est nul. D'où la première assertion.

2) Supposons que pour tout $\mathscr{D}_X$-module cohérent monogène $\mathscr{D}_X u$ tel que l'hypersurface X' est non caractéristique, le module induit $f^*\mathscr{D}_X u$ est $\mathscr{D}_{X'}$-cohérent, alors le module induit $f^*\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_{X'}$-module de type fini. En effet pour un système de générateurs locaux $u_1, \dots, u_r$ de $\mathscr{M}$ on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow f^*\mathscr{N} \longrightarrow \oplus_{k=1,\dots,r} f^*\mathscr{D}_X u_k \longrightarrow f^*\mathscr{M} \longrightarrow 0.$$

Mais X' est non caractéristique pour $\mathscr{N}$ et donc $f^*\mathscr{N}$ est un $\mathscr{D}_{X'}$-module de type fini et $f^*\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_{X'}$-module cohérent.

On peut supposer que $\mathscr{M}$ est monogène. Mais alors on une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{D}_X/P \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow 0$$

où l'opérateur P est de type Weierstrass. Le module induit $f^*\mathscr{D}_X/P$ est un $\mathscr{D}_{X'}$-module libre de rang m. Ceci entraîne que $f^*\mathscr{N}$ est de type fini puis cohérent comme sous module de type fini d'un module cohérent. Donc le $\mathscr{D}_{X'}$-module $f^*\mathscr{M}$ est cohérent.

Posons

$$\mathscr{D}_{X' \to X} := f_d^*\mathscr{D}_X$$

qui est un $\mathscr{D}_{X'}$-module libre de rang infini. Soit $\mathscr{D}^\bullet_X \to \mathscr{M}$ une résolution locale de $\mathscr{M}$ par des $\mathscr{D}_X$-module libres de rang fini. Le complexe

$$f^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}^\bullet_X, \mathscr{O}_X)$$

représente le complexe $f^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M})$ et le complexe

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X'}}(\mathscr{D}^\bullet_{X' \to X}, \mathscr{O}_{X'})$$

représente le complexe $\mathbf{S}(f^*\mathscr{M})$. Le morphisme de Cauchy-Kowalewska provient du morphisme de fonctorialité

$$f^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_X^\bullet, \mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X'}}(\mathscr{D}_{X'\to X}^\bullet, \mathscr{O}_{X'}).$$

Si P est un opérateur d'ordre m de type Weierstrass le théorème de Cauchy-Kowalewska dit précisément que le morphisme

$$f^{-1}\,\mathrm{Ker}(P, \mathscr{O}_X) \longrightarrow (\mathscr{O}_{X'})^m$$

est un isomorphisme et que

$$f^{-1}\,\mathrm{Coker}(P, \mathscr{O}_X)$$

est nul. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{N} \longrightarrow \oplus_{k=1,\dots,r}\mathscr{D}_X/P_k \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow 0$$

pour des opérateurs de type de Weierstrass P_k qui donne les diagrammes :

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow & f^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X) & \longrightarrow & f^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\oplus_{k=1,\dots,r}\mathscr{D}_X/P_k, \mathscr{O}_X) & \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X'}}(f^*\mathscr{M}, \mathscr{O}_{X'}) & \longrightarrow & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X'}}(f^*\oplus_{k=1,\dots,r}\mathscr{D}_X/P_k, \mathscr{O}_{X'}) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow & f^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{N}, \mathscr{O}_X) & \longrightarrow & f^{-1}\,\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X) & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X'}}(f^*\mathscr{N}, \mathscr{O}_{X'}) & \longrightarrow & \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_{X'}}(f^*\mathscr{M}, \mathscr{O}_{X'}) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}\,\mathscr{E}xt^\ell_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{N}, \mathscr{O}_X) & \xrightarrow{\sim} & f^{-1}\,\mathscr{E}xt^{\ell+1}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{E}xt^\ell_{\mathscr{D}_{X'}}(f^*\mathscr{N}, \mathscr{O}_{X'}) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{E}xt^{\ell+1}_{\mathscr{D}_{X'}}(f^*\mathscr{M}, \mathscr{O}_{X'}).
\end{array}$$

Le premier diagramme montre que pour tout $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ tel que X' est non caractéristique le premier morphisme vertical du premier diagramme est injectif. Ceci appliqué à $\mathscr{N}$ montre que les morphisme verticaux du premier diagramme sont tous des isomorphismes. Le deuxième diagramme montre par récurrence sur $\ell \geqslant 1$ que les morphismes verticaux du deuxième diagramme sont des isomorphismes.

Proposition 3.5–5. — *Soient $f : X' \to X$ une hypersurface lisse, Z une hypersurface de X et $\mathscr{M}$ pour un $\mathscr{D}_X$-module, il existe un morphisme*

$$f^*\mathscr{M}(*Z) \longrightarrow (f^*\mathscr{M})(*Z')$$

qui est un isomorphisme de $\mathscr{D}_X$-modules où $Z' := f^{-1}(Z)$.

Démonstration. — Cela provient des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned}\mathscr{O}_{X'} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}(\mathscr{O}(*Z) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}) &\simeq \mathscr{O}_{X'} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}(\mathscr{O}(*Z)) \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}\mathscr{M})\\ &\simeq \mathscr{O}_{X'}(*Z') \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}\mathscr{M}.\end{aligned}$$

Proposition 3.5–6. — *Soient une stratification de Whitney Σ adaptée à un complexe constructible $\mathscr{F}$ et $f : X' \to X$ est une hypersurface non singulière transverse en un point x_0 à la strate passant ce point. Alors*

1) *le complexe $\mathscr{F}$ a la propriété de support au voisinage de x_0 si et seulement si sa restriction $f^{-1}\mathscr{F}$ a la propriété de support au voisinage de x_0,*

2) *la stratification Σ est adaptée au complexe dual $\mathscr{F}^\vee$ et le morphisme naturel de restriction*

$$f^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathbb{C}_X) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_{X'}}(f^{-1}\mathscr{F}, \mathbb{C}_{X'})$$

est un isomorphisme au voisinage de x_0.

Démonstration. — 1) Il résulte de la condition (b) de Whitney que X' reste transverse à toutes les strates de Σ au voisinage de x_0. La stratification Σ', trace de Σ sur X', est adaptée à la restriction $f^{-1}\mathscr{F}$. Les dimensions des strates diminuent strictement d'une unité par transversalité et donc la dimension du support d'un faisceau constructible par rapport à Σ diminue strictement d'une unité. D'où la première assertion.

2) Par dévissage ([**M-N1**], I.4.14) on peut supposer que $\mathscr{F}$ est un faisceau localement constant de rang fini sur une strate Y et nul en dehors de Y au voisinage de x_0. Notons $j : Y \to X$ l'inclusion canonique. Donc $j_! j^{-1}\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}$. Par dualité de Grothendieck-Verdier on a l'isomorphisme canonique :

$$\mathbf{R}j_*\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_Y}(j^{-1}\mathscr{F}, \mathbb{C}_Y)[2\dim Y] \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(j_! j^{-1}\mathscr{F}, \mathbb{C}_X)[2\dim X].$$

Comme conséquence du premier théorème d'isotopie de Thom-Whitney le complexe

$$\mathbf{R}j_*\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_Y}(j^{-1}\mathscr{F}, \mathbb{C}_Y) = \mathbf{R}j_*\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_Y}(j^{-1}\mathscr{F}, \mathbb{C}_Y)$$

est constructible par rapport à la stratification Σ au voisinage de x_0 ([**M-N1**], I.4.11).

Notons encore les inclusions $j : Y' := X' \cap Y \to X', f : Y' \to Y$ les inclusions canoniques. Le morphisme

$$f^{-1}\mathbf{R}j_*\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_Y}(j^{-1}\mathscr{F}, \mathbb{C}_Y) \longrightarrow \mathbf{R}j_*f^{-1}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_Y}(j^{-1}\mathscr{F}, \mathbb{C}_Y)$$

est un isomorphisme au voisinage de x_0 parce qu'en vertu du premier théorème d'isotopie de Thom-Whitney ([**M-N1**], I.4.11) que Y et $X' \cap Y$ ont même type d'homotopie.

Corollaire 3.5–7. — *Soient une stratification de Whitney Σ adaptée à un complexe constructible $\mathscr{F}$ et $f : X' \to X$ une hypersurface non singulière transverse en un point x_0 à la strate passant par ce point. Alors le complexe $\mathscr{F}$ est un faisceau au sens dérivé au voisinage de x_0 si et seulement si le complexe $f^{-1}\mathscr{F}$ est un faisceau au sens dérivé au voisinage de x_0.*

Proposition 3.5–8. — *Pour un complexe $\mathscr{N}$ de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X)$ et $j : X - Z \to X$ l'inclusion du complémentaire d'une hypersurface, on a des isomorphismes canoniques :*

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{N}^*, \mathbf{R}j_*j^{-1}\mathscr{O}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{DR}(\mathbf{R}j_*j^{-1}\mathscr{N}),$$

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{N}^*, \mathscr{O}_X(*Z)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{DR}(\mathscr{N}(*Z)).$$

Démonstration. — Le premier isomorphisme est simplement conséquence de l'isomorphisme canonique :

$$\mathbf{S}(\mathscr{N}^*) \xrightarrow{\sim} \mathbf{DR}(\mathscr{N})$$

et de la commutation $\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{N}^*, \mathbf{R}j_*j^{-1}\mathscr{O}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}j_*j^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{N}^*, \mathscr{O}_X)$.

Le deuxième est plus subtil. On part de l'isomorphisme :

$$\mathbf{DR}(\mathscr{N}(*Z))[\dim X] \xrightarrow{\sim} \omega_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} \mathscr{N}(*Z) \xrightarrow{\sim} \omega_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} (\mathscr{N} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(*Z)).$$

Si $\mathscr{L}$ est un $\mathscr{D}_X$-module à gauche plat, le $\mathscr{D}_X$-module à droite $\omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}$ est plat et le $\mathscr{D}_X$-module à gauche $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(*Z)$ est plat. Le morphisme naturel de $\mathscr{O}_X$-modules :

$$(\omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}) \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{O}_X(*Z) \longrightarrow \omega_X \otimes_{\mathscr{D}_X} (\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(*Z))$$

est $\mathscr{D}_X$-linéaire [**C**, 1.1.3, 1.3.4]. C'est alors un isomorphisme. On obtient en résolvant $\mathscr{N}$ par des $\mathscr{D}_X$-modules plats l'isomorphisme :

$$(\omega_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} \mathscr{N}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(*Z) \xrightarrow{\sim} \omega_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} (\mathscr{N} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(*Z)).$$

Il ne reste plus qu'à remarquer l'isomorphisme :

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{N}^*, \mathscr{D}_X)[\dim X] \xrightarrow{\sim} \omega_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} \mathscr{N}$$

pour avoir le deuxième isomorphisme de la proposition.

Si on définit le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{L}_Z$ par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(*Z) \longrightarrow j_*j^{-1}\mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{L}_Z \longrightarrow 0$$

on trouve que le complexe $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est canoniquement isomorphe au complexe

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}^*, \mathscr{L}_Z)[-1].$$

Théorème 3.5–9. — *Pour tout module holonome $\mathscr{N}$ le faisceau $\mathscr{E}xt^{\dim X}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{N}, \mathscr{L}_Z)$ est nul.*

Démonstration. — Comme on déjà vu on a un isomorphisme canonique :

$$\mathscr{N}^{\vee} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} \mathscr{L}_Z[-\dim X] \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{N}, \mathscr{L}_Z).$$

En particulier on a l'isomorphisme canonique :

$$\mathscr{N}^{\vee} \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{L}_Z \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}xt^{\dim X}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{N}, \mathscr{L}_Z).$$

Il suffit de montrer que le faisceau constructible $\mathscr{N}^{\vee} \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{L}_Z$ est nul. C'est un problème local. Soit une présentation locale de $\mathscr{D}_X$-module à droite

$$\mathscr{D}_X^{q_1} \xrightarrow{P\cdot} \mathscr{D}_X^{q_0} \longrightarrow \mathscr{N}^{\vee} \longrightarrow 0.$$

Alors on a le diagramme où les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{O}(*Z)^{q_1} & \xrightarrow{P\cdot} & \mathscr{O}(*Z)^{q_0} & \longrightarrow & \mathscr{N}^{\vee} \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{O}(*Z) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
j_*j^{-1}\mathscr{O}_X^{q_1} & \xrightarrow{P\cdot} & j_*j^{-1}\mathscr{O}_X^{q_0} & \longrightarrow & \mathscr{N}^{\vee} \otimes_{\mathscr{D}_X} j_*j^{-1}\mathscr{O}_X & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathscr{L}_Z^{q_1} & \xrightarrow{P\cdot} & \mathscr{L}_Z^{q_0} & \longrightarrow & \mathscr{N}^{\vee} \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{L}_Z & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Il s'agit de montrer que le premier morphisme de la dernière colonne est *surjectif.*

Nous allons d'abord montrer que pour tout point x_0 de Z et tout voisinage de Stein $B(x_0, \epsilon)$ assez petit, la suite

$(*)$

$$\Gamma(B(x_0,\epsilon), j_*j^{-1}\mathscr{O}_X^{q_1}) \xrightarrow{P\cdot} \Gamma(B(x_0,\epsilon), j_*j^{-1}\mathscr{O}_X^{q_0}) \longrightarrow (\mathscr{N}^{\vee} \otimes_{\mathscr{D}_X} j_*j^{-1}\mathscr{O}_X)_{,x_0} \longrightarrow 0$$

est exacte, quitte à choisir une autre présentation de $\mathscr{N}^{\vee}$. En effet le module $\mathscr{N}^{\vee}$ admet une résolution locale

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}_X^{q_{2n}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{D}_X^{q_0} \longrightarrow \mathscr{N}^{\vee} \longrightarrow 0$$

par des $\mathscr{D}_X$-modules libres de rang fini en vertu de la proposition 2.7–3. Donc le complexe

$$\mathbf{R}\Gamma(B(x_0,\epsilon), \mathscr{N}^{\vee} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} j_*j^{-1}\mathscr{O}_X)$$

se représente par le complexe

$$\Gamma(B(x_0,\epsilon), j_*j^{-1})\mathscr{O}_X^{q_{2n}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma(B(x_0,\epsilon), j_*j^{-1}\mathscr{O}_X^{q_0})$$

en vertu du théorème B de Cartan. Ce complexe représente le complexe

$$(\mathscr{N}^{\vee} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} j_*j^{-1}\mathscr{O}_X)_{,x_0}$$

pour $B(x_0, \epsilon)$ assez petit en vertu de la constructibilité ([**M-N1**], I.4.16). D'où la suite exacte $(*)$ cherchée.

Lemme 3.5–10. — *Pour $B(x_0,\epsilon)$ assez petit, l'espace $\Gamma(B(x_0,\epsilon),\mathscr{O}_X(*Z))$ est dense dans l'espace*
$$\Gamma(B(x_0,\epsilon),j_*j^{-1}\mathscr{O}_X)$$
pour la topologie naturelle d'espace métrique complet.

Démonstration. — Soit g une équation locale de Z. L'espace analytique $B(x_0,\epsilon)-Z$ est le fermé du produit $B(x_0,\epsilon)\times\mathbb{C}^*$ défini par $t=g(x)$. En vertu du théorème B de Cartan l'espace $\Gamma(B(x_0,\epsilon),j_*j^{-1}\mathscr{O}_X)$ est un quotient de l'espace des fonctions holomorphes sur $B(x_0,\epsilon)\times\mathbb{C}^*$ qui contient comme sous-espace dense les fonctions ayant au plus un pôle en t dont l'image est précisément l'espace $\Gamma(B(x_0,\epsilon),\mathscr{O}_X(*Z))$. D'où le lemme.

Le morphisme $P\cdot$ de la suite $(*)$ est une application linéaire continue d'espaces vectoriels topologiques métriques complets, donc de type $\mathscr{F}$ et son image est de codimension finie. En vertu du théorème des homomorphismes pour les espaces de type $\mathscr{F}$, cette image est fermée et la topologie quotient sur $\mathscr{N}^\vee\otimes_{\mathscr{D}_X}j_*j^{-1}\mathscr{O}_{X,x_0}$ est *séparée.* En vertu du lemme précédent l'image de l'espace $\Gamma(B(x_0,\epsilon),\mathscr{O}_X(*Z))$ est partout dense. Par limite inductive l'image du morphisme
$$(\mathscr{N}^\vee\otimes_{\mathscr{D}_X}\mathscr{O}_X(*Z))_{,x_0}\longrightarrow(\mathscr{N}^\vee\otimes_{\mathscr{D}_X}j_*j^{-1}\mathscr{O}_X)_{,x_0}$$
est partout dense. Ce morphisme est surjectif, d'où le théorème 3.5–9.

Exercice 3.5–11. — Montrer en utilisant le théorème de la forme normale canonique [**M-N2**] que la topologie inductive naturelle sur l'espace $j_*j^{-1}\mathscr{O}_{X,x_0}$ est séparée. En déduire le théorème 3.5–9 par des raisonnement purement locaux en utilisant le théorème des homomorphismes pour les espaces $\mathscr{L}\mathscr{F}$ de Grothendieck.

Proposition 3.5–12. — *Soient un point x_0 de Z, g une équation locale de Z en x_0 et $\mathscr{M}_{,x_0}$ un $\mathscr{D}_{X,x_0}$-module à gauche dont l'action de g et surjective. Alors l'espace $Hom_{\mathscr{D}_{X,x_0}}(\mathscr{M}_{,x_0},\mathscr{O}_{X,x_0})$ est nul.*

Démonstration. — Soit φ un élément de $Hom_{\mathscr{D}_{X,x_0}}(\mathscr{M}_{,x_0},\mathscr{O}_{X,x_0})$ et e un élément de $\mathscr{M}_{,x_0}$. Alors en vertu de l'hypothèse $\varphi(e)$ appartient à toutes les puissances de l'idéal définit par g de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x_0}$. La topologie g-adique de l'anneau local noethérien $\mathscr{O}_{X,x_0}$ est séparée en vertu du théorème de Krull. D'où la proposition.

Démonstration du théorème 3.5–2. — Soit $(X,Z,\mathscr{M})$ comme dans le théorème, il s'agit de montrer que les complexes d'irrégularité qui sont en dualité $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}),\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ sont des faisceaux au sens dérivé sur X. La question est locale sur X. On procède par récurrence sur $\dim X$.

Le faisceau $i^{-1}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z),\mathscr{O}_X)$ est nul en vertu de la proposition précédente, puisque l'action des équations locales de Z sur $\mathscr{M}(*Z)$ est bijective. En vertu de la condition de support du complexe $\mathbf{S}(\mathscr{M}(*Z))$ le complexe $i^{-1}\mathbf{S}(\mathscr{M}(*Z))$ a la condition de support.

En particulier si $\dim X = 1$, le complexe $i^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}(*Z))$ est concentré cohomologiquement en degré un et est donc un faisceau au sens dérivé sur X. Pour le complexe $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$, on utilise soit le théorème 3.5–9 soit le théorème de dualité locale 3.3–1.

Si $\dim X \geqslant 2$ il passe en dehors d'une partie de dimension nulle de Z, formée par les projections des composantes verticales de la variété caractéristique de $\mathscr{M}(*Z)$ et des strates de dimension nulle d'une stratification de Whitney adaptée au complexe $\mathbf{S}(\mathscr{M}(*Z))$ une hypersurface $f : X' \to X$ non caractéristique pour $\mathscr{M}(*Z)$ et transverse à cette stratification. Posons $\mathscr{M}' := f^*\mathscr{M}$ et $i' : Z' := f^{-1}(Z) \to X'$.

En vertu de 3.5–5, on a l'isomorphisme

$$f^*\mathscr{M}(*Z) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}'(*Z').$$

En vertu du théorème de Cauchy-Kowalewska 3.5–4 on a l'isomorphisme

$$i'^{-1}f^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}(*Z)) \xrightarrow{\sim} i'^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}'(*Z')).$$

En vertu de l'hypothèse de récurrence le complexe $i'^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}'(*Z'))$ est un faisceau au sens dérivé sur X'. En vertu de 3.5–7 le complexe $i^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}(*Z))$ est un faisceau au sens dérivé en dehors d'une partie de dimension nulle. Donc son complexe dual

$$\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}^*, \mathscr{L}_Z)[-1]$$

a la propriété de support en dehors d'une partie de dimension nulle. Ce qui l'empêche d'avoir la condition de support est son dernier faisceau de cohomologie

$$\mathscr{E}xt^{\dim X}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}^*, \mathscr{L}_Z)$$

qui est nul en vertu du théorème 3.5–9. D'où le théorème 3.5–2.

Remarque 3.5–13. — La partie profonde du théorème 3.5–2 est d'améliorer la majoration :

$$\dim \mathrm{Supp}\,\mathscr{E}xt^{\dim X-k}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}^*, \mathscr{L}_Z) \leqslant k, \quad k = 0, \ldots, \dim X$$

que l'on déduit des conditions de support des complexes de de Rham dont le complexe $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est le cône, par la majoration :

$$\dim \mathrm{Supp}\,\mathscr{E}xt^{\dim X-k}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}^*, \mathscr{L}_Z) \leqslant k-1, \quad k = 0, \ldots, \dim X.$$

Pour $k = 0$ c'est le théorème 3.5–9. Pour $1 \leqslant k \leqslant \dim X$ on l'a déduit de l'hypothèse de récurrence mais en utilisant tous les résultats précédents. Les points clefs sont les propriétés des complexes constructibles qui reposent sur l'existence de stratification de Whitney, les propriétés des modules holonomes et leur variétés caractéristiques, le théorème de Cauchy-Kowalewska 3.5–4, le théorème de constructibilité 3.2–2 et surtout du théorème de dualité locale 3.3–1 qui est au fond du problème. En tout cas il y a beaucoup de mathématique dans cette majoration. Il n'est pas étonnant qu'elle ait beaucoup de conséquences.

Remarque 3.5–14. — Prendre garde que les complexes constructibles $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$, $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ n'ont pas, en général, les propriétés de support et de co-support si Z n'est pas une hypersurface.

Remarque 3.5–15. — Convenons que si $\mathscr{F}$ est un faisceau au sens dérivé à support dans l'hypersurface Z, le complexe $\mathscr{F}[1]$ est un faisceau au sens dérivé sur Z. On note $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_Z)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $D^b_c(\mathbb{C}_Z)$ des faisceaux au sens dérivé sur Z. Les complexes $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})[1]$ et $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})[1]$ sont des faisceaux sur Z. Autrement dit on a des foncteurs :

$$\mathrm{Irr}_Z, \mathrm{Irr}^*_Z : \mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X) \longrightarrow \mathrm{Perv}(\mathbb{C}_Z).$$

Nous verrons au chapitre 10 que la catégorie $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_Z)$ est abélienne et que les foncteurs précédents sont des foncteurs exacts de catégories abéliennes et que le triangle distingué

$$0 \longrightarrow \mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathbf{R}j_*j^{-1}(\mathscr{M})) \longrightarrow 0$$

est en faite une suite exacte dans une catégorie abélienne réalisant l'idée initiale dans ce cas là que les triangles distingués dans une catégorie dérivée doivent jouer le rôle des suites exactes des catégories abéliennes.

Remarque 3.5–16. — Nous verrons au chapitre 10 que les faisceaux $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}), \mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ sont les complexes de de Rham de modules holonomes. On peut alors définir les cycles caractéristiques des faisceaux $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}), \mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ comme les cycles caractéristiques de leurs modules holonomes associés. Les cycles caractéristiques des faisceaux $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}), \mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ sont alors positifs, d'où le nom de positivité donné au théorème 3.5–2.

Remarque 3.5–17. — Il est beaucoup plus intéressant de définir d'abord directement le cycle d'irrégularité d'un module holonome le long d'une hypersurface algébriquement en caractéristique nulle puis de montrer que c'est un cycle positif comme cela est fait dans l'article [**L-M**]. Cependant le lecteur prendra garde que la positivité du cycle d'irrégularité dans le cas complexe *n'est pas équivalente* aux propriétés de support et de co-support pour le faisceau d'irrégularité.

Remarque 3.5–18. — Le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ détermine le cycle $\mathrm{CCh}(\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}))$ mais le cycle $\mathrm{CCh}(\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}))$ ne détermine pas le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$.

Définition 3.5–19. — On dit qu'un $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$ est une connexion méromorphe le long de Z si sa restriction à l'ouvert $j : U := X - Z \to X$ est un $\mathscr{O}_U$-module localement libre de rang fini et s'il est isomorphe à leur localisé $\mathscr{M}(*Z)$.

Notons $\mathrm{Mh}(\mathscr{O}_X(*Z))$ la catégorie des connexions méromorphes le long de Z. Une connexion méromorphe est automatiquement un $\mathscr{D}_X$-module holonome [**M-T**].

Dans le cas des connexions méromorphes la définition du cycle d'irrégularité est simple.

Définition 3.5–20. — Soit $\mathscr{M}$ une connexion méromorphe le long de Z de rang générique r, on définit son cycle d'irrégularité $\mathrm{CCh}(\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}))$ comme la différence des cycles caractéristiques

$$\mathrm{CCh}(\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})) := \mathrm{CCh}(\mathscr{M}(*Z)) - r\,\mathrm{CCh}(\mathscr{O}_X(*Z)).$$

La signification du théorème de positivité est que cette différence est positive, autrement dit le cycle

$$r\,\mathrm{CCh}(\mathscr{O}_X)$$

est *la borne inférieure* des cycles caractéristiques de toutes les connexions méromorphes le long de Z de rang r. Les multiplicités du cycle d'irrégularité sont des entiers positifs. On voit déjà dans le cas des connexions méromorphes que le calcul effectif des cycles d'irrégularité est non trivial, même dans le cas où l'hypersurface Z est lisse, et à fortiori le calcul du faisceau d'irrégularité est non trivial.

Définition 3.5–21. — On dit qu'une connexion méromorphe $\mathscr{M}(*Z)$ le long de Z est *génériquement régulière* si la dimension du support de son faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est strictement plus petite que $\dim Z$.

Le théorème 3.5–2 à la conséquence suivante. On note $\mathrm{Mhr}(\mathscr{O}_X(*Z))$ la catégorie des connexions méromorphes le long de Z génériquement régulières.

Corollaire 3.5–22. — *Si $\mathscr{M}_1(*Z)$ et $\mathscr{M}_2(*Z)$ sont deux connexions méromorphes génériquement régulières le morphisme de restriction :*

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1(*Z), \mathscr{M}_2(*Z)) \longrightarrow j_*j^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1(*Z), \mathscr{M}_2(*Z))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Remarquons d'abord que pour toute hypersurface $f : X' \hookrightarrow X$ non singulière de X le morphisme naturel

$$f^*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{M}_1(*Z), \mathscr{M}_2(*Z))) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X'}}(f^*\mathscr{M}_1(*Z), f^*\mathscr{M}_2(*Z))$$

est un isomorphisme de connexions méromorphes sur X'. En effet le noyau et conoyau qui sont des connexions méromorphes sont à support dans $Z' := X' \cap Z$ et sont donc nuls. Cela entraîne que pour toute variété non singulière $f : X' \hookrightarrow X$ le morphisme précédent est encore un isomorphisme de connexions méromorphes sur X'.

Maintenant si $f : X' \hookrightarrow X$ est une courbe non singulière assez générale qui est non caractéristique pour les trois connexions méromorphes

$$\mathscr{M}_1(*Z), \mathscr{M}_2(*Z), \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{M}_1(*Z), \mathscr{M}_2(*Z))$$

la restriction du faisceau

$$\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{M}_1(*Z), \mathscr{M}_2(*Z)))$$

à Z' est isomorphe au faisceau

$$\mathrm{Irr}^*_{Z'}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X'}}(f^*\mathscr{M}_1(*Z), f^*\mathscr{M}_2(*Z))).$$

Ce faisceau est nul parce qu'en dimension 1 la connexion des morphismes de deux connexions régulières est encore régulière. Cela se voit en considérant deux réseaux dans lesquels l'action de la connexion est logarithmique. Cela entraîne que la connexion

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{M}_1(*Z), \mathscr{M}_2(*Z))$$

est génériquement régulière. En vertu du théorème de Cauchy-Kowalewska 3.5–4 et du théorème de positivité le faisceau

$$\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{M}_1(*Z), \mathscr{M}_2(*Z)))$$

est cohomologiquement concentré entre les degrés 1 et $\dim X$. Le morphisme

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1(*Z), \mathscr{M}_2(*Z)) \longrightarrow j_*j^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1(*Z), \mathscr{M}_2(*Z))$$

est donc *surjectif.* D'autre part son noyau est contenu dans

$$\Gamma_Z(\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1(*Z), \mathscr{M}_2(*Z))) \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1(*Z), \Gamma_Z(\mathscr{M}_2(*Z))),$$

mais $\Gamma_Z(\mathscr{M}_2(*Z))$ est nul, et donc le morphisme précédent est un isomorphisme.

Corollaire 3.5–23. — *Le foncteur qui à une connexion méromorphe le long de Z génériquement régulière associe son système local des sections horizontales sur U est pleinement fidèle.*

Démonstration. — En effet si $\mathscr{F}_i := \mathbf{DR}(\mathscr{M}_{iU})$ est le système local des sections horizontales associé à la restriction à U de la connexion $\mathscr{M}_i$ alors le faisceau $j^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2)$ est canoniquement isomorphe au faisceau $\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_U}(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ par le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy des équations différentielles sans singularités. On en déduit le corollaire en prenant les sections globales.

Remarque 3.5–24. — Le lecteur remarquera que le corollaire précédent est déjà un succès spectaculaire du théorème de positivité comparé aux tentatives de démonstration pré-existantes. En fait nous ne connaissons pas une autre démonstration complète de ce résultat qui soit indépendante du théorème de positivité même en utilisant le théorème de la résolution des singularités.

Exemple 3.5–25. — Si X est une surface de Riemann et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome. L'ensemble des points singuliers de $\mathscr{M}$ est formé de points isolés Z. Le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est ponctuel dont la dimension en chaque point singulier est égale en vertu du théorème de Malgrange au nombre de Fuchs attaché à ce point.

Soient X une variété analytique complexe, Z une hypersurface et $g(x)$ une fonction méromorphe ayant au plus des pôles sur Z. Le $\mathscr{O}_X(*Z)$-module $\mathscr{O}_X(*Z)\exp(g(x))$ est libre de rang 1 muni d'une connexion intégrable, donc d'une action à gauche de $\mathscr{D}_X$. C'est donc une connexion méromorphe dont le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{O}_X(*Z)\exp(g(x))$ fournit un exemple de faisceau d'irrégularité qu'il s'agit de calculer effectivement, ce qui en général est non trivial comme pour tout objet de nature cohomologique. Remarquons que l'on peut considérer le sous $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{D}_X \exp(g(x))$ engendré par le générateur $\exp(g(x))$ qui est en général distinct de la connexion méromorphe $\mathscr{O}_X(*Z)\exp(g(x))$ mais dont le quotient est à support contenu dans Z. Les faisceaux $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{D}_X \exp(g(x)))$ et $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{O}_X(*Z)\exp(g(x))$ coïncident donc par construction. Nous allons calculer les rangs de deux exemples simples et proposer au lecteur d'autres exemples.

Exemple 3.5–26. — Soit $X := \{x, y \in \mathbb{C}^2\}$, Z l'axe des x et $g(x,y) = x/y$. Dans ce cas le module $\mathscr{D}_X \exp(x/y)$ coïncide avec $\mathscr{O}_X(*Z)\exp(x/y)$. L'annulateur de la fonction $\exp(x/y)$ contient les opérateurs $y\partial_x - 1$, $y^2\partial_y + x$. Le module quotient $\mathscr{D}_X/(y\partial_x - 1, y^2\partial_y + x)$ se surjecte sur le module $\mathscr{D}_X \exp(x/y)$. Par un calcul direct on voit que l'action à gauche de y sur $\mathscr{D}_X/(y\partial_x - 1, y^2\partial_y + x)$ est bijective. Ceci montre que le module $\mathscr{D}_X/(y\partial_x - 1, y^2\partial_y + x)$ est une connexion méromorphe isomorphe à $\mathscr{O}_X(*Z)\exp(x/y)$. Nous sommes ramenés pour calculer les faisceaux de cohomologie du faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{D}_X \exp(x/y))$ à calculer

$$\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_X/(y\partial_x - 1, y^2\partial_y + x), \mathscr{O}_X) \quad \text{et} \quad \mathscr{E}xt^2_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_X/(y\partial_x - 1, y^2\partial_y + x), \mathscr{O}_X).$$

Le premier faisceau est localement constant de rang 1 sur le plan des x privé de l'origine et le second faisceau est ponctuel porté par l'origine. Reste à calculer leur valeur à l'origine. En vertu du corollaire 3.4–4 ils sont isomorphes aux faisceaux

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_X/(y\partial_x - 1, y^2\partial_y + x), \mathscr{Q}_Z) \quad \text{et} \quad \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_X/(y\partial_x - 1, y^2\partial_y + x), \mathscr{Q}_Z).$$

Une solution à l'origine est une série formelle $F(x,y) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(x)y^n$ où a_n est une suite de fonctions holomorphes définies dans un même voisinage de l'origine assez petit telle que $(y\partial_x - 1)(F) = (y^2\partial_y + x)(F) = 0$ dans l'espace $\mathscr{Q}_{Z,0}$ c'est-à-dire que les séries précédentes sont convergentes. L'idéal $(y\partial_x - 1, y^2\partial_y + x) = 0$ contient l'opérateur $y(x\partial_x + y\partial_y)$ qui force F à être aussi convergente. La fibre à l'origine du premier faisceau est nulle. La dimension de la fibre à l'origine du second faisceau est l'obstruction à résoudre dans l'espace $\mathscr{Q}_{Z,0}$ le système

$$(y\partial_x - 1)(F) = G, (y^2\partial_y + x)(F) = H$$

quand F, G satisfont aux conditions de compatibilités. Or une compatibilité évidente est la relation $[y^2\partial_y + x, y\partial_x - 1] = y(y\partial_x - 1)$. On peut toujours résoudre l'équation

$$y(x\partial_x + y\partial_y)(F) = H + xG$$

dans l'espace $\mathscr{Q}_{Z,0}$. La compatibilité

$$(y^2\partial_y + x)(G) - (y\partial_x - 1)(H) = yG$$

entraîne que l'obstruction à résoudre le système précédent est nulle. La fibre à l'origine du second faisceau est aussi nulle. Le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\exp(x/y))$ se réduit à un système local de rang un sur le plan épointé prolongé par zéro. Le calcul de la monodromie est plus compliqué. Le cycle $\mathrm{CCh}(\mathrm{Irr}_Z(\exp(x/y)))$ a deux composantes $T^*_Z X$ et $T^*_0 X$ affectées chacune de la multiplicité 1 :

$$\mathrm{CCh}(\mathrm{Irr}_Z(\exp(x/y)) = T^*_Z X + T^*_0 X.$$

Exemple 3.5–27. — Soit $X := \{x, y \in \mathbb{C}^2\}$, Z l'axe des x et $g(x,y) = (x+y)/y^2$. Dans ce cas le module $\mathscr{D}_X \exp((x+y)/y^2)$ coïncide avec $\mathscr{O}_X(*Z)\exp((x+y)/y^2)$ et est défini par le système $(y^2\partial_x - 1, y^3\partial_y + 2x + y)$. L'idéal $(y^2\partial_x - 1, y^3\partial_y + 2x + y)$ est égal à l'idéal $(y^2\partial_x - 1, 2x\partial_x + y\partial_y + y\partial_x)$. Posons $P = 2x\partial_x + y\partial_y + y\partial_x$ et $Q = y^2\partial_x - 1$. Nous allons montrer que

$$\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_X/(P,Q), \mathscr{O}_X)_{,0} = \mathscr{E}xt^2_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_X/(P,Q), \mathscr{O}_X)_{,0} = 0$$

et pour cela en vertu corollaire 3.4–4 il suffit de montrer que

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_X/(P,Q), \mathscr{Q}_Z)_{,0} = \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_X/(P,Q), \mathscr{Q}_Z)_{,0} = 0.$$

L'opérateur $E := 2x\partial_x + y\partial_y$ est homogène en x et y et est inversible sur l'espace des séries formelles $\mathbb{C}[[x,y]]$ nulles à l'origine comme dans l'espace des séries convergentes $\mathbb{C}\{\{x,y\}\}$ nulles à l'origine. Cela entraîne que l'opérateur $P = E(1 + E^{-1}y\partial_x)$ est aussi inversible dans l'espace des séries formelles $\mathbb{C}[[x,y]]$ nulles à l'origine d'inverse :

$$\Big(\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n(E^{-1}y\partial_x)^n\Big)E^{-1}.$$

Par un calcul direct on voit que si la série g est convergente la série $P^{-1}(g)$ est aussi convergente. Cela entraîne que si $P(f)$ est une série convergente la série f est convergente. En particulier l'espace $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_X/(P,Q), \mathscr{Q}_Z)_{,0}$ est nul. Pour montrer que l'espace $\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_X/(P,Q), \mathscr{Q}_Z)_{,0}$ est nul il suffit de montrer qu'il n'y a pas d'obstruction à résoudre dans l'espace $\mathscr{Q}_{Z,0}$ le système $P(f) = g, Q(f) = h$ pour g et h satisfaisant aux conditions de compatibilités. Mais le commutateur $[P,Q]$ est nul d'où une condition de compatibilité $P(h) = Q(g)$. Par un calcul direct on voit qu'on peut résoudre dans l'espace $\mathscr{Q}_{Z,0}$ l'équation $P(f) = g$. D'où $P(Q(f) - h) = 0$ dans l'espace $\mathscr{Q}_{Z,0}$ et en vertu de ce qui précède $Q(f) = h$ dans l'espace $\mathscr{Q}_{Z,0}$. L'espace $\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_X/(P,Q), \mathscr{Q}_Z)_{,0}$ est nul. Le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\exp((x+y)/y^2))$ se réduit à un système local de rang 2 sur la droite des x épointée prolongé par zéro. Son cycle caractéristique vaut

$$\mathrm{CCh}(\mathrm{Irr}_Z(\exp((x+y)/y^2))) = 2T^*_0 X + 2T^*_Z X.$$

Remarque 3.5–28. — Les deux exemples précédents sont intervenus dans le théorème de semi-continuité de l'irrégularité. Ils définissent deux familles paramétrées par l'axe des x d'équations différentielles d'ordre 1. Le saut de l'irrégularité entre zéro et le point générique vaut 1. Ce saut est égal à la multiplicité de la composante verticale au-dessus de l'origine de la connexion à deux variables dans le premier exemple mais ce saut est strictement plus petit que la multiplicité de la composante verticale au-dessus de l'origine de la connexion à deux variables qui est 2 dans le deuxième exemple. Ceci indiquait qu'on ne pouvait pas montrer le théorème de semi-continuité de l'irrégularité en calculant le saut à l'aide de la multiplicité verticale et ceci a été un point important dans l'étude de l'irrégularité à plusieurs variables. Cet exemple a suggéré que la théorie algébrique des cycles évanescents modérés est insuffisante et qu'il faille une théorie des cycles évanescents plus complète qui rende compte de l'irrégularité. La différence entre le saut de l'irrégularité et la multiplicité de la composante verticale est donnée par le faisceau d'irrégularité du module à deux variables. Ce faisceau à support ponctuel est concentré en un seul degré fournissant un exemple remarquable de la positivité de l'irrégularité à plusieurs variables. Pour plus de précision voir l'article : M. Z. Sur le théorème de semi-continuité de l'irrégularité des équations différentielles, Astérisque 130 (1985) 365-417.

Exercice 3.5–29. — Soit $X := \{x, y \in \mathbb{C}^2\}$. Calculer les faisceaux de cohomologie ordinaire $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ pour

1) $Z = \{x, y, y = 0\}$ et $\mathscr{M} = \mathscr{D}_X \exp(x/y)$,
2) $Z = \{x, y, xy = 0\}$ et $\mathscr{M} = \mathscr{D}_X \exp(x/y)$,
3) $Z = \{x, y, y = 0\}$ et $\mathscr{M} = \mathscr{D}_X \exp((x + y)/y^2)$,
4) $Z = \{x, y, xy = 0\}$ et $\mathscr{M} = \mathscr{D}_X \exp((x + y)/y^2)$,
5) Z la parabole d'équation $y^2 - x$ et $\mathscr{M} = \mathscr{D}_X \exp(1/(y^2 - x))$,
6) Z le cusp d'équation $y^3 - x^2$ et $\mathscr{M} = \mathscr{D}_X \exp(1/(y^3 - x^2))$.

Le lecteur trouvera des renseignements pour résoudre les exercices précédents dans l'article précédent sur la semi-continuité et l'article : M. Z. Sur les cycles évanescents des systèmes différentiels, Travaux en cours 24 Hermann (1987) 35-51.

3.6. Stabilité du Complexe d'Irrégularité par Images Directes Propres

Soit $f : X' \to X$ un morphisme de variétés analytiques complexes. On définit le module de transfert $\mathscr{D}_{X\leftarrow X'}$ par :

$$\mathscr{D}_{X\leftarrow X'} := \omega_{X'} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{O}_{X'} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, \mathscr{D}_X).$$

Cela mérite quelques explications. Le faisceau

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, \mathscr{D}_X) = \mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, \mathscr{O}_X)$$

a une structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche provenant de la structure de module à gauche sur $\mathscr{D}_X$ et une autre structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche provenant de la structure de $\mathscr{D}_X$-module à droite. Ces deux structures commutent. Donc par image inverse le faisceau

$$\mathscr{O}_{X'} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, \mathscr{D}_X)$$

a une structure de $\mathscr{D}_{X'}$-module à gauche et une structure de $f^{-1}\mathscr{D}_X$-module à gauche. Finalement le faisceau

$$\mathscr{D}_{X\leftarrow X'} := \omega_{X'} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{O}_{X'} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\omega_X, \mathscr{D}_X)$$

a une structure de $(f^{-1}\mathscr{D}_X, \mathscr{D}_{X'})$-bimodule.

Exercice 3.6–1. — Expliciter toutes ces structures dans le cas d'une immersion puis dans le cas d'une projection.

Définition 3.6–2. — Soit $\mathscr{M}'$ un complexe de $D^b(\mathscr{D}_{X'})$. On définit son image directe totale par :

$$f^d_*\mathscr{M}' := \mathbf{R}f_*\mathscr{D}_{X\leftarrow X'} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_{X'}} \mathscr{M}'.$$

L'image directe est un complexe de la catégorie $D^b(\mathscr{D}_X)$.

Exercice 3.6–3. — Montrer que pour une projection f et un $\mathscr{D}_{X'}$-module $\mathscr{M}'$ l'image directe $f^d_*\mathscr{M}'$ est isomorphe dans $D^b(\mathscr{D}_X)$ à l'image directe du complexe de de Rham relatif $\mathbf{R}f_*\,\mathrm{DR}_f(\mathscr{M}')[\dim X' - \dim X]$.

Proposition 3.6–4. — *Soient $f : X' \to X$ un morphisme de variétés analytiques complexes, Z un sous espace analytique fermé de X et $\mathscr{M}'$ un complexe de $D^b(\mathscr{D}_{X'})$. Posons $Z' := f^{-1}(Z)$ et $\mathscr{M} := f^d_*\mathscr{M}'$, alors il existe un morphisme canonique dans $D^b(\mathscr{D}_X)$:*

$$\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z) \longrightarrow f^d_*\mathbf{R}\mathscr{M}'(*Z')$$

qui est un isomorphisme si f est propre.

Démonstration. — On a un isomorphisme canonique de $D^b(\mathscr{D}_X)$ [**M-T**] :

$$\mathscr{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathbf{R}\mathscr{O}_X(*Z) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathscr{M}(*Z).$$

En vertu du morphisme de projection on a un isomorphisme canonique de $D^b(\mathscr{D}_X)$ ([**M-N1**], II.5.4) :

$$\mathscr{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathbf{R}\mathscr{O}_X(*Z) \longrightarrow \mathbf{R}f_*(\mathscr{D}_{X\leftarrow X'} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_{X'}} \mathscr{M}') \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}\mathbf{R}\mathscr{O}_X(*Z).$$

Si le complexe de $\mathscr{O}_X$-modules $\mathbf{R}\mathscr{O}_X(*Z)$ était à cohomologie cohérente le morphisme précédent serait un isomorphisme en vertu du lemme du way out ([**M-N1**], II.5) sans hypothèse sur f parce que la question est locale sur la base. Mais la cohomologie du complexe $\mathbf{R}\mathscr{O}_X(*Z)$ est formée de limite inductive de faisceaux cohérents, le morphisme précédent est un isomorphisme si f est propre parce que dans ce cas l'image directe commute à la limite inductive.

Il existe un isomorphisme canonique dans $D^b(\mathscr{D}_{X'})$ [**M-T**] :

$$f^*_d\mathbf{R}\mathscr{O}_X(*Z) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathscr{O}_{X'}(*Z').$$

Soit un isomorphisme canonique dans $D^b(\mathscr{D}_{X'})$:

$$(\mathscr{D}_{X\leftarrow X'} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_{X'}} \mathscr{M}') \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathscr{O}_X} f^{-1}\mathbf{R}\mathscr{O}_X(*Z) \longrightarrow (\mathscr{D}_{X\leftarrow X'} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_{X'}} \mathscr{M}') \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_{X'}} \mathbf{R}\mathscr{O}_{X'}(*Z').$$

Il ne reste plus qu'à voir que le morphisme naturel :

$$\mathscr{D}_{X\leftarrow X'} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_{X'}} (\mathscr{M}' \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_{X'}} \mathbf{R}\mathscr{O}_{X'}(*Z')) \longrightarrow (\mathscr{D}_{X\leftarrow X'} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_{X'}} \mathscr{M}') \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_{X'}} \mathbf{R}\mathscr{O}_{X'}(*Z')$$

est $\mathscr{D}_{X'}$-linéaire et est un isomorphisme en résolvant $\mathscr{M}'$ et $\mathbf{R}\mathscr{O}_{X'}(*Z')$ par des $\mathscr{D}_{X'}$-modules plats comme on a déjà vu au chapitre précédent.

Exercice 3.6–5. — Justifier en détail les arguments de la démonstration précédente.

Théorème 3.6–6. — *Soient $f : X' \to X$ un morphisme de variétés analytiques complexes, Z un sous espace analytique fermé de X et $\mathscr{M}'$ un complexe de $D^b(\mathscr{D}_{X'})$. Posons $Z' := f^{-1}(Z)$ et $\mathscr{M} := f^d_*\mathscr{M}'$, alors il existe un morphisme canonique dans $D^b(\mathbb{C}_X)$:*

$$\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})[\dim X] \longrightarrow \mathbf{R}f_*\,\mathrm{Irr}_{Z'}(\mathscr{M}')[\dim X']$$

qui est un isomorphisme si f est propre.

Démonstration. — Rappelons que le complexe d'irrégularité $\mathrm{Irr}_{Z'}(\mathscr{M}')$ est défini par :

$$\mathrm{Irr}_{Z'}(\mathscr{M}') := \mathbf{DR}\left(\mathbf{R}\Gamma_{Z'}(\mathbf{R}\mathscr{M}'(*Z'))\right).$$

En vertu de la formule de projection ([**M-N1**], II.5.5) on a un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{DR}(f^d_*\mathbf{R}\mathscr{M}'(*Z'))[\dim X] \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}f_*\,\mathbf{DR}(\mathbf{R}\mathscr{M}'(*Z'))[\dim X'].$$

En vertu de la proposition 3.6–4 on a un morphisme canonique :

$$\mathbf{DR}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z))[\dim X] \longrightarrow \mathbf{R}f_*\,\mathbf{DR}(\mathbf{R}\mathscr{M}'(*Z'))[\dim X'],$$

d'où un morphisme canonique

$$\mathbf{R}\Gamma_Z\big(\mathbf{DR}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z))\big)[\dim X] \longrightarrow \mathbf{R}f_*\mathbf{R}\Gamma_{Z'}\big(\mathbf{DR}(\mathbf{R}\mathscr{M}'(*Z'))\big)[\dim X'].$$

Si f est propre en vertu de la proposition 3.6–4 et de la commutation de la cohomologie locale topologique avec l'image directe tous ces morphismes sont des isomorphismes. D'où le théorème 3.6–6

Corollaire 3.6–7. — *Dans la situation précédente la nullité du complexe* $\mathrm{Irr}_{Z'}(\mathscr{M}')$ *entraîne la nullité du complexe* $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$.

La démonstration du corollaire précédent est au langage près la démonstration de Grothendieck [**G2**] du théorème de comparaison locale qui montre que si f est résolution plongée de l'hypersurface Z alors la nullité du complexe $\mathrm{Irr}_{Z'}(\mathscr{O}_{X'})$ entraîne la nullité du complexe $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{O}_X)$.

4. Le Critère Fondamental de la Régularité

4.1. Introduction. — Les mathématiciens du dix-neuvième siècle ont commencé par définir la notion de point singulier régulier d'une équation différentielle en imposant que ses solutions locales multiformes sont à croissance modérée. On voit bien l'inconvénient d'une telle définition puisque qu'on doit faire appel à une matrice fondamentale qui est difficile à calculer pour ne pas dire impossible en générale. Même du point de vue théorique on ne peut pas démontrer grand chose avec cette définition.

Une étape décisive a été franchie par le théorème de Fuchs (1870), qui est le premier théorème général de structure, selon lequel un point singulier d'une équation différentielle est régulier si et seulement si le nombre de Fuchs qui se lit sur l'équation est nul. Certes le cas des systèmes n'est pas réglé, mais on peut algébriquement définir le nombre de Fuchs par exemple à l'aide du lemme du vecteur cyclique dont la nullité caractérise un point singulier régulier. La situation de point vue théorique est devenue très satisfaisante grâce au théorème de Fuchs. De plus sans calculer les solutions multiformes on a une information très précieuse sur leur croissance si on arrive à calculer le nombre de Fuchs.

En dimensions supérieures le problème de définir la notion d'hypersurface singulière régulière pour un système d'opérateurs s'est posé naturellement. On a proposé plusieurs méthodes mais on était obligé de faire appel au théorème de la résolution des singularités pour produire des exemples de système à singularités régulières. De plus on ne disposait pas d'un invariant intéressant qui mesure le défaut de régularité. La situation n'était pas satisfaisante ce qui était sans doute à l'origine de plusieurs malentendus.

La situation a changé avec le théorème de positivité qui définit un faisceau au sens dérivé qui mesure le défaut de la régularité et pour lequel on peut montrer un critère extrêmement utile. Le critère fondamental de régularité permet de construire des exemples de module réguliers indépendamment du théorème de la résolution des singularités. De plus toutes les propriété de la catégorie des modules réguliers sont conséquences faciles du critère de la régularité. Le cycle du faisceau d'irrégularité peut se définir de manière purement algébrique. Ses multiplicités, qui sont des entiers positifs ou nuls, jouent le rôle en dimension supérieure du nombre de Fuchs.

On peut dire que le théorème de positivité a joué en dimensions supérieures le rôle du théorème de Fuchs en dimension 1. Avec le théorème de positivité la théorie géométrique des équations différentielles linéaires à plusieurs variables est passée des ébauches et des tâtonnements antérieurs à une discipline en pleine maturité et en possession de ses outils essentiels.

4.2. La Catégorie des Complexes Holonomes Réguliers $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$. — Soit un triplet $(X, Z, \mathscr{M})$ où X est une variété analytique complexe, $i : Z \to X$ un sous-espace analytique complexe fermé de X et $\mathscr{M}$ un complexe holonome, rappelons que c'est un objet de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_X)$. Nous avons défini les complexes d'irrégularité $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$, $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ de $\mathscr{M}$ le long de Z. Par définition :

$$\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}) := \mathbf{R}\Gamma_Z(\mathbf{DR}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)), \quad \mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M}) := i^{-1}\,\mathbf{S}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)).$$

Ce sont des foncteurs exacts de catégories triangulées :

$$\mathrm{Irr}_Z, \mathrm{Irr}^*_Z : D^b_h(\mathscr{D}_X) \longrightarrow D^b_c(\mathbb{C}_Z).$$

Proposition 4.2–1. — *Pour tous espaces analytiques fermés Z_1, Z_2 de X et tout complexe $\mathscr{M}$ de $D^b(\mathscr{D}_X)$on a le triangle distingué de Mayer-Vietoris :*

$$\mathrm{Irr}^*_{Z_1\cup Z_2}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{Irr}^*_{Z_1}(\mathscr{M}) \oplus \mathrm{Irr}^*_{Z_1}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{Irr}^*_{Z_1\cap Z_2}(\mathscr{M}).$$

Démonstration. — En effet si Z_1, Z_2 sont deux espaces analytiques fermés on la suite de Mayer-Vietoris ([**C**], 3.1.9) qui est un triangle distingué de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_X)$:

$$\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z_1 \cap Z_2) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{M}(*Z_1) \oplus \mathbf{R}\mathscr{M}(*Z_2) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{M}(*Z_1 \cup Z_2).$$

D'où un triangle distingué de la catégorie $D^b_c(\mathbb{C}_X)$:

$$\mathbf{S}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z_1 \cup Z_2)) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z_1)) \oplus \mathbf{S}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z_2)) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z_1 \cap Z_2))$$

qui donne par restriction le triangle distingué :

$$\mathrm{Irr}^*_{Z_1\cup Z_2}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{Irr}^*_{Z_1}(\mathscr{M}) \oplus \mathrm{Irr}^*_{Z_1}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{Irr}^*_{Z_1\cap Z_2}(\mathscr{M}).$$

Proposition 4.2–2. — *Les complexes* $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$*,* $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ *sont nuls pour* tout *espace analytique fermé Z si et seulement les complexes* $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$*,* $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ *sont nuls pour* toute *hypersurface Z.*

Démonstration. — La question est locale, un espace analytique Z est défini localement par un nombre fini d'équations $(f_1, \ldots, f_r)$. Soient Z_1 l'espace défini par f_1 et Z_2 l'espace défini par les équations $(f_2, \ldots, f_r)$. La réunion $Z_1 \cup Z_2$ est défini par $(f_1 f_2, \ldots, f_1 f_r)$. Un récurrence sur le nombre r d'équations montre la proposition 4.2–2.

Définition 4.2–3. — 1) On dit qu'un complexe holonome $\mathscr{M}$ est régulier le long d'un espace analytique Z si ses complexes d'irrégularité le long de Z sont nuls.

2) On dit qu'un complexe holonome $\mathscr{M}$ est régulier si son complexe d'irrégularité le long tout espace analytique Z est nul.

En vertu de la proposition 4.2–2 un complexe holonome est régulier si et seulement si ses complexes d'irrégularité le long des hypersurfaces sont nuls. En particulier un module holonome est régulier si et seulement si ses *faisceaux* d'irrégularité le long des hypersurfaces sont nuls.

Nous notons

$$D^b_{hr}(\mathscr{D}_X, Z)$$

la sous-catégorie de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_X)$ des complexes holonomes réguliers le long de Z et

$$\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X, Z)$$

la sous-catégorie de la catégorie $\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X)$ des modules holonomes réguliers le long de Z. Nous notons de même

$$D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$$

la sous-catégorie de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_X)$ des complexes holonomes réguliers et

$$\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$$

la sous-catégorie de la catégorie $\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X)$ des modules holonomes réguliers .

Il résulte immédiatement des définitions que la catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ est une sous-catégorie pleine et triangulée de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_X)$ et la catégorie $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ est une sous-catégorie pleine et stable par extensions de la catégorie $\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X)$.

Cependant il n'est nullement évident que la catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ est stable par passage aux modules de cohomologie ni que la catégorie $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ est stable par sous-quotients. Le théorème suivant est un autre succès spectaculaire du théorème de positivité 3.5–2. Pour un complexe $\mathscr{M}$ notons $h^i(\mathscr{M})$ sont i-ème faisceau de cohomologie.

Théorème 4.2–4. — *Soit $i : Z \hookrightarrow X$ une hypersurface de X.*

1) *Dans une suite exacte de $\mathscr{D}_X$-modules holonomes*

$$0 \longrightarrow \mathscr{M}_1 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}_2 \longrightarrow 0$$

le faisceau $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ est nul si et seulement si les faisceaux $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M}_1)$ et $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M}_2)$ sont nuls. En particulier les catégories $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X, Z)$ et $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ sont abéliennes.

2) *Pour un complexe holonome $\mathscr{M}$ le complexe $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ est nul si et seulement si les faisceaux $\mathrm{Irr}^*_Z(h^i(\mathscr{M}))$ sont nuls pour tout i.*

Démonstration. — 1) La question est locale. Nous raisonnons par récurrence sur $\dim X$. Si $\dim X = 1$, on peut supposer que Z est un point. Alors si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-modules holonome le faisceau $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ se réduit à l'espace vectoriel passé en degré un $\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z), \mathscr{O}_X)_{,Z}$. Le foncteur $\mathscr{M} \to \mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ entre la catégorie abélienne des modules holonomes et la catégorie abélienne des espaces vectoriels sur Z est *exact*. La partie 1) du théorème 4.2–4 est alors évidente. Si $\mathscr{M}$ est un complexe holonome alors

$$\mathrm{Irr}^*_Z(h^i(\mathscr{M})) \simeq h^{-i}(\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})),$$

la partie 2) du théorème 4.2–4 est aussi évidente.

Supposons qu'on a démontré le théorème pour toutes les variétés de dimension $< \dim X$. Soit alors une suite exacte de $\mathscr{D}_X$-modules holonomes

$$0 \longrightarrow \mathscr{M}_1 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}_2 \longrightarrow 0.$$

La suite de $\mathscr{D}_X$-modules holonomes

$$0 \longrightarrow \mathscr{M}_1(*Z) \longrightarrow \mathscr{M}(*Z) \longrightarrow \mathscr{M}_2(*Z) \longrightarrow 0$$

est aussi exacte. En dehors d'une partie de dimension nulle il passe une hypersurface non singulière et non caractéristique pour $\mathscr{M}(*Z)$ $f : X' \to X$, qui est aussi non caractéristique pour $\mathscr{M}_1(*Z)$ et $\mathscr{M}_2(*Z)$. En vertu du théorème de Cauchy-Kowalewska

3.5–4 le morphisme de triangles est un isomorphisme :

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}_2(*Z)) & \longrightarrow & f^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}(*Z)) & \longrightarrow & f^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}_1(*Z)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{S}(f_d^*\mathscr{M}_2(*Z)) & \longrightarrow & \mathbf{S}(f_d^*\mathscr{M}(*Z)) & \longrightarrow & \mathbf{S}(f_d^*\mathscr{M}_1(*Z)). \end{array}$$

En vertu de l'hypothèse de récurrence les faisceaux $\mathrm{Irr}_Z^*(\mathscr{M}_1)$ et $\mathrm{Irr}_Z^*(\mathscr{M}_2)$ sont à support de dimension nulle. En vertu de la proposition 3.3–8 ils sont réduits aux faisceaux

$$i^{-1}\,\mathscr{E}xt_{\mathscr{D}_X}^{\dim X}(\mathscr{M}_1(*Z),\mathscr{O}_X),\quad i^{-1}\,\mathscr{E}xt_{\mathscr{D}_X}^{\dim X}(\mathscr{M}_1(*Z),\mathscr{O}_X).$$

La suite longue de cohomologie se réduit à la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow i^{-1}\,\mathscr{E}xt_{\mathscr{D}_X}^{\dim X}(\mathscr{M}_2(*Z),\mathscr{O}_X) \longrightarrow i^{-1}\,\mathscr{E}xt_{\mathscr{D}_X}^{\dim X}(\mathscr{M}(*Z),\mathscr{O}_X) \\ \longrightarrow i^{-1}\,\mathscr{E}xt_{\mathscr{D}_X}^{\dim X}(\mathscr{M}_1(*Z),\mathscr{O}_X) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

D'où la partie 1) du théorème 4.2–4.

2) En prenant une hypersurface non caractéristique pour tous les modules de cohomologie d'un complexe holonome $\mathscr{M}$, ce qui est possible en dehors d'une partie de dimension nulle, on trouve que si le complexe $\mathrm{Irr}_Z^*(\mathscr{M})$ est nul les faisceaux $\mathrm{Irr}_Z^*(h^i(\mathscr{M}))$ sont à support de dimension nulle, ils sont donc réduits aux faisceaux $i^{-1}\,\mathscr{E}xt_{\mathscr{D}_X}^{\dim X}(h^i(\mathscr{M}(*Z)),\mathscr{O}_X)$ placés en degré $\dim X$. La suite spectrale :

$$i^{-1}\,\mathscr{E}xt_{\mathscr{D}_X}^{j}(h^i(\mathscr{M}(*Z)),\mathscr{O}_X) \Rightarrow i^{-1}\,\mathscr{E}xt_{\mathscr{D}_X}^{j-i}(\mathscr{M}(*Z),\mathscr{O}_X)$$

montre que

$$i^{-1}\,\mathscr{E}xt_{\mathscr{D}_X}^{\dim X}(h^i(\mathscr{M}(*Z)),\mathscr{O}_X) \simeq i^{-1}\,\mathscr{E}xt_{\mathscr{D}_X}^{\dim X-i}(\mathscr{M}(*Z),\mathscr{O}_X).$$

D'où la partie 2) du théorème 4.2–4.

La catégorie $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ est stable par sous-quotient et la catégorie $D_{hr}^b(\mathscr{D}_X)$ est stable par cohomologie. Ces propriétés sont alors des conséquences directes du Théorème de Positivité. Si on savait que la catégorie $D_h^b(\mathscr{D}_X)$ est stable par image directe par un morphisme propre on en déduirait en vertu de 3.6–6 que la catégorie $D_{hr}^b(\mathscr{D}_X)$ est stable par image directe par un morphisme propre.

Pour aller plus loin dans les propriétés fonctorielles concernant les images inverses de la catégorie $D_{hr}^b(\mathscr{D}_X)$ il faut démontrer le critère fondamental de la régularité.

4.3. Le Critère Fondamental de la Régularité

4.3.1. Le Critère Fondamental de la Régularité, énoncé. — Soit un triplet $(X,Z,\mathscr{M})$ où X est une variété analytique complexe de dimension n, $i : Z \to X$ une hypersurface de X et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome. On dit que $\mathscr{M}$ est lisse sur $j : U := X-Z \hookrightarrow X$ si sa restriction à U est un $\mathscr{O}_U$-module localement libre de rang fini, ce qui est équivalent au fait que sa variété caractéristique se projette sur Z en dehors de la section nulle **[G-M]**.

Théorème 4.3–1. — *Supposons que $\mathscr{M}$ est lisse sur U, alors le faisceau* $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ *est nul si et seulement si la dimension de son support est* strictement bornée par $\dim Z$.

Par définition du faisceau d'irrégularité on peut remplacer dans le théorème 4.3–1 le $\mathscr{D}_X$-module holonome $\mathscr{M}$ par la connexion méromorphe le long de Z $\mathscr{M}(*Z)$ qui est donc génériquement régulière. Autrement dit le critère fondamental de la régularité dit qu'il y a équivalence pour une connexion méromorphe le long de Z entre être régulière le long de Z et être génériquement régulière le long de Z. En particulier la régularité est insensible aux singularités de l'hypersurface Z.

Pour la démonstration nous procédons par récurrence sur la dimension de X. La question est locale. On peut donc supposer que X est une boule voisinage connexe de zéro dans $\mathbb{C}^n$ et que Z est définie par une équation.

Si $\dim X$ est égale à un l'hypothèse entraîne que le faisceau $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ est nul. Donc tous les points de Z sont des points singuliers réguliers de $\mathscr{M}$ et le critère précédent est vide.

4.3.2. Le Critère Fondamental de la Régularité, cas des surfaces. — Si $\dim X = 2$, le support du faisceau $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ est de dimension nulle et en vertu de la proposition 3.3–8, l'obstruction au théorème 4.3–1 est la nullité du faisceau ponctuel $\mathscr{E}xt^2_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z), \mathscr{O}_X)$. Si la courbe Z a des singularités c'est là une question non triviale et très intéressante, aussi nous allons l'étudier explicitement en détail. On peut supposer que X est un petit voisinage connexe de zéro dans le plan $\mathbb{C}^2$ et que la courbe Z a au plus un point singulier en zéro.

Soit $\mathscr{F}_U$ le système local des sections horizontales de $\mathscr{M}$ sur U. Supposons qu'il existe une connexion méromorphe $\widetilde{\mathscr{M}}$ le long de Z telle que son faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\widetilde{\mathscr{M}})$ soit nul et telle que son système local $\widetilde{\mathscr{F}} := \mathrm{DR}(\widetilde{\mathscr{M}_U})$ soit isomorphe à $\mathscr{F}$. En vertu du corollaire 3.5–23 le morphisme de restriction :

$$\mathrm{hom}_{\mathscr{D}_X}(X; \widetilde{\mathscr{M}}, \mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbb{C}_U}(U; \widetilde{\mathscr{F}}, \mathscr{F})$$

est un isomorphisme. En particulier l'isomorphisme des faisceaux des sections horizontales se remonte en un morphisme de connexions méromorphes :

$$\widetilde{\mathscr{M}} \longrightarrow \mathscr{M}$$

qui est un isomorphisme sur U. Son noyau et conoyau sont à support dans Z. Mais une connexion méromorphe n'a pas de sous-module porté par Z et ce morphisme est injectif. Le conoyau est isomorphe à son localisé le long de Z, il est donc nul et le morphisme est un isomorphisme. En particulier le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ qui est isomorphe au faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\widetilde{\mathscr{M}})$ est nul.

Nous sommes réduits à construire une telle connexion $\widetilde{\mathscr{M}}$, c'est-à-dire au problème d'existence de type de Riemann : construire une connexion méromorphe le long de Z

dont le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\widetilde{\mathscr{M}})$ est nul et dont le système local des sections horizontales sur U est isomorphe à un système local donné $\mathscr{F}$.

La catégorie des systèmes locaux sur U est équivalente à la catégorie des représentations complexes $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\Pi_1(U,*))$ du groupe fondamental de U pointé en un point $*$, qui est très compliqué en général, mais est commutatif si Z est un diviseur à croisements normaux.

Aussi nous allons nous ramener à cette situation par une suite d'éclatements. On construit la suite de couples (X_i, Z_i) où X_i est une surface non singulière et Z_i est une courbe tracée sur la surface X_i en posant $(X_0, Z_0) := (X, Z)$ et en obtenant le couple (X_{i+1}, Z_{i+1}) à partir du couple (X_i, Z_i) en éclatant dans X_i les points singuliers de Z_i nécessairement en nombre fini, Z_{i+1} étant l'image inverse de Z_i.

Théorème 4.3–2. — *Alors il existe un entier N tel que la courbe Z_N est un diviseur à croisements normaux.*

Notons $\widetilde{X} := X_N$ et

$$f : \widetilde{X} \longrightarrow X$$

le morphisme composé des éclatements précédents. Le morphisme f est un isomorphisme en dehors du point singulier de Z. Notons $\widetilde{U}$ et $\widetilde{\mathscr{F}_{\widetilde{U}}}$ les images inverses de U et de $\mathscr{F}_U$. Bien sûr $\widetilde{U}$ est homéomorphe à U et son groupe fondamental est aussi compliqué que celui de U, mais si on se localise en point de $\widetilde{Z}$ le groupe fondamental du complémentaire est abélien isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}^2$ selon qu'il passe par ce point une branche ou deux branches de $\widetilde{Z}$.

Exercice 4.3–3. — 1) Démontrer le théorème de résolution plongée de la courbe définie par $x^2 - y^3$ dans $\mathbb{C}^2$.

2) Démontrer le théorème de résolution d'un germe de courbe plane en vous aidant d'un livre.

Le fibré $\mathscr{O}_{\widetilde{U}} \otimes_{\mathbb{C}_{\widetilde{U}}} \widetilde{\mathscr{F}_{\widetilde{U}}}$ est plat c'est-à-dire muni d'une connexion intégrable provenant de la connexion naturelle du fibré trivial $\mathscr{O}_{\widetilde{U}}$. Si l'on fixe une section $\sigma : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ de la projection naturelle nous allons construire un prolongement sur $\widetilde{X}$ en fibré localement libre $\overline{\mathscr{M}}_{\widetilde{X},\sigma}$ qui n'est plus plat mais muni d'une connexion logarithmique qui le rigidifie.

Soit $\widetilde{X}$ une surface analytique complexe et $\widetilde{Z}$ un diviseur à croisements normaux, c'est-à-dire défini localement par $x_1 = 0$ ou $x_1x_2 = 0$ dans un système de coordonnées $x = (x_1, x_2)$. Le faisceau des opérateurs différentiels $\mathscr{D}_{\widetilde{X}}$ contient comme sous-faisceau d'anneaux le faisceau $\mathscr{D}_{\widetilde{X}}(\mathrm{Log}(\widetilde{Z}))$ des opérateurs différentiels logarithmiques, engendré par les champs de vecteurs tangents à $\widetilde{Z}$ aux points non singuliers. Un système de générateurs est donc $x_1\partial_{x_1}, \partial_{x_2}$ ou $x_1\partial_{x_1}, x_2\partial_{x_2}$ selon le cas. On peut considérer la catégorie $\mathrm{Mlog}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}})$ des fibrés logarithmiques, c'est-à-dire la catégorie des $\mathscr{D}_{\widetilde{X}}(\mathrm{Log}(\widetilde{Z}))$-modules à gauche qui sont localement libres de rang fini en tant que $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}$-modules.

Proposition 4.3–4. — *Pour un fibré logarithmique de rang un la matrice au voisinage d'un point de $\widetilde{Z}$ de l'action de $x_i\partial_{x_i}$ dans une base est de la forme $\alpha_i + x_i a_i(x)$ où α_i est un nombre complexe qui ne dépend ni des coordonnées ni de la base choisie et est localement constant le long de chaque branche. C'est le résidu de la connexion le long de la branche $\widetilde{Z}_i$.*

Démonstration. — Dans une base les matrices de la connexion sont de la forme $\alpha_i + a_i(x), i = 1,2$. Mais la condition d'intégrabilité montre que $x_2\partial_{x_2}(a_1(x)) = x_1\partial_{x_1}(a_2(x))$, ce qui montre la première assertion. Pour des matrices de la connexion a, b dans deux bases différentes on a un changement de base inversible h tel que $a_i - b_i = h^{-1}x_i\partial_{x_i}(h) = x_i\partial_{x_i}\log(h)$, ce qui montre que les résidus de la connexion ne dépendent pas de la base choisie. On en déduit que, localement en coordonnées $x = (x_1, x_2)$, un fibré logarithmique de rang un est isomorphe au fibré $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^\alpha$, où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ sont les résidus de la connexion. Si $y = (y_1, y_2)$ est un autre système de coordonnées on a $y_i = x_i c_i(x)$ pour des fonctions inversibles c_i. Les fibrés $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^\alpha$ et $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}y^\beta$ sont isomorphes si et seulement si $\alpha = \beta$.

Définition 4.3–5. — On définit alors la sous-catégorie $\mathrm{Mlog}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}, \sigma)$ comme celles des modules logarithmiques qui admettent localement une filtration dont les quotients successifs sont des modules de rang un et dont les résidus en chaque point appartiennent à l'image de la section σ.

Théorème 4.3–6. — 1) *Pour deux modules logarithmiques $\widetilde{\mathscr{M}_1}$ et $\widetilde{\mathscr{M}_2}$ de la catégorie* $\mathrm{Mlog}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}, \sigma)$ *le morphisme canonique :*

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}(\mathrm{Log}(\widetilde{Z}))}(\widetilde{\mathscr{M}_1}, \widetilde{\mathscr{M}_2}) \longrightarrow \mathbf{R}\widetilde{j}_*\widetilde{j}^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}(\mathrm{Log}(\widetilde{Z}))}(\widetilde{\mathscr{M}_1}, \widetilde{\mathscr{M}_2})$$

est un isomorphisme.

2) *Le foncteur* DR *qui à un module logarithmique de la catégorie* $\mathrm{Mlog}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}, \sigma)$ *associe son système local des sections horizontales sur $\widetilde{U}$ est une équivalence de catégorie.*

Démonstration. — 1) La question est locale. Par dévissage on se ramène au cas où $\widetilde{\mathscr{M}_1}, \widetilde{\mathscr{M}_2}$ sont de rang un. Alors ils sont isomorphes aux modules de type $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^\alpha$ où $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}$ ou $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$. Ce sont des modules cycliques dont les annulateurs sont engendrés par $(x_1\partial_{x_1} - \alpha_1, \partial_{x_2})$ ou $(x_1\partial_{x_1} - \alpha_1, x_2\partial_{x_2} - \alpha_2)$. Dans les deux cas, le crochet des générateurs de l'annulateur est nul et engendre les relations. D'où des résolutions libres de longueur deux explicites. On trouve par un calcul direct les isomorphismes :

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}(\mathrm{Log}(\widetilde{Z}))}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^{\alpha}, \mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^{\beta}) &\simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}(\mathrm{Log}(\widetilde{Z}))}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^{\alpha}, \widetilde{j}_*\widetilde{j}^{-1}\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^{\beta}),\\
\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}(\mathrm{Log}(\widetilde{Z}))}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^{\alpha}, \mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^{\beta}) &\simeq \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}(\mathrm{Log}(\widetilde{Z}))}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^{\alpha}, \widetilde{j}_*\widetilde{j}^{-1}\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^{\beta})\\
\mathscr{E}xt^2_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}(\mathrm{Log}(\widetilde{Z}))}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^{\alpha}, \mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^{\beta}) &\simeq \mathscr{E}xt^2_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}(\mathrm{Log}(\widetilde{Z}))}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^{\alpha}, \widetilde{j}_*\widetilde{j}^{-1}\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^{\beta}).
\end{aligned}$$

2) La première partie de la proposition montre que le foncteur DR est pleinement fidèle. Soit $\widetilde{\mathscr{F}}_{\widetilde{U}}$ un système local sur $\widetilde{U}$ d'espaces vectoriels complexes de dimension finie. Soit des coordonnées locales $x = (x_1, x_2)$ au-dessus d'un ouvert $\widetilde{W}$ isomorphe au produit de 2 disques tel que $\widetilde{Z}$ est défini par $x_1 = 0$ ou $x_1x_2 = 0$. Un point de base $*$ étant choisi $\Pi_1(\widetilde{W} - \widetilde{Z}, *)$ est engendré par un lacet contournant $\widetilde{Z}$ dans le premier cas et par deux lacets issus de $*$ contournant les deux branches de $\widetilde{Z}$ dans le second cas. Le groupe $\Pi_1(\widetilde{W} - \widetilde{Z}, *)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ dans le premier cas et à $\mathbb{Z}^2$ dans le second cas. La donné de la restriction de $\widetilde{\mathscr{F}}$ sur $W - Z$ est équivalente à la donnée d'un automorphisme A de le fibre $\widetilde{\mathscr{F}}_{,*}$ ou à deux automorphismes A_1 et A_2 qui commutent sur cette même fibre. La forme normale de Jordan montre que $A := \exp(2\pi\sqrt{-1}B)$ pour un endomorphisme B de la fibre $\widetilde{\mathscr{F}}_{,*}$ et $A_1 := \exp(2\pi\sqrt{-1}B_1)$ $A_2 := \exp(2\pi\sqrt{-1}B_2)$ pour deux endomorphismes B_1 et B_2 de le fibre $\widetilde{\mathscr{F}}_{,*}$ qui commutent. On peut supposer que les valeurs propres des matrices B, B_1, B_2 sont dans l'image de σ. Soit $\mathscr{O}_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{\mathscr{F}}_{,*}$ le module libre muni de l'action

$$x_1\partial_{x_1}(g \otimes e) := x_1\partial_{x_1}(g) \otimes e - g \otimes B(e), \quad \partial_{x_2}(g \otimes e) := \partial_{x_2}(g) \otimes e$$

dans le premier cas et

$$x_1\partial_{x_1}(g \otimes e) := x_1\partial_{x_1}(g) \otimes e - g \otimes B_1(e), \quad x_2\partial_{x_2}(g \otimes e) := x_2\partial_{x_2}(g) \otimes e - g \otimes B_2(e)$$

dans le second cas. Muni de cette structure le module $\mathscr{O}_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{\mathscr{F}}_{,*}$ est logarithmique et est muni d'une filtration dont les quotients successifs sont de rang un de résidus dans l'image de σ. Une matrice fondamentale est donnée par $x_1^{(B)}$ dans le premier cas et $x_1^{(B_1)}x_2^{(B_2)}$ dans le second cas. Le prolongement analytique le long des générateurs du groupe fondamental multiplie la matrice fondamentale par A et par A_1 et A_2 dans le second cas. Ceci montre que le système local des sections horizontales de $\mathscr{O}_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{\mathscr{F}}_{,*}$ est isomorphe à la restriction de $\widetilde{\mathscr{F}}$ à $\widetilde{W} - \widetilde{Z}$. Localement tout système local est isomorphe au système local d'un module logarithmique de la catégorie $\mathrm{Mlog}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}, \sigma)$. Pour globaliser nous utilisons le résultat général suivant :

Proposition 4.3–7. — *Soient T un espace topologique, F une partie fermée et $\mathscr{F}_{T-F}$ un faisceau à valeurs dans une catégorie d'ensembles sur l'ouvert $T - F$. On suppose que tout point de F admet un voisinage V au-dessus duquel le faisceau $\mathscr{F}_{T-F}$ se prolonge en un faisceau $\mathscr{F}_V$ et que le faisceau des homomorphismes des prolongements locaux est isomorphe à l'image directe de sa restriction en dehors de F. Alors il existe un faisceau $\mathscr{F}_T$ dont la restriction à $T - F$ est égale à $\mathscr{F}_{T-F}$ et dont les restrictions locales aux points de F sont isomorphes aux prolongements locaux.*

Démonstration. — Remarquons qu'on peut recoller le faisceau $\mathscr{F}_{T-F}$ et le faisceau local $\mathscr{F}_V$ en un faisceau sur $(T-F)\cup V$ qui est égal à $\mathscr{F}_{T-F}$ sur $T-F$. Soit l'ensemble des ouverts U de T qui ont la propriété de la proposition précédente. C'est un ensemble ordonné par l'inclusion et inductif. L'axiome de Zorn montre que cet ensemble admet un élément maximal U_∞, alors $T=U_\infty$. En effet supposons que U_∞ soit distinct de T et soit un voisinage V d'un point de F et $\mathscr{F}_V$ le prolongement local. On peut supposer que $V\cap U_\infty$ est non vide. L'isomorphisme sur $V\cap U_\infty - F$ entre $\mathscr{F}_V$ et le prolongement $\mathscr{F}_{U_\infty}$ sur U_∞ se prolonge en un isomorphisme sur $V\cap U_\infty$ et on peut recoller les deux faisceaux en un faisceau sur $V\cup U_\infty$ qui a la propriété de la proposition, ce qui contradictoire avec la maximalité de U_∞.

Le système local $\widetilde{\mathscr{F}_{\widetilde{U}}}$ étant donné sur $\widetilde{U}$, la proposition fournit un fibré de la catégorie $\mathrm{Mlog}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}},\sigma)$ dont le système local des sections horizontales est égal à $\widetilde{\mathscr{F}_{\widetilde{U}}}$. Le foncteur DR est essentiellement surjectif. D'où le théorème.

Exercice 4.3–8. — Étendre le théorème 4.3–6 au cas d'une variété analytique complexe de dimension n munie d'un diviseur à croisement normaux en faisant tous les calculs de nature cohomologique

Démonstration du théorème 4.3–1 dans le cas des surfaces. — Soit $(X,Z,\mathscr{M})$ un triplet où X est un voisinage de zéro dans $\mathbb{C}^2$, Z un germe de courbe plane ayant zéro comme seule singularité et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome lisse sur $U:=X-Z$ et le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est à support de dimension nulle.

Soit $f:(\widetilde{X},\widetilde{Z})\to(X,Z)$ une résolution plongée du couple (X,Z) et $\mathscr{F}_{\widetilde{U}}$ l'image inverse du système local des sections horizontales de $\mathscr{M}$ sur U. Si on fixe une section $\sigma:\mathbb{C}/\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ de la projection naturelle, le théorème 4.3–6 montre qu'il existe un module logarithmique $\widetilde{\mathscr{M}}_{\widetilde{X},\sigma}$ sur $\widetilde{X}$ le long de $\widetilde{Z}$ dont les résidus sont contenus dans l'image de σ et qui est une extension du fibré $\mathscr{O}_{\widetilde{U}}\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{F}_{\widetilde{U}}$. Considérons le localisé $\widetilde{\mathscr{M}}_{\widetilde{X},\sigma}(*\widetilde{Z})$ de l'extension qui est alors un $\mathscr{D}_{\widetilde{X}}$-module dont la filtration naturelle par $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\widetilde{X}}}(\mathscr{I}^k_{\widetilde{Z}},\widetilde{\mathscr{M}}_{\widetilde{X},\sigma})$ est bonne. C'est donc en particulier un $\mathscr{D}_{\widetilde{X}}$-module cohérent. D'autre part en se ramenant par quotients successifs au cas de rang un on voit que sa variété caractéristique est contenue dans la réunion des conormaux aux strates de la stratification naturelle de $\widetilde{Z}$. C'est donc un $\mathscr{D}_{\widetilde{X}}$-module holonome. En remplaçant dans le calcul de comparaison précédent le faisceau $j_*j^{-1}\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^\beta$ par le faisceau $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(*\widetilde{Z})x^\beta$ on trouve les isomorphismes :

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}(\mathrm{Log}(\widetilde{Z}))}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^\alpha,\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^\beta)&\simeq\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^\alpha,\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(*\widetilde{Z})x^\beta),\\
\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}(\mathrm{Log}(\widetilde{Z}))}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^\alpha,\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^\beta)&\simeq\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^\alpha,\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(*\widetilde{Z})x^\beta)\\
\mathscr{E}xt^2_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}(\mathrm{Log}(\widetilde{Z}))}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^\alpha,\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^\beta)&\simeq\mathscr{E}xt^2_{\mathscr{D}_{\widetilde{X}}}(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}x^\alpha,\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(*\widetilde{Z})x^\beta).
\end{aligned}$$

Par quotients successifs ceci implique que le faisceau $\mathrm{Irr}_{\widetilde{Z}}(\widetilde{\mathscr{M}}_{\widetilde{X},\sigma})$ est nul. Prenons son image directe $f_*^d\widetilde{\mathscr{M}}_{\widetilde{X},\sigma}(*\widetilde{Z})$. On trouve, par la stabilité par image directe propre des modules holonomes munis de filtration globale, un complexe holonome qui est isomorphe à son localisé en vertu de la commutation de la localisation par un morphisme propre 3.6–4. C'est donc un $\mathscr{D}_X$-module holonome dont le faisceau d'irrégularité $\mathrm{Irr}_Z(f_*^d\widetilde{\mathscr{M}}_{\widetilde{X},\sigma}(*\widetilde{Z}))$ est nul par la conservation de la régularité par image directe propre 3.6–6. Le module $f_*^d\widetilde{\mathscr{M}}_{\widetilde{X},\sigma}(*\widetilde{Z})$ qui a même système local des sections horizontales que $\mathscr{M}$ est isomorphe à ce dernier en vertu de 3.5–23, en particulier le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est nul. D'où le critère fondamental de la régularité dans le cas des surfaces.

Exercice 4.3–9. — Expliciter tous les calculs de la démonstration précédente.

4.3.3. Le Critère Fondamental de la Régularité, cas général. — À partir du cas des surfaces nous allons voir que les singularités ne jouent plus aucun rôle. Soit $(X, Z, \mathscr{M})$ un triplet où X est une variété analytique complexe, Z est une hypersurface et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome lisse sur $U := X - Z$ dont le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est à support de dimension strictement plus petit que $\dim Z$. Il nous faut montrer que le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est nul. Nous allons raisonner par récurrence sur $\dim X$. C'est bien le cas comme nous venons de le voir si $\dim X = 2$.

Nous supposons que $dim X \geqslant 3$. En dehors d'une partie de dimension nulle de Z il passe une hypersurface $f : X' \to X$ non caractéristique pour $\mathscr{M}(*Z)$ et transverse à une stratification de Whitney adaptée au faisceau $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$. Posons $Z' := f^{-1}(Z)$ et $\mathscr{M}' := f_d^*\mathscr{M}(*Z)$, la stabilité de l'holonomie par image inverse montre que $\mathscr{M}'$ est $\mathscr{D}_{X'}$-module holonome qui est isomorphe à son localisé le long de Z' $\mathscr{M}' \simeq \mathscr{M}'(*Z')$ en vertu de la proposition 3.5–5. Le $\mathscr{D}_{X'}$-module holonome $\mathscr{M}'(*Z')$ est lisse sur $U' := X' - Z'$ et la dimension du support du faisceau $\mathrm{Irr}^*_{Z'}(\mathscr{M}')$ est strictement plus petite que $\dim Z'$. L'hypothèse de récurrence implique que le faisceau $\mathrm{Irr}^*_{Z'}(\mathscr{M}')$ est nul. Mais en vertu du théorème de Cauchy-Kowalewska le morphisme

$$f^{-1}\,\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{Irr}^*_{Z'}(\mathscr{M}')$$

est un isomorphisme. Le faisceau $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ est nul en dehors d'une partie de dimension nulle. Le théorème de positivité 3.5–2 et la proposition 3.3–8 montrent que le faisceau $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ est isomorphe au faisceau $\mathscr{E}xt^{\dim X}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z), \mathscr{O}_X)$ placé en degré $\dim X$.

L'obstruction à ce stade au théorème de 4.3–1 est la nullité du faisceau ponctuel

$$\mathscr{E}xt^{\dim X}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z), \mathscr{O}_X).$$

La question est locale et on peut supposer que le faisceau $\mathscr{E}xt^{\dim X}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z), \mathscr{O}_X)$ est porté par un point x_0. Quitte à remplacer X par un voisinage convenable de 0, on peut trouver, par le lemme de préparation de Weierstrass, une projection $f : X \to X'$ qui est finie sur Z.

Théorème 4.3–10. — *Sous les conditions précédentes il existe un prolongement $\widetilde{\mathscr{M}}$ de $\mathscr{M}$ sur le produit de $X'\times\mathbf{P}$ en un $\mathscr{D}_{X'\times\mathbf{P}}$-module holonome lisse sur le complémentaire de la réunion de Z et du diviseur à l'infini muni d'une filtration globale localement bonne et dont le faisceau d'irrégularité le long du diviseur à l'infini est nul.*

Démonstration. — Le théorème précédent est déjà montré dans ([**M-N1**], III.2.5). Nous reprenons la démonstration pour la commodité du lecteur. On peut supposer que X est le produit de X' par un petit disque complexe D voisinage de l'origine dans le plan complexe tel que f est la première projection. Quitte à rétrécir X on peut supposer que $\mathscr{M}(*Z)$ est muni d'une bonne filtration $\mathscr{M}_k$ qui est constante en dehors de Z et égale à la restriction $\mathscr{M}_U$ ([**M-N1**], III.2.2). Considérons l'inclusion de D dans le plan complexe $\mathbb{C}$ qui induit l'inclusion de $X'\times D\subset X'\times\mathbb{C}$ et l'inclusion des complémentaires de Z : $X'\times D-Z\subset X'\times\mathbb{C}-Z$ qui est une équivalence d'homotopie. La restriction de $\mathscr{M}(*Z)$ à $X-Z$ se prolonge en un fibré vectoriel à connexion intégrable $\widetilde{\mathscr{M}}_{X'\times\mathbb{C}-Z}$ sur $X'\times\mathbb{C}-Z$. Considérons la compactification canonique de la droite affine $\mathbb{C}$ en la droite projective $\mathbf{P}$ et l'inclusion $X'\times\mathbb{C}-Z\subset X'\times\mathbf{P}-Z$ dont le complémentaire est le diviseur à l'infini Z_∞ qui est une hypersurface non singulière. Si on fixe une section $\sigma:\mathbb{C}/\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ de la projection la méthode de la démonstration du théorème 4.3–6 dans le situation d'une seule branche nous fournit une extension canonique $\widetilde{\mathscr{M}}_{X'\times\mathbf{P}-Z,\sigma}$ qui est un fibré logarithmique dont les résidus appartiennent à l'image de σ. Finalement à partir de $\mathscr{M}(*Z)$ donnée sur $X'\times D$ et de sa bonne filtration locale $\mathscr{M}_k$ on arrive à un prolongement en un $\mathscr{D}_{X'\times\mathbf{P}}$-module holonome $\widetilde{\mathscr{M}}_{X'\times\mathbf{P},\sigma}(*Z_\infty)$ sur $X'\times\mathbf{P}$ ainsi que sa filtration qui est localement bonne partout. Le faisceau d'irrégularité $\mathrm{Irr}_{Z_\infty}(\widetilde{\mathscr{M}}_{X'\times\mathbf{P},\sigma}(*Z_\infty))$ est nul. D'où le théorème.

Démonstration du théorème 4.3–1. — Par le théorème d'image directe par un morphisme propre [**Ma**] le complexe

$$\mathbf{R}\widetilde{f}_*\,\mathbf{DR}(\widetilde{\mathscr{M}}_{X'\times\mathbf{P},\sigma}(*Z_\infty))$$

est un complexe holonome sur X' où $\widetilde{f}$ est la projection de $X'\times\mathbf{P}$ sur X'. Posons

$$\mathscr{M}':=\mathbf{R}\widetilde{f}_*\,\mathbf{DR}(\widetilde{\mathscr{M}}_{X'\times\mathbf{P},\sigma}(*Z_\infty)).$$

Pour toute hypersurface Z' de X', en vertu du théorème 3.6–6, on a l'isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Irr}_{Z'}(\mathscr{M}')[\dim X']\simeq\mathbf{R}\widetilde{f}_*\,\mathrm{Irr}_{\widetilde{f}^{-1}Z'}(\mathbf{R}\widetilde{f}_*\,\mathbf{DR}(\widetilde{\mathscr{M}}_{X'\times\mathbf{P},\sigma}(*Z_\infty))[\dim X].$$

Soit x'_0 l'image de x_0 par la projection f. Il passe une hypersurface Z' par x'_0 telle que les faisceaux de cohomologie du complexe $\mathscr{M}'$ soient lisses, il suffit de prendre une hypersurface qui contient les lieux singuliers projections en dehors de la section nulle des variétés caractéristiques.

Le faisceau

$$\mathrm{Irr}_{\widetilde{f}^{-1}Z'}(\mathbf{R}\widetilde{f}_*\,\mathbf{DR}(\widetilde{\mathscr{M}}_{X'\times\mathbf{P},\sigma}(*Z_\infty))$$

est la restriction à $\widetilde{f}^{-1}Z'$ du faisceau

$$\mathrm{Irr}_{\widetilde{f}^{-1}Z'\cup Z\cup Z_\infty}(\mathbf{R}\widetilde{f}_*\,\mathbf{DR}(\widetilde{\mathscr{M}}_{X'\times\mathbf{P},\sigma}(*Z_\infty))$$

dont le support est de dimension strictement inférieure à $\dim Z$ puisque, d'une part, il est nul le long du diviseur à l'infini et, d'autre part, il est nul au point générique de $\widetilde{f}^{-1}Z'$ parce qu'il n'y a pas de singularités du tout. L'hypothèse de récurrence montre que la dimension du support de ce faisceau est nulle. Donc la dimension du support du complexe $\mathrm{Irr}_{Z'}(\mathscr{M}')$ est nulle. Mais la régularité passe à la cohomologie en vertu de 4.2–4. Donc les dimensions des supports des faisceaux d'irrégularité le long de Z' des faisceaux de cohomologie de $\mathscr{M}'$ sont de dimension nulle. La dimension de X' est supérieure ou égale à 2, les dimensions des supports des faisceaux d'irrégularité le long de Z' des faisceaux de cohomologie de $\mathscr{M}'$ sont strictement plus petites que $\dim Z'$, en vertu de l'hypothèse de récurrence ces faisceaux sont nuls.

Le faisceau

$$\mathrm{Irr}_{\widetilde{f}^{-1}Z'\cup Z\cup Z_\infty}(\mathbf{R}\widetilde{f}_*\,\mathbf{DR}(\widetilde{\mathscr{M}}_{X'\times\mathbf{P},\sigma}(*Z_\infty))$$

est nul, en particulier l'espace vectoriel

$$\mathscr{E}xt^{\dim X}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z\cup f^{-1}Z'),\mathscr{O}_X)_{x_0}$$

est nul.

Mais le module $\mathscr{M}(*Z)$ n'a pas de sections à support contenu dans $f^{-1}Z'$, on a l'injection $\mathscr{M}(*Z)\hookrightarrow\mathscr{M}(*Z\cup f^{-1}Z')$ qui implique la surjection

$$\mathscr{E}xt^{\dim X}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z\cup f^{-1}Z'),\mathscr{O}_X)_{x_0}\longrightarrow\mathscr{E}xt^{\dim X}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z),\mathscr{O}_X)_{x_0}\longrightarrow 0$$

puisque la dimension homologique de la fibre $\mathscr{D}_{X_{x_0}}$ est égale à $\dim X$. D'où le théorème 4.3–1.

Corollaire 4.3–11. — 1) *Pour toute hypersurface Z de X le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{O}_X)$ du fibré trivial muni de la connexion naturelle est nul.*

2) *Pour tout espace analytique fermé Z de X le complexe $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{O}_X)$ du fibré trivial muni de la connexion naturelle est nul.*

3) *Pour tout espace analytique fermé Y de X on a le lemme de Poincaré local singulier qui est un isomorphisme canonique*

$$\mathbb{C}_Y\simeq\mathbf{S}(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Y(\mathscr{O}_X)).$$

4) *Pour tout couple d'espaces analytiques fermés (Y,Z) de X le complexe d'irrégularité $\mathrm{Irr}_Z(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Y(\mathscr{O}_X))$ de la cohomologie locale algébrique de Y à valeur dans du fibré trivial muni de la connexion naturelle est nul.*

5) *Pour tout sous-espace analytique on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathbb{C}_Y\simeq\mathbf{DR}(\mathscr{O}_{\widehat{X|Y}})$$

où le faisceau $\mathscr{O}_{\widehat{X|Y}}$, rappelons-le, est le complété formel du faisceau structural $\mathscr{O}_X$ le long de Y et est naturellement un $\mathscr{D}_X$-module à gauche.

Démonstration. — 1) Il suffit de montrer que le support du faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{O}_X)$ est contenu dans le lieu singulier $\mathrm{sing}(Z)$ pour qu'il soit nul en vertu du théorème 4.3–1. Mais si $x := (x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées locales au voisinage d'un point lisse de Z tel que $x_1 = 0$ est une équation de Z, il faut monter qu'au voisinage de ce point les morphismes de comparaison

$$\mathscr{E}xt^k_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X(*Z)) \longrightarrow \mathscr{E}xt^k_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X, j_*j^{-1}\mathscr{O}_X)$$

sont des isomorphismes pour $k = 0, \ldots, \dim X$. En fait un calcul direct montre que tous ces faisceaux de cohomologie sont nuls à l'exception des faisceaux en degré un qui sont engendrés par la classe $[1/x_1]$.

2) La suite de Mayer-Vietoris 4.2–2 ramène la nullité du complexe $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{O}_X)$ pour un espace analytique fermé au cas d'une hypersurface.

3) Considérons le morphisme canonique de triangles de $D^b(\mathscr{D}_X)$ où j désigne l'inclusion du complémentaire de Y dans X :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Y(\mathscr{O}_X) & \longrightarrow & \mathscr{O}_X & \longrightarrow & \mathbf{R}\mathscr{O}_X(*Y) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathscr{O}_X) & \longrightarrow & \mathscr{O}_X & \longrightarrow & \mathbf{R}j_*j^{-1}\mathscr{O}_X
\end{array}$$

qui donnent naissance au morphismes de triangles de $D^b(\mathbb{C}_X)$:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{DR}(\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Y,}(\mathscr{O}_X)) & \longrightarrow & \mathbf{DR}(\mathscr{O}_X) & \longrightarrow & \mathbf{DR}(\mathbf{R}\mathscr{O}_X(*Y)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{DR}\,\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathscr{O}_X)) & \longrightarrow & \mathbf{DR}(\mathscr{O}_X) & \longrightarrow & \mathbf{DR}(\mathbf{R}j_*j^{-1}\mathscr{O}_X) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathbb{C}_X) & \longrightarrow & \mathbb{C}_X & \longrightarrow & \mathbf{R}j_*j^{-1}\mathbb{C}_X.
\end{array}$$

En vertu du lemme de Poincaré local le dernier morphisme de triangle est un isomorphisme. Par dualité on obtient un morphisme canonique de triangle :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & j_!j^{-1}\mathbb{C}_X & \longrightarrow & \mathbb{C}_X & \longrightarrow & \mathbb{C}_Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathbf{S}(\mathbf{R}\mathscr{O}_X(*Y)) & \longrightarrow & \mathbf{S}(\mathscr{O}_X) & \longrightarrow & \mathbf{S}(\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Y(\mathscr{O}_X)) & &
\end{array}$$

qui en vertu du lemme de Poincaré local et la nullité du complexe $\mathrm{Irr}^*_Y(\mathscr{O}_X)$ entraîne l'isomorphisme canonique du lemme de Poincaré local singulier.

4) Remarquons que le morphisme canonique

$$\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Y(\mathscr{O}_X)) \longrightarrow \mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Z\cap Y}(\mathscr{O}_X)$$

est un isomorphisme. Le triangle :

$$\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{Z\cap Y}(\mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Y(\mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Y(\mathscr{O}_X)(*Z)$$

montre que la nullité des complexes $\mathrm{Irr}_{Z\cap Y}(\mathscr{O}_X)$ et $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{O}_X)$ entraîne la nullité du complexe

$$\mathrm{Irr}_Z(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Y(\mathscr{O}_X))\,.$$

5) Cet isomorphisme résulte du lemme de Poincaré singulier et de l'isomorphisme du corollaire 3.4–4.

Exercice 4.3–12. — Refaites en détail tous les calculs et les raisonnements précédents.

Remarque 4.3–13. — Si Y n'est pas localement une intersection complète le complexe

$$\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Y(\mathscr{O}_X)$$

n'est pas concentré cohomologiquement en un seul degré. Cette exemple montrait déjà clairement en 1975 la nécessité du passage à la catégorie dérivée dans l'équivalence de catégories entre les complexes holonomes réguliers et les complexes constructibles du chapitre 10.

Corollaire 4.3–14. — *Toute connexion méromorphe $\mathscr{M}(*Z)$ le long d'une hypersurface Z génériquement régulière est régulière.*

Démonstration. — En effet la dimension du support du faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est strictement plus petite que $\dim Z$ par hypothèse puisque la connexion est génériquement régulière. En vertu du théorème 4.3–1 le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est nul.

Soit T une autre hypersurface, le faisceau $\mathrm{Irr}^*_T(\mathscr{M}(*Z))$ est la restriction à T du faisceau $\mathrm{Irr}^*_{T\cup Z}(\mathscr{M}(*T\cup Z))$. La dimension du support du faisceau $\mathrm{Irr}^*_{T\cup Z}(\mathscr{M}(*T\cup Z))$ est strictement plus petite que $\dim T\cup Z$ puisqu'en un point générique de Z ce faisceau est nul et en un point générique de T qui n'est pas générique sur Z la connexion $\mathscr{M}(*Z)$ n'a pas de singularité. En vertu du théorème 4.3–1 le faisceau $\mathrm{Irr}^*_{T\cup Z}(\mathscr{M}(*T\cup Z))$ est nul donc le faisceau $\mathrm{Irr}^*_T(\mathscr{M}(*Z))$ est nul. D'où le corollaire 4.3–14.

Ce corollaire justifie la notation $\mathrm{Mhr}(\mathscr{O}_X(*Z))$ que l'on a utilisée pour la catégorie des connexions méromorphes génériquement régulières.

Remarque 4.3–15. — Remarquons que pour tester la régularité aux points génériques il suffit de vérifier que la restriction à toute courbe transverse en point lisse assez général est une connexion à une variable régulière. En effet une telle courbe est *non caractéristique* pour la connexion $\mathscr{M}(*Z)$ et la restriction à la courbe du faisceau $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ est isomorphe au faisceau d'irrégularité de la restriction. Mais prendre garde cependant qu'il se peut que la restriction à une courbe d'une connexion soit régulière sans que la connexion le soit.

Pour aller un peu plus loin il nous faut généraliser légèrement le théorème 4.3–1.

Théorème 4.3–16. — *Soit un quadruplet $(X, Y, Z, \mathscr{M})$ où X est une variété analytique complexe, Y un sous-espace analytique complexe fermé, Z une hypersurface dont la trace sur Y est de codimension 1 et contient le lieu singulier de Y et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome à support dans Y et lisse sur $Y - Z$ supposé équidimensionnel. Alors le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est nul si et seulement si la dimension de son support est strictement plus petite que* $\dim Y \cap Z$.

Démonstration. — L'hypothèse lisse sur $Y - Z$ veut dire que la variété caractéristique de $\mathscr{M}$ se réduit au normal $T^*_{Y-Z}X$ au-dessus de $Y - Z$. Donc si $\dim X$ est égale à $\dim Y$ le théorème 4.3–16 se réduit au théorème 4.3–1. On peut supposer que $\dim Y \geqslant 2$ et $\dim X \geqslant 3$. Nous raisonnons par récurrence sur la dimension de X que l'on peut supposer strictement plus grande que deux. Par le raisonnement que l'on a fait maintenant plusieurs fois en prenant une trace qui est une hypersurface non singulière de X qui évite les composantes verticales de $\mathscr{M}(*Z)$ et les strates de dimension nulles d'une stratification de Whitney adaptée au complexe constructible $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$, l'hypothèse de récurrence sur $\dim X$ montre que la dimension du support du faisceau $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est nulle. Donc l'obstruction au théorème 4.3–16 est le faisceau

$$\mathscr{E}xt^{\dim X}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z), \mathscr{O}_X).$$

Soit x_0 un point de son support, alors il existe en vertu du lemme de normalisation analytique au voisinage de x_0 une projection assez générale $f : X \to X'$ sur une variété non singulière qui est fini sur Y. Prenons l'image $\mathscr{M}' := f^d_* \mathscr{M}(*Z)$ qui est un $\mathscr{D}_{X'}$-module holonome qui est lisse en dehors d'une hypersurface Z' passant par l'image de x_0. Le faisceau $\mathrm{Irr}_{f^{-1}Z'}(\mathscr{M}(*Z))$ est à support de dimension nulle en vertu de l'hypothèse de récurrence sur $\dim X$. Il en résulte que la dimension du support du faisceau $\mathrm{Irr}_{Z'}(\mathscr{M}')$ est nulle. Comme $\dim X' \geqslant 2$ on est dans les hypothèses du théorème 4.3–1 pour le triplet $(X', Z', \mathscr{M}')$. Le faisceau $\mathrm{Irr}_{Z'}(\mathscr{M}')$ est nul. Donc le faisceau

$$\mathscr{E}xt^{\dim X}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z \cup f^{-1}Z'), \mathscr{O}_X)$$

est nul.

Mais le module $\mathscr{M}(*Z)$ n'a pas de sections à support contenu dans $f^{-1}Z'$, on a l'injection $\mathscr{M}(*Z) \hookrightarrow \mathscr{M}(*Z \cup f^{-1}Z')$ qui implique la surjection

$$\mathscr{E}xt^{\dim X}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z \cup f^{-1}Z'), \mathscr{O}_X)_{,x_0} \longrightarrow \mathscr{E}xt^{\dim X}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}(*Z), \mathscr{O}_X)_{,x_0} \longrightarrow 0$$

puisque la dimension homologique de la fibre $\mathscr{D}_{X_{x_0}}$ est égale à $\dim X$. D'où le théorème 4.3–16.

Corollaire 4.3–17. — *Soit un quadruplet $(X, Y, Z, \mathscr{M})$ comme dans le théorème 4.3–16, alors le module $\mathscr{M}(*Z)$ est régulier.*

Démonstration. — En effet pour toute hypersurface T le faisceau $\mathrm{Irr}^*_T(\mathscr{M}(*Z))$ est la restriction à T du faisceau $\mathrm{Irr}^*_{T\cup Z}(\mathscr{M}(*Z\cup T))$ qui est génériquement nul long de $Z\cap Y$ par hypothèse et génériquement nul le long des points génériques de T qui ne sont pas des points génériques de $Z\cap Y$ parce que $\mathscr{M}$ n'a pas de singularités. On est dans les conditions d'application du théorème 4.3–16 pour le quadruplet $(X,Y,Z\cup T,\mathscr{M}(*Z\cup T))$. Le faisceau $\mathrm{Irr}^*_{T\cup Z}(\mathscr{M}(*Z\cup T))$ est nul donc le faisceau $\mathrm{Irr}_T(\mathscr{M}(*Z))$ est aussi nul et le module $\mathscr{M}(*Z)$ est régulier puisque régulier le long de toutes hypersurfaces.

Remarque 4.3–18. — Si Y est normal ce qui implique que Y est lisse en codimension 1, pour tester la régularité générique il suffit de tester la régularité le long de toute courbe aux points génériques de $Z\cap Y$ et transverse à $Z\cap Y$. En effet une telle courbe est non caractéristique pour le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}(*Z)$ et la restriction à la courbe du faisceau $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathscr{M})$ est isomorphe au faisceau d'irrégularité de la restriction.

5. Le Théorème global de Comparaison pour la Cohomologie de de Rham

Nous allons utiliser dans ce chapitre le critère fondamental de la régularité pour montrer le théorème de comparaison global de Grothendieck-Deligne.

5.1. Le théorème global de comparaison pour la cohomologie de de Rham : cas des coefficients constants. — Soient maintenant $(X,\mathscr{O}_X)$ une variété algébrique complexe non singulière et $(X^{\mathrm{an}},\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}})$ la variété analytique associée [**S**]. Plus généralement, pour tout objet algébrique on note par la même lettre l'objet analytique associé affecté de « an » en exposant. Notons $\epsilon : X^{\mathrm{an}}\to X$ le morphisme naturel d'espaces annelés. Pour tout complexe de faisceaux abéliens $\mathscr{F}$ sur X, on a un morphisme de complexes de groupes abéliens $\Gamma(X;\mathscr{F})\to\Gamma(X^{\mathrm{an}};\epsilon^{-1}\mathscr{F})$ et donc en prenant une résolution acyclique pour la cohomologie de $\epsilon^{-1}\mathscr{F}$ on trouve des morphismes pour les modules d'hypercohomologie

$$H^k(X;\mathscr{F})\longrightarrow H^k(X(\mathbb{C});\epsilon^{-1}\mathscr{F}).$$

Considérons le cas du complexe de de Rham $\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}$ et du morphisme canonique

$$\epsilon^{-1}\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}\longrightarrow\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}\otimes_{\epsilon^{-1}\mathscr{O}_X}\epsilon^{-1}\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}.$$

On trouve alors des morphismes canoniques de comparaison :

$$(*)\qquad H^k(X;\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}})\longrightarrow H^k(X^{\mathrm{an}};\Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}).$$

Théorème 5.1–1. — *Pour toute variété algébrique non singulière X les morphismes de comparaison $(*)$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. — Considérons un recouvrement $\mathscr{U} := \bigcup U_i$ de X par des ouverts affines. En vertu du théorème B de Serre le recouvrement $\mathscr{U}$ est acyclique pour les faisceaux $\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}$ et en vertu du théorème de Leray le morphisme entre l'hypercohomologie de Čech et l'hypercohomologie

$$H^k(\mathscr{U}, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}) \longrightarrow H^k(X, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}})$$

est un isomorphisme. Le recouvrement $\mathscr{U}^{\mathrm{an}} := \bigcup U_i^{\mathrm{an}}$ de $X(\mathbb{C})$ est de Stein. En vertu du théorème B de Cartan le recouvrement $\mathscr{U}^{\mathrm{an}}$ est acyclique pour les faisceaux $\Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}$ et en vertu du théorème de Leray le morphisme entre l'hypercohomologie de Čech et l'hypercohomologie

$$H^k(\mathscr{U}^{\mathrm{an}}, \Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}) \longrightarrow H^k(X^{\mathrm{an}}, \Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}/\mathbb{C}})$$

est un isomorphisme. On est réduit à montrer que le morphisme de cohomologie de Čech $H^k(\mathscr{U}, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}) \to H^k(\mathscr{U}^{\mathrm{an}}, \Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}/\mathbb{C}})$ est un isomorphisme.

Soit $U \to \mathscr{H}^q(\mathscr{F})(U) := H^q(U; \mathscr{F})$ le préfaisceau qui à un ouvert associé l'hypercohomologie de cet ouvert à valeurs dans le complexe $\mathscr{F}$.

Lemme 5.1–2. — *Il existe une suite spectrale de terme $E_2^{p,q} := H^p(\mathscr{U}; \mathscr{H}^q(\mathscr{F}))$ et qui aboutit à $H^\bullet(\mathscr{U}; \mathscr{F})$.*

Démonstration. — En effet cela résulte de la méthode bien connue du bi-complexe.

Exercice 5.1–3. — Faites en détail la démonstration.

En appliquant le lemme on trouve un morphisme de suites spectrales :

$$\begin{array}{ccc} H^p(\mathscr{U}; \mathscr{H}^q(\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}})) & \Longrightarrow & H^p(\mathscr{U}; \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(\mathscr{U}^{\mathrm{an}}; \mathscr{H}^q(\Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}/\mathbb{C}})) & \Longrightarrow & H^p(\mathscr{U}^{\mathrm{an}}; \Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}) \end{array}$$

qui réduit le théorème de comparaison au cas affine et connexe.

Supposant que X est une variété affine non singulière, connexe et soit $j : X \hookrightarrow \mathbb{C}^N \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ un plongement dans un espace affine puis dans un espace projectif, on note Z_∞ le diviseur à l'infini. L'image directe

$$j_*^d \mathscr{O}_X \xrightarrow{\sim} \operatorname{alg} H_X^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^N})$$

au sens des $\mathscr{D}_X$-modules du fibré trivial est la cohomologie locale à support dans X à valeurs dans le fibré trivial $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^N}$. En vertu de la commutation de l'image directe avec la cohomologie de de Rham aussi bien dans le cas algébrique qu'analytique, on est réduit à montrer que le morphisme :

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C}^N; \mathbf{DR}(\operatorname{alg} H_X^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^N}))) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C}^{\mathrm{an}N}; \mathbf{DR}(\operatorname{alg} H_{X^{\mathrm{an}N}}^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^{\mathrm{an}N}})))$$

est un isomorphisme. Notons $\widetilde{j} : \mathbb{C}^N \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ l'inclusion canonique. Alors on est réduit à montrer que le morphisme :

$$(*)\quad \mathbf{R}\Gamma(\mathbf{P}^N; \mathbf{R}\widetilde{j}_* \,\mathbf{DR}(\mathrm{alg}\, H_X^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^N}))) \\ \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(\mathbf{P}^{\mathrm{an}N}; \mathbf{R}\widetilde{j}^{\mathrm{an}}_* \,\mathbf{DR}(\mathrm{alg}\, H_{X^{\mathrm{an}N}}^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^{\mathrm{an}N}})))$$

est un isomorphisme.

Lemme 5.1–4. — *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathbf{P}^N; \mathbf{R}\widetilde{j}_* \,\mathbf{DR}(\mathrm{alg}\, H_X^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^N}))) \\ \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(\mathbf{P}^{\mathrm{an}N}; \mathbf{DR}(\mathrm{alg}\, H_{\overline{X}^{\mathrm{an}}}^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^{\mathrm{an}N}}(*Z_\infty))).$$

Démonstration. — L'inclusion $\mathbb{C}^N \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ est affine et le complexe

$$\mathbf{DR}(\mathrm{alg}\, H_X^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^N}))$$

est à composantes quasi-cohérentes, le complexe

$$\mathbf{R}\widetilde{j}_* \,\mathbf{DR}(\mathrm{alg}\, H_X^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^N}))$$

se réduit au complexe

$$\widetilde{j}_* \,\mathbf{DR}(\mathrm{alg}\, H_X^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^N}))$$

qui est isomorphe au complexe

$$\mathbf{DR}(\mathrm{alg}\, H_{\overline{X}}^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N})(*Z_\infty))$$

dont les composantes sont limites inductives de faisceaux quasi-cohérents. Mais comme la cohomologie d'un espace quasi-compact commute à la limite inductive on trouve en vertu du théorème de comparaison de Serre [**S**] pour les faisceaux algébriques cohérents l'isomorphisme

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathbf{P}^N, \mathbf{DR}(\mathrm{alg}\, H_{\overline{X}}^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N})(*Z_\infty))) \\ \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Gamma(\mathbf{P}^{\mathrm{an}N}, \mathbf{DR}(\mathrm{alg}\, H_{\overline{X}^{\mathrm{an}}}^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^{\mathrm{an}N}})(*Z_\infty^{\mathrm{an}}))).$$

D'où le lemme.

En vertu du lemme précédent l'obstruction à l'isomorphisme $(*)$ est donc par définition du faisceau d'irrégularité le complexe

$$\mathbf{R}\Gamma(Z_\infty^{\mathrm{an}}, \mathrm{Irr}_{Z_\infty^{\mathrm{an}}}(\mathrm{alg}\, H_{\overline{X}^{\mathrm{an}}}^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^{\mathrm{an}N}})).$$

Mais en vertu du corollaire 4.3–11 le faisceau

$$\mathrm{Irr}_{Z_\infty^{\mathrm{an}}}(\mathrm{alg}\, H_{\overline{X}^{\mathrm{an}}}^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^{\mathrm{an}N}})$$

est nul. D'où le théorème de comparaison global 5.1–1

Exercice 5.1–5. — Montrer que l'image directe

$$j_*^d \mathscr{O}_X \xrightarrow{\sim} \operatorname{alg} H_X^{N-\dim X}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^N})$$

au sens des $\mathscr{D}_X$-modules du fibré trivial est la cohomologie locale à support dans X à valeurs dans le fibré trivial $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^N}$.

5.2. Le théorème global de comparaison pour la cohomologie de de Rham : cas des coefficients lisses. — Soient $(X, \mathscr{O}_X)$ une variété algébrique complexe non singulière, $\mathscr{E}$ un fibré à connexion intégrable et $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}$ son complexe de de Rham. En reprenant le raisonnement du cas du fibré trivial on trouve alors des morphismes canoniques de comparaison :

$$(**) \qquad H^k(X; \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}) \longrightarrow H^k(X^{\mathrm{an}}; \mathscr{E}^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}} \Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}).$$

Ce morphisme n'est pas en général un isomorphisme. Cependant :

Théorème 5.2–1. — *Si pour tout morphisme d'une courbe complexe non singulière $f : C \to X$ dans X le fibré à connexion image inverse $f_d^*\mathscr{E}$ n'a que des singularités régulières à l'infini les morphismes de comparaison* $(**)$ *sont des isomorphismes.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que la condition avoir des singularités régulières à l'infini pour un fibré à connexion sur une courbe non singulière est parfaitement définie : si $j : C \to \overline{C}$ est la compactification canonique d'une telle courbe, le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(j_*^d f_d^* \mathscr{E})$ est nul où Z est le diviseur à l'infini. Par la réduction précédente, la question est locale pour la topologie de Zariski, on peut supposer que X est affine et connexe.

Lemme 5.2–2. — *Si X est une variété affine non singulière et connexe il existe un plongement $X \subset \mathbf{P}^N$ dans un espace projectif tel que l'adhérence $\overline{X}$ est une variété normale.*

Soit $j : X \subset \mathbf{P}^N$ un tel plongement et $Z := \overline{X} - X$ le diviseur à l'infini. En reprenant le raisonnement du cas du fibré trivial en trouve que l'obstruction au théorème de comparaison est l'hypercohomologie du faisceau $\mathrm{Irr}_Z(j_*^d \mathscr{E}))$. Le $\mathscr{D}_{\mathbf{P}^N}$-module holonome $\mathrm{Irr}_Z(j_*^d \mathscr{E}))$ est à support dans $\overline{X}$ et est lisse en dehors de Z. Comme $\overline{X}$ est normale il passe en tout point assez général de Z une courbe non singulière transverse à Z qui est alors non caractéristique pour l'analytisé du module précédent. En vertu du théorème de Cauchy-Kowalewska la dimension du support du faisceau $\mathrm{Irr}_Z(j_*^d \mathscr{E}))$ est strictement plus petite que $\dim Z$. En vertu du théorème 4.3–16 le faisceau $\mathrm{Irr}_Z(j_*^d \mathscr{E}))$ est nul, ce qui implique en particulier le théorème de comparaison 5.2–1.

Exercice 5.2–3. — Montrer en vous aidant d'un livre le lemme affirmant l'existence d'une compactification normale projective d'une variété affine non singulière.

6. Stabilité de la catégorie des complexes holonomes réguliers par Image inverse, Produits tensoriels interne et externe

Dans ce chapitre nous allons utiliser le critère fondamental de la régularité pour montrer que la catégorie des complexes holonomes réguliers est stable par image inverse.

6.1. Image inverse. — Soient $f : X' \to X$ un morphisme de variétés analytiques complexes et $\mathscr{M}$ un complexe holonome de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_X)$ rappelons que son image inverse

$$f^*_d\mathscr{M} := \mathbf{L}f^*\mathscr{M}$$

est un complexe holonome de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}'_X)$ et l'on d'un morphisme de Cauchy-Kowalewska exposé dans [**M-T**]

$$CK_f(\mathscr{M}) : f^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{S}(f^*_d\mathscr{M}).$$

Théorème 6.1–1. — *Si le complexe holonome $\mathscr{M}$ est régulier le complexe $f^*_d\mathscr{M}$ est régulier et le morphisme $CK_f(\mathscr{M})$ est un isomorphisme de complexes constructibles.*

Démonstration. — Si on factorise le morphisme f en l'immersion $i : X' \to X \times X$ suivie de la projection $X \times X' \to X$, on a par construction les isomorphismes canoniques $f^*_d \xrightarrow{\sim} i^*_d \circ p^*_d$ et $CK_f \xrightarrow{\sim} CK_i \circ CK_p$. On est ramené à montrer le théorème 6.1–1 dans le cas d'une immersion et dans le cas d'une projection.

Lemme 6.1–2. — *Soient $i : X' \hookrightarrow X$ une immersion et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module qui est réunion de $\mathscr{O}_X$-modules cohérents, on a un isomorphisme canonique*

$$i^d_* i^*_d(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{X'}(\mathscr{M})[\operatorname{codim}_X X'].$$

Démonstration du lemme. — Considérons l'isomorphisme canonique [**M-T**] :

$$i^d_* i^*_d(\mathscr{O}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{X'}(\mathscr{O}_X)[\operatorname{codim}_X X']$$

et le morphisme déduit par produit tensoriel

$$i^d_* i^*_d(\mathscr{O}_X) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{X'}(\mathscr{O}_X) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}[\operatorname{codim}_X X'].$$

La formule de projection

$$(i_*(\mathscr{D}_{X\leftarrow X'} \otimes_{\mathscr{D}_{X'}} \mathscr{O}_{X'})) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M} \longrightarrow i_*((\mathscr{D}_{X\leftarrow X'} \otimes_{\mathscr{D}_{X'}} \mathscr{O}_{X'}) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{i^{-1}\mathscr{O}_X} i^{-1}\mathscr{M})$$

est un isomorphisme parce que $\mathscr{M}$ est réunion de $\mathscr{O}_X$-modules cohérents. Mais comme on a déjà vu on a un morphisme canonique de complexes de $i^{-1}\mathscr{D}_X$-modules :

$$(\mathscr{D}_{X\leftarrow X'} \otimes_{\mathscr{D}_{X'}} \mathscr{O}_{X'}) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{i^{-1}\mathscr{O}_X} i^{-1}\mathscr{M} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_{X\leftarrow X'} \otimes_{\mathscr{D}_{X'}} (\mathscr{O}_{X'} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{i^{-1}\mathscr{O}_X} i^{-1}\mathscr{M}).$$

Ce qui compte tenu de l'isomorphisme canonique

$$\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{X'}(\mathscr{O}_X) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{X'}(\mathscr{M})$$

fournit l'isomorphisme du lemme.

Soit alors Z' un sous-espace analytique fermé de X' qui est donc un sous-espace analytique fermé de X. En vertu de la conservation de l'irrégularité par image directe par un morphisme propre 3.6–6 et du lemme précédent on a l'isomorphisme :

$$\mathrm{Irr}_{Z'}(\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{X'}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}_{Z'}(i_*^d i_d^* \mathscr{M})[\mathrm{codim}_X X'].$$

Mais le complexe $\mathrm{Irr}_{Z'}(\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_{X'}(\mathscr{M}))$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Irr}_{Z'}(\mathscr{M})$ qui est nul par hypothèse. Cela entraîne que le complexe $i_*^d i_d^*(\mathscr{M})$ est régulier. D'autre part par construction du morphisme CK_i [**M-T**] on a un triangle distingué :

$$i^{-1}\,\mathbf{S}(i_*^d i_d^* \mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{Irr}_{X'}(\mathscr{M})[\mathrm{codim}_X X']$$

qui montre puisque $\mathscr{M}$ est régulier que le morphisme $CK_i(\mathscr{M})$ est un isomorphisme. D'où le théorème 6.1–1 dans le cas d'une immersion.

Étudions le cas d'une projection.

Définition 6.1–3. — On dit qu'un $\mathscr{D}_X$-module holonome $\mathscr{M}$ est lisse si son support Y est une variété non singulière et équidimensionnelle et si sa variété caractéristique est égale à au conormal T_Y^*X de Y dans X.

Autrement dit un $\mathscr{D}_X$-module holonome lisse provient d'un fibré vectoriel à connexion intégrable sur un variété non singulière dont toutes les composantes connexes ont même dimension.

Lemme 6.1–4. — *Soit $\mathscr{M}$ un complexe holonome. Au* voisinage *de tout point de X il passe une hypersurface Z telle que les faisceau de cohomologie de $\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)$ sont lisses en dehors de Z et les modules de cohomologie du complexe $\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M})$ sont à support de dimension strictement plus petite que la dimension du support de $\mathscr{M}$.*

Démonstration du lemme. — La question est locale. Soient un point x de X et $\mathscr{O}_x$ l'anneau local en x. Considérons au voisinage de x les supports des modules de cohomologie de $\mathscr{M}$ dont la dimension est maximum et soit I_x l'idéal réduit définissant la réunion de ces composantes. Le lieu singulier de chaque module de cohomologie de $\mathscr{M}$, c'est-à-dire le fermé analytique en dehors duquel ce module est lisse, est au voisinage de x un sous-ensemble strict du support. La réunion des lieux singuliers des modules de cohomologie de $\mathscr{M}$ de support de dimension maximum et des supports des modules de cohomologie de $\mathscr{M}$ de support de dimension non maximum est au voisinage de x un fermé analytique de dimension strictement inférieure à la dimension maximum. Cet ensemble analytique est défini par un idéal J_x qui est distinct des idéaux premiers $I_{1x},\dots,I_{mx}$, $m\geqslant 1$ contenant l'idéal I_x et de dimension maximum. Il suffit de construire une fonction f non nulle de l'idéal J_x qui n'appartienne pas à aucun des idéaux premiers $I_{1x},\dots,I_{mx}$, $m\geqslant 1$ contenant l'idéal I_x et de dimension maximum. Pour cela en raisonne par récurrence sur m. Si $m=1$ puisque I_{1x} est distinct de J_x il existe une fonction f_1 de cet idéal qui n'appartienne pas à I_{1x}. Pour $m\geqslant 2$ supposons qu'on a construit une fonction f_{m-1} non nulle de l'idéal J_x qui n'appartienne pas à aucun idéal I_{ix} pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Si la fonction f_{m-1} n'appartient pas à l'idéal I_{mx} alors elle a la propriété requise. Sinon soit une fonction f_m non nulle de l'idéal J_x qui n'appartient pas à l'idéal I_{mx}. Si la fonction f_m n'appartient pas à aucun idéal I_{ix} pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$, alors elle a la propriété requise. Sinon la fonction $f_{m-1} + \lambda f_m$ pour un nombre complexe λ assez général a la propriété requise du lemme 6.1–4.

Si le complexe $\mathscr{M}$ est régulier par définition de la régularité 4.2–3 les complexes du triangle de cohomologie locale sont réguliers et le foncteur $\mathbf{S}$ transforme le triangle distingué :

$$\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{M}(*Z) \longrightarrow$$

en le triangle distingué :

$$j_! j^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathscr{M}) \longrightarrow i^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}) \longrightarrow$$

où j est l'inclusion du complémentaire de Z et i l'inclusion de Z. Ceci permet de transposer, c'est là le point de départ de la régularité de notre point de vue, les dévissages des complexes constructibles aux complexes holonomes réguliers.

Soit alors $p : X' \to X$ une projection ou plus généralement un morphisme lisse et $\mathscr{M}$ un complexe holonome régulier. Le morphisme p est non caractéristique pour tout $\mathscr{D}_X$-module cohérent et le morphisme :

$$p^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{S}(p_d^*\mathscr{M})$$

est toujours un isomorphisme. Reste à montrer que $p_d^*\mathscr{M}$ est régulier. Le foncteur image inverse est exact, on peut supposer que $\mathscr{M}$ est un module holonome régulier. La question est locale, sur la base. Nous raisonnons par récurrence sur la dimension du support de $\mathscr{M}$. En vertu du lemme précédent il existe une hypersurface Z telle que dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow p_d^* \operatorname{alg}\Gamma_X(\mathscr{M}) \longrightarrow p_d^*\mathscr{M} \longrightarrow p_d^*\mathscr{M}(*Z) \longrightarrow p_d^* \operatorname{alg}\mathscr{H}_X^1(\mathscr{M}) \longrightarrow 0$$

le module $p_d^*\mathscr{M}(*Z)$ est lisse en dehors de $p^{-1}Z$. D'autre part le morphisme CK_p :

$$p^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}(*Z)) \longrightarrow p_d^*\mathscr{M}(*Z)$$

est un isomorphisme et donc le faisceau d'irrégularité $\operatorname{Irr}^*_{p-1(Z)}(p_d^*\mathscr{M}(*Z))$ est nul. En vertu du critère fondamental de la régularité 4.3–16 le module $p_d^*\mathscr{M}(*Z)$ est régulier. En vertu de l'hypothèse de récurrence le module $p_d^* \operatorname{alg}\Gamma_X(\mathscr{M})$ est régulier. D'où le théorème 6.1–1 dans le cas d'une projection et donc dans le cas général.

En vertu du théorème 6.1–1 le morphisme f_d^* laisse stable les catégories $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ et est compatible avec le morphisme f^{-1} entre les catégories $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ par application du foncteur $\mathbf{S}$:

$$f^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}(f_d^*\mathscr{M}).$$

Si on définit le dual $D_X(\mathscr{F})$ de Grothendieck-Verdier d'un complexe constructible par :

$$D_X(\mathscr{F}) := \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathbb{C}_X)[2\dim X]$$

on la formule :

$$D_X(f^{-1}\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} f^! D_X(\mathscr{F})$$

où le foncteur $f^!$ entre les catégories $D^b(\mathbb{C}_X)$ est défini comme l'adjoint à droite du foncteur image directe à support propre $f_!$, dont l'existence est garanti par le théorème de dualité de Grothendieck-Verdier. Si on applique le théorème de dualité locale pour les $\mathscr{D}_X$-modules holonomes sur la base et la source on trouve pour un complexe régulier l'isomorphisme :

$$\mathbf{DR}(f_d^*\mathscr{M})[2\dim X'] \xrightarrow{\sim} f^!\,\mathbf{DR}(\mathscr{M})[2\dim X].$$

Remarque 6.1–5. — Dans la démonstration précédente on remarquera que dans le cas d'une immersion, l'holonomie pose un problème mais pas la régularité, alors que dans le cas d'une projection c'est la régularité qui pose problème et nécessite le critère fondamental de la régularité et non l'holonomie.

Remarque 6.1–6. — Contrairement à l'image directe, la régularité le long d'une hypersurface ne commute pas à l'image inverse. C'est pour cela qu'on fait l'hypothèse de régularité dans *toutes les directions* dans le théorème 6.1–1.

Exercice 6.1–7. — Construire un exemple d'un module holonome régulier le long d'une hypersurface tel que son image inverse n'est pas régulier le long de l'image inverse de l'hypersurface.

6.2. Produits tensoriels externe et interne. — Soient X_1, X_2 deux variétés analytiques complexes, p_1 resp. p_2 la projection de $X_1 \times X_2$ sur X_1 resp. p_2, $\mathscr{F}_1$ un complexe de $D^b(\mathbb{C}_{X_1})$ et $\mathscr{F}_2$ un complexe de $D^b(\mathbb{C}_{X_2})$. On définit le produit tensoriel externe par :

$$\mathscr{F}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{F}_2 := p_1^{-1}\mathscr{F}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbb{C}} p_2^{-1}\mathscr{F}_2 = p_1^{-1}\mathscr{F}_1 \otimes_{\mathbb{C}} p_2^{-1}\mathscr{F}_2$$

qui est un complexe de $D^b(\mathbb{C}_{X_1\times X_2})$. Remarquons que le foncteur produit tensoriel externe étant exact, le produit tensoriel externe de deux faisceaux est un faisceau et le produit tensoriel externe de deux complexes de faisceaux est le complexe simple associé au complexe double produit tensoriel. De même si $\mathscr{M}_1$ est un complexe de $D^b(\mathscr{D}_{X_1})$ et $\mathscr{M}_2$ est un complexe de $D^b(\mathscr{D}_{X_2})$:

Définition 6.2–1. — On définit le produit tensoriel externe :

$$\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathscr{D}} \mathscr{M}_2 := p_{1d}^*\mathscr{M}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_{X_1\times X_2}} p_{2d}^*\mathscr{M}_2 = p_{1d}^*\mathscr{M}_1 \otimes_{\mathscr{O}_{X_1\times X_2}} p_{2d}^*\mathscr{M}_2.$$

Les complexes $p_{1d}^*\mathscr{M}_1$ et $p_{2d}^*\mathscr{M}_2$ sont des complexes de $D^b(\mathscr{D}_{X_1\times X_2})$, donc le produit tensoriel externe $\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathscr{D}} \mathscr{M}_2$ est un complexe de $D^b(\mathscr{D}_{X_1\times X_2})$. De même le foncteur produit extérieur étant exact, le produit tensoriel externe de deux modules est un module et le produit tensoriel externe de deux complexes de modules est le complexe simple associé au complexe double produit tensoriel. Remarquons que si $\mathscr{M}_2$ est égal à $\mathscr{O}_{X_2}$, le produit tensoriel externe se réduit à l'image inverse $p_{1d}^* \mathscr{M}_1$, et si on suppose que $\mathscr{M}_1$ est un complexe de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_{X_1})$ le morphisme CK_{p_1} :

$$p_1^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}_1) \longrightarrow \mathbf{S}(p_{1d}^*\mathscr{M}_1)$$

est un isomorphisme. Nous allons généraliser cet isomorphisme au cas d'un complexe holonome.

Théorème 6.2–2. — *Soient $\mathscr{M}_1$ un complexe de $D^b(\mathscr{D}_{X_1})$ et $\mathscr{M}_2$ un complexe de $D^b(\mathscr{D}_{X_2})$, alors il existe un morphisme canonique :*

$$p_1^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}_1) \boxtimes_{\mathbb{C}} p_2^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}_2) \longrightarrow \mathbf{S}(p_{1d}^*\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathscr{D}} \mathbf{S}\, p_{2d}^*\mathscr{M}_2)$$

qui est un isomorphisme si le complexe $\mathscr{M}_1$ est à cohomologie cohérente et le complexe $\mathscr{M}_2$ à cohomologie holonome.

Démonstration. — Nous allons d'abord construire le morphisme. Remarquons que si $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{I}_1$ sont deux $\mathscr{D}_{X_1}$-modules et $\mathscr{M}_2$, $\mathscr{I}_2$ sont deux $\mathscr{D}_{X_2}$-modules on a un morphisme naturel canonique :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X_1}}(\mathscr{M}_1, \mathscr{I}_1) \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X_2}}(\mathscr{M}_2, \mathscr{I}_2) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X_1}\boxtimes_{\mathbb{C}}\mathscr{D}_{X_2}}(\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{M}_2, \mathscr{I}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{I}_2)$$

qui fournit si $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{I}_1$ sont deux complexes de $\mathscr{D}_{X_1}$-modules et $\mathscr{M}_2$, $\mathscr{I}_2$ sont deux complexes de $\mathscr{D}_{X_2}$-modules un morphisme de complexes

$$\mathscr{H}om^{\bullet}_{\mathscr{D}_{X_1}}(\mathscr{M}_1, \mathscr{I}_1) \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{H}om^{\bullet}_{\mathscr{D}_{X_2}}(\mathscr{M}_2, \mathscr{I}_2) \longrightarrow \mathscr{H}om^{\bullet}_{\mathscr{D}_{X_1}\boxtimes\mathscr{D}_{X_2}}(\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{M}_2, \mathscr{I}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{I}_2).$$

Appliquons ceci pour $\mathscr{I}_1$ une résolution $\mathscr{D}_{X_1}$-injective de $\mathscr{O}_{X_1}$ et $\mathscr{I}_2$ une résolution $\mathscr{D}_{X_2}$-injective de $\mathscr{O}_{X_2}$ on trouve un morphisme :

$$p_1^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}_1) \boxtimes_{\mathbb{C}} p^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}_2) \longrightarrow \mathscr{H}om^{\bullet}_{\mathscr{D}_{X_1}\boxtimes_{\mathbb{C}}\mathscr{D}_{X_2}}(\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{M}_2, \mathscr{I}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{I}_2).$$

L'extension des scalaires $\mathscr{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{D}_{X_2} \to \mathscr{D}_{X_1\times X_2}$ fournit un morphisme

$$\mathscr{I}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{I}_2 \longrightarrow \mathscr{D}_{X_1\times X_2} \otimes_{\mathscr{D}_{X_1}\boxtimes_{\mathbb{C}}\mathscr{D}_{X_2}} \mathscr{I}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{I}_2.$$

Prenons une résolution $\mathscr{D}_{X_1\times X_2}$-injective $\mathscr{I}$ de $\mathscr{D}_{X_1\times X_2} \otimes_{\mathscr{D}_{X_1}\boxtimes_{\mathbb{C}}\mathscr{D}_{X_2}} \mathscr{I}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{I}_2$ on trouve par composition un morphisme

$$p_1^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}_1) \boxtimes_{\mathbb{C}} p_2^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}_2) \longrightarrow \mathscr{H}om^{\bullet}_{\mathscr{D}_{X_1}\boxtimes_{\mathbb{C}}\mathscr{D}_{X_2}}(\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{M}_2, \mathscr{I})$$

dont nous allons voir qu'il représente le morphisme cherché. L'extension $\mathscr{O}_{X_1}\boxtimes_{\mathbb{C}}\mathscr{O}_{X_2} \to \mathscr{O}_{X_1\times X_2}$ est plate et donc l'extension induite $\mathscr{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{D}_{X_2} \to \mathscr{D}_{X_1\times X_2}$ est aussi plate. Cela entraîne que $\mathscr{I}$ est une résolution du faisceau

$$\mathscr{D}_{X_1\times X_2} \otimes_{\mathscr{D}_{X_1}\boxtimes_{\mathbb{C}}\mathscr{D}_{X_2}} \mathscr{O}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{X_2}$$

qui est canoniquement isomorphe comme $\mathscr{D}_{X_1\times X_2}$-module au faisceau $\mathscr{O}_{X_1\times X_2}$. D'où un morphisme :

$$p_1^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}_1) \boxtimes_{\mathbb{C}} p_2^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}_2) \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X_1}\boxtimes_{\mathbb{C}}\mathscr{D}_{X_2}}(\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{M}_2, \mathscr{O}_{X_1\times X_2}).$$

Mais d'une part le complexe

$$\mathscr{D}_{X_1\times X_2} \otimes_{\mathscr{D}_{X_1}\boxtimes_{\mathbb{C}}\mathscr{D}_{X_2}} \mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{M}_2$$

est canoniquement isomorphe au faisceau $\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathscr{D}} \mathscr{M}_2$ et d'autre part par platitude le morphisme canonique :

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X_1\times X_2}}(\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathscr{D}} \mathscr{M}_2, \mathscr{O}_{X_1\times X_2}) \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X_1}\boxtimes_{\mathbb{C}}\mathscr{D}_{X_2}}(\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{M}_2, \mathscr{O}_{X_1\times X_2})$$

est un isomorphisme.

Pour montrer que c'est un isomorphisme dans les conditions de la proposition, la question est locale. On est dans les conditions du lemme du way out foncteur [**M-N1**], on peut supposer que $\mathscr{M}_1$ est égal à $\mathscr{D}_{X_1}$. On est ramené à montrer, pour tout point (x_1, x_2), que le morphisme composé est un isomorphisme :

$$(*)\quad \mathscr{O}_{X_1,x_1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbf{S}(\mathscr{M}_2)_{,x_2} \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X_1,x_1}\boxtimes_{\mathbb{C}}\mathscr{D}_{X_2,x_2}}(\mathscr{D}_{X_1,x_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{M}_{,x_2}, \mathscr{O}_{X_1\times X_2,x_1,x_2}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X_1,x_2}}(\mathscr{M}_{,x_2}, \mathscr{O}_{X_1\times X_2,(x_1,x_2)}).$$

Le deuxième morphisme canonique est un isomorphisme parce que l'extension

$$\mathscr{D}_{X_1,x_1} \longrightarrow \mathscr{D}_{X_1,x_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathscr{D}_{X_2,x_2}$$

est plate de façon évidente. On peut considérer une résolution locale libre de $\mathscr{D}^\bullet_{X_2} \to \mathscr{M}_2$ au voisinage de x_2. Posons

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}^\bullet_{X_2} &:= \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X_2}}(\mathscr{D}^\bullet_{X_2}, \mathscr{O}_{X_2}),\\
\mathscr{G}^\bullet_{X_1\times X_2} &:= \mathscr{H}om_{p_2^{-1}\mathscr{D}_{X_2}}(p_2^{-1}\mathscr{D}^\bullet_{X_2}, \mathscr{O}_{X_1\times X_2}),\\
E^\bullet &:= \Gamma(U_2, \mathscr{E}^\bullet_{X_2}),\\
G^\bullet &:= \Gamma(U_1\times U_2, \mathscr{G}^\bullet_{X_1\times X_2})
\end{aligned}$$

et $F := \Gamma(U_1, \mathscr{O}_{X_1})$ où U_1 est un voisinage de x_1 et U_2 est un voisinage de x_2. Le morphisme $(*)$ est la limite inductive, quand U_1, U_2 parcourent des voisinages de x_1, x_2, des morphismes

$$(**)\qquad F \otimes_{\mathbb{C}} E^\bullet \longrightarrow G^\bullet.$$

Il suffit de montrer que pour U_1, U_2 assez petits que les morphismes $(**)$ induisent des isomorphismes en cohomologie.

Rappelons les faits suivants : les espaces de fonctions holomorphes

$$\Gamma(U_1, \mathscr{O}_{X_1}), \Gamma(U_1\times U_2, \mathscr{O}_{X_1\times X_2})$$

sont des espaces vectoriels topologiques complexes métrisables, complets et nucléaires et le morphisme canonique

$$\Gamma(U_1, \mathscr{O}_{X_1})\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\Gamma(U_2, \mathscr{O}_{X_2}) \longrightarrow \Gamma(U_1\times U_2, \mathscr{O}_{X_1\times X_2})$$

est un isomorphisme où

$$\Gamma(U_1, \mathscr{O}_{X_1})\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\Gamma(U_2, \mathscr{O}_{X_2})$$

est le complété du produit tensoriel pour l'une des topologies canoniques sur le produit tensoriel. La catégorie des espaces vectoriels topologiques complexes métrisables, complets dont les morphismes sont des homomorphismes est stable par définition par cohomologie et le foncteur produit tensoriel complété avec un espace métrisable, complet nucléaire est exact et donc commute à la cohomologie.

Appliquons tout ceci à notre situation. Par hypothèse $\mathscr{M}_2$ est holonome, donc le complexe $\mathscr{E}^\bullet_{X_2}$ est constructible et si U_2 est assez petit les morphismes du complexe $E^\bullet$ sont des homomorphisme en vertu du théorème de Banach. On trouve donc que pour U_2 assez petit que les morphismes :

$$F \otimes_{\mathbb{C}} H^k(E^\bullet) \longrightarrow F \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} H^k(E^\bullet) \longrightarrow H^k(G^\bullet)$$

sont des isomorphisme puisque l'espace $F \otimes_{\mathbb{C}} H^k(E^\bullet)$ est complet. D'où le théorème 6.2–2.

Théorème 6.2–3. — *Soient $\mathscr{M}_1$ un complexe de $D^b_{hr}(\mathscr{D}_{X_1})$ et $\mathscr{M}_2$ un complexe de $D^b_{hr}(\mathscr{D}_{X_2})$, alors le produit extérieur $\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathscr{D}} \mathscr{M}_2$ est régulier.*

Démonstration. — On peut supposer que $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ sont des modules puisque le foncteur produit extérieur est exact. La question est locale aussi bien sur X_1 que sur X_2. On raisonne par récurrence sur les dimensions des supports. Si la dimension du support de $\mathscr{M}_1$, resp. de $\mathscr{M}_2$, est nulle on peut supposer que $\mathscr{M}_1$ est égal à $\operatorname{alg}\mathscr{H}^{\dim X_1}_{x_1}(\mathscr{O}_{X_1})$ pour un point x_1 de X_1, resp. $\operatorname{alg}\mathscr{H}^{\dim X_2}_{x_2}(\mathscr{O}_{X_2})$ pour un point x_2 de X_2. Dans ce cas si Z est une hypersurface de $X_1 \times X_2$ le faisceau $\operatorname{Irr}_Z(\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathscr{D}} \mathscr{M}_2)$ est isomorphe au faisceau $\operatorname{Irr}_{Z_2}(\mathscr{M}_2)$, resp. $\operatorname{Irr}_{Z_1}(\mathscr{M}_1)$, où Z_1 est l'intersection de Z avec $x_1 \times X_2$, resp. Z_2 est l'intersection de Z avec $X_1 \times x_2$. D'où le résultat dans ce cas là. Par récurrence sur les dimensions on peut supposer que $\mathscr{M}_1(*Z_1)$ est lisse en dehors d'une hypersurface Z_1 et est isomorphe à son localisé le long de Z_1, resp. $\mathscr{M}_2(*Z_2)$ est lisse en dehors d'une hypersurface Z_2 et est isomorphe à son localisé le long de Z_2. Le produit extérieur $\mathscr{M}_1(*Z_1) \boxtimes_{\mathscr{D}} \mathscr{M}_2(*Z_2)$ est lisse en dehors de l'hypersurface $Z = Z_1 \times X_2 \cap X_1 \times Z_2$ et est isomorphe à son localisé le long de Z. D'autre part en vertu du théorème 6.2–2 le faisceau

$$\operatorname{Irr}_Z(\mathscr{M}_1(*Z_1) \boxtimes_{\mathscr{D}} \mathscr{M}_2(*Z_2))$$

est nul. En vertu du théorème 4.3–16 le module $\mathscr{M}_1(*Z_1) \boxtimes_{\mathscr{D}} \mathscr{M}_2(*Z_2)$ est régulier. D'où le théorème 6.2–3.

Supposons que $X = X_1 = X_2$, et notons $\delta : X \hookrightarrow X \times X$ le morphisme diagonal. En vertu des théorèmes 6.1–1 et 6.2–3 on a un isomorphisme canonique pour deux complexes réguliers $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$:

$$\delta^{-1}(\mathbf{S}(\mathscr{M}_1) \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathbf{S}(\mathscr{M}_2)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}(\delta^*(\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathscr{D}} \mathscr{M}_2)).$$

Mais les morphismes canoniques :

$$\mathbf{S}(\mathscr{M}_1) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathbf{S}(\mathscr{M}_2) \longrightarrow \delta^{-1}(\mathbf{S}(\mathscr{M}_1) \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathbf{S}(\mathscr{M}_2))$$

et

$$\mathscr{M}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_2 \longrightarrow \delta^*(\mathscr{M}_1 \boxtimes_{\mathscr{D}} \mathscr{M}_2)$$

sont des isomorphismes. D'où l'on déduit le corollaire :

Corollaire 6.2–4. — *Soient $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ deux complexes réguliers, alors le produit tensoriel*

$$\mathscr{M}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_2$$

est régulier et l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{S}(\mathscr{M}_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbf{S}(\mathscr{M}_2) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathscr{M}_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_2))$$

de complexes constructibles.

Soit $f : D \to X$ un morphisme d'un disque complexe sur X et $\mathscr{M}$ un complexe holonome régulier. Alors en vertu du théorème 6.1–1 le complexe $f_d^*\mathscr{M}$ est régulier.

Théorème 6.2–5. — *Soit un complexe holonome $\mathscr{M}$, si pour tout morphisme $f : D \to X$ d'un disque complexe sur X le complexe $f_d^*\mathscr{M}$ est régulier, alors le complexe $\mathscr{M}$ est régulier.*

Démonstration. — La question est locale. On raisonne par récurrence sur la dimension du support de $\mathscr{M}$. Si la dimension du support de $\mathscr{M}$ est nulle, $\mathscr{M}$ est régulier. En vertu du lemme 6.1–4 il existe localement une hypersurface Z telle que les faisceaux de cohomologie de $\mathscr{M}$ sont lisses en dehors de Z et la dimension du support de $\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M})$ est strictement plus petite que la dimension du support de $\mathscr{M}$. Si $f : D \to X$ est un morphisme d'un disque sur X, si $f^{-1}Z$ est de dimension nulle le complexe $f_d^*\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M})$ est régulier ; si $f^{-1}Z$ est de dimension 1 le complexe $f_d^*\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M})$ est isomorphe au complexe $f_d^*\mathscr{M}$ qui est régulier par hypothèse. En vertu de l'hypothèse de récurrence le complexe $\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M})$ est régulier. D'autre part le complexe $f_d^*\mathscr{M}(*Z)$ est régulier. Raisonnant par récurrence sur $\dim X$ et en faisant passer une hypersurface non caractéristique pour les faisceaux de cohomologie de $\mathscr{M}(*Z)$ en tout point assez général, on trouve que les faisceaux d'irrégularité de ces modules sont génériquement nuls. En vertu du théorème 4.3–16 le complexe $\mathscr{M}(*Z)$ est régulier. Donc le complexe $\mathscr{M}$ est régulier. D'où le théorème 6.2–5.

Le même type de raisonnement montre :

Théorème 6.2–6. — *Un complexe holonome $\mathscr{M}$ est régulier si et seulement si son complexe d'irrégularité le long de tout point est nul.*

Démonstration. — Voyons d'abord que si $f : X' \hookrightarrow X$ est une hypersurface non singulière non caractéristique pour les faisceaux de cohomologie d'un complexe holonome $\mathscr{M}$ et si x est un point de X' le complexe d'irrégularité $\mathrm{Irr}_x(f_d^*\mathscr{M})$ est canoniquement isomorphe au complexe $\mathrm{Irr}_x(\mathscr{M})[1]$. En effet le complexe

$$\mathbf{DR}(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_x(f_d^*\mathscr{M}))$$

est canoniquement isomorphe au complexe

$$\mathbf{DR}(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_x(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_{X'}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{DR}(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_x(\mathscr{M}))[1],$$

parce que le complexe de de Rham commute à l'image directe [**M-N1**], la cohomologie locale algébrique commute à l'image directe propre 3.6–4 et l'image directe du complexe $f_d^*\mathscr{M}$ est canoniquement isomorphe au complexe $\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_{X'}(\mathscr{M})$. Mais l'hypersurface étant non caractéristique le complexe $\mathrm{Irr}_{X'}(\mathscr{M})$ est nul et donc le morphisme

$$\mathbf{DR}(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_{X'}(\mathscr{M})) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathbf{R}\Gamma_{X'}(\mathscr{M}))$$

est un isomorphisme. Cela entraîne que le morphisme :

$$\mathbf{R}\Gamma_x(\mathbf{DR}(f_d^*\mathscr{M})) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_x(\mathbf{DR}(\mathscr{M}))[1]$$

est un isomorphisme. Ceci montre alors que le complexe d'irrégularité le long d'un point commute par toute restriction non caractéristique passant par ce point.

Ceci entraîne que si le complexe d'irrégularité le long de tout point d'un complexe holonome est nul ce complexe holonome est régulier en dehors d'une partie de dimension nulle.

Pour terminer la démonstration de 6.2–6, la question est locale, on raisonne par récurrence sur la dimension du support. Il passe en tout point une hypersurface Z telle que les faisceaux de cohomologie de $\mathscr{M}$ sont lisses en dehors de Z et la dimension du support de $\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathscr{M})$ est strictement plus petite que la dimension du support de $\mathscr{M}$. Le complexe $\mathrm{Irr}_Z\,\mathscr{M}(*Z)$ est génériquement nul. En vertu du théorème 4.3–16 le complexe $\mathscr{M}(*Z)$ est régulier, en particulier son complexe d'irrégularité le long de tout point est nul et donc le complexe d'irrégularité de $\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathscr{M})$ le long de tout point est nul. En vertu de l'hypothèse de récurrence le complexe $\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathscr{M})$ et donc le complexe $\mathscr{M}$ est régulier. D'où le théorème 6.2–6.

7. Stabilité de la Catégorie des complexes holonomes réguliers par Dualité

Nous allons utiliser dans ce chapitre le critère fondamental de la régularité pour établir que la catégorie des complexes holonomes réguliers est stable par dualité.

7.1. Stabilité par dualité. — Soient X une variété analytique complexe et $\mathscr{M}$ un complexe holonome. Rappelons que son son complexe dual $\mathscr{M}^*$ est défini par :

$$\mathscr{M}^* := \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_X)\otimes\omega_X[\dim X].$$

C'est un complexe holonome et l'on a le théorème de dualité locale :

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M})\xrightarrow{\sim}\mathbf{S}(\mathscr{M})^\vee.$$

Il est équivalent de dire que le foncteur de dualité pour les complexes holonomes est compatible au foncteur de dualité pour des complexes constructibles par les foncteur $\mathbf{DR},\mathbf{S}$:

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}^*)\xrightarrow{\sim}\mathbf{DR}(\mathscr{M})^\vee.$$

$$\mathbf{S}(\mathscr{M}^*)\xrightarrow{\sim}\mathbf{S}(\mathscr{M})^\vee.$$

Théorème 7.1–1. — *Si $\mathscr{M}$ est un complexe holonome régulier son complexe dual $\mathscr{M}^*$ est régulier.*

Démonstration. — Le foncteur de dualité pour les modules holonomes étant exact et la régularité passant à la cohomologie 4.2–4, on peut supposer que $\mathscr{M}$ est un module holonome. La question est locale. Nous raisonnons par récurrence sur la dimension du support de $\mathscr{M}$. Si la dimension de ce support est nulle, la dimension du support du module dual est nulle d'où le résultat dans ce cas là.

Si la dimension du support de $\mathscr{M}$ est strictement positive, il passe, en vertu du lemme 6.1–4 en tout point une hypersurface Z telle le module $\mathscr{M}(*Z)$ soit lisse hors de Z et les dimensions des supports des modules $\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M})$ et $\operatorname{alg}\mathscr{H}^1_Z(\mathscr{M})$ soient strictement plus petites que la dimension du support de $\mathscr{M}$. Les modules $\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M})$ et $\operatorname{alg}\mathscr{H}^1_Z(\mathscr{M})$ sont réguliers et en vertu de l'hypothèse de récurrence les modules duaux $\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M})^*$ et $\operatorname{alg}\mathscr{H}^1_Z(\mathscr{M})^*$ sont réguliers. La suite exacte :

$$0\longrightarrow\operatorname{alg}\mathscr{H}^1_Z(\mathscr{M})^*\longrightarrow\mathscr{M}(*Z)^*\longrightarrow\mathscr{M}^*\longrightarrow\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M})^*\longrightarrow 0$$

montre que si $\mathscr{M}(*Z)^*$ est régulier le module $\mathscr{M}^*$ est régulier. Mais le module holonome $\mathscr{M}(*Z)$ étant localement de longueur finie, il admet localement une suite de composition finie par des modules holonomes $\mathscr{M}(*Z)\supset\mathscr{N}_1\supset\mathscr{N}_2\supset\cdots\supset 0$ telle que les sous-facteurs sont irréductibles. Considérons un sous-facteur $\mathscr{N}_i/\mathscr{N}_{i+1}$ qui est régulier le long de Z, alors si la dimension de son support est strictement inférieure à la dimension du support de $\mathscr{M}$, le module dual $(\mathscr{N}_i/\mathscr{N}_{i+1})^*$ est régulier en vertu de l'hypothèse de récurrence. Si cette dimension est égale à la dimension du support de $\mathscr{M}$ alors le module dual $(\mathscr{N}_i/\mathscr{N}_{i+1})^*$ s'injecte dans le localisé $(\mathscr{N}_i/\mathscr{N}_{i+1})^*(*Z)$ puisque le foncteur de dualité est une anti-équivalence de catégories. Il suffit de voir, en vertu du critère fondamental de la régularité 4.3–16 que le faisceau $\operatorname{Irr}_Z(((\mathscr{N}_i/\mathscr{N}_{i+1})^*)$ est génériquement nul.

Lemme 7.1–2. — *Un module holonome $\mathscr{M}$ lisse en dehors d'une hypersurface Z est génériquement régulier le long de cette hypersurface si et seulement si son module dual est génériquement régulier le long de cette hypersurface.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la dimension de X. Si $\dim X = 1$ alors pour tout point Z, les dimensions des espaces $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ et $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}^*)$ sont égales et le lemme est vrai dans ce cas là. Dans le cas général en un point général de Z il passe une hypersurface X' non caractéristique pour $\mathscr{M}$. Le lemme résulterait de la commutation de la dualité des modules holonomes avec la restriction sur une hypersurface lisse non caractéristique assez générale. Prendre garde que le foncteur dualité ne commute avec l'image inverse en général même dans le cas régulier.

Le théorème 7.1–1 résulte alors de la proposition :

Proposition 7.1–3. — *Soient $f : Y \to X$ une immersion fermée d'une variété non singulière alors pour tout complexe $\mathscr{M}$ de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X)$, il existe un morphisme canonique*

$$(f_d^* \mathscr{M})^* \longrightarrow f_d^*(\mathscr{M}^*)$$

qui est un isomorphisme si Y est une hypersurface non caractéristique pour la cohomologie de $\mathscr{M}$.

Démonstration. — On part du morphisme canonique

$$\mathbf{R} \operatorname{alg} \Gamma_Y(\mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathscr{O}_X,$$

d'où par dualité un morphisme canonique

$$\mathscr{O}_X \longrightarrow (\mathbf{R} \operatorname{alg} \Gamma_Y(\mathscr{O}_X))^*.$$

Mais l'on a l'isomorphisme canonique

$$(\mathbf{R} \operatorname{alg} \Gamma_Y(\mathscr{O}_X))^* \simeq \mathbf{R} \operatorname{alg} \Gamma_Y(\mathscr{O}_X)[2 \operatorname{codim}_X Y]$$

parce que $\mathbf{R} \operatorname{alg} \Gamma_Y(\mathscr{O}_X)[\operatorname{codim}_X Y]$ est isomorphe canoniquement à l'image directe de $\mathscr{O}_Y$ par l'immersion f et que la dualité commute avec une immersion fermée. D'où pour tout complexe $\mathscr{M}$ un morphisme

$$\mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{R} \operatorname{alg} \Gamma_Y(\mathscr{M})[2 \operatorname{codim}_X Y].$$

D'autre part par fonctorialité de l'image différentielle directe on a un morphisme canonique :

$$\mathbf{R} \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(f_d^* \mathscr{M}, \mathscr{D}_Y) \longrightarrow \mathbf{R} \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(f_*^d f_d^* \mathscr{M}, \mathscr{D}_{X \leftarrow Y}).$$

Comme la cohomologie de $\mathscr{M}$ est localement réunion de faisceau $\mathscr{O}_X$-cohérents le complexe $f_*^d f_d^* \mathscr{M}$ est canoniquement isomorphe au complexe

$$\mathbf{R} \operatorname{alg} \Gamma_Y(\mathscr{M})[\operatorname{codim}_X Y].$$

D'où en composant avec le morphisme précédent on trouve un morphisme de complexes de $\mathscr{D}_Y$-modules à droite.

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(f_d^*\mathscr{M},\mathscr{D}_Y)[\dim Y] \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_{X\leftarrow Y})[\dim X].$$

En passant au complexe de $\mathscr{D}_Y$-modules à gauche on trouve le morphisme, en tenant compte cette fois de la cohérence de la cohomologie de $\mathscr{M}$:

$$(f_d^*\mathscr{M})^* \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_X)\otimes_{\mathscr{D}_X}\mathscr{D}_{X\leftarrow Y}\otimes_{\mathscr{O}_Y}\omega_Y^{-1}[\dim X].$$

Mais le complexe de droite est canoniquement isomorphe au complexe $f_d^*(\mathscr{M}^*)$. D'où le morphisme de compatibilité entre la dualité et l'image inverse. Pour montrer que c'est un isomorphisme dans la cas non caractéristique, on peut supposer que $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module cohérent. La question est locale et par le raisonnement de la démonstration de 3.5–4 on peut supposer que $\mathscr{M}$ est défini par un opérateur de Weierstrass, auquel cas son image inverse est un $\mathscr{D}_Y$-module libre de rang l'ordre de l'opérateur et la vérification de l'isomorphisme est immédiate.

Exercice 7.1–4. — Montrer que le morphisme naturel

$$f^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}),\mathbb{C}_X) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_{X'}}(f^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}),\mathbb{C}_{X'})$$

est un isomorphisme pour une hypersurface non caractéristique $f : X' \to X$ pour un module holonome $\mathscr{M}$ en utilisant la commutation de la dualité par une immersion non caractéristique et le théorème de dualité locale.

Remarque 7.1–5. — On peut montrer [**M2**], c'est plus difficile, que pour un complexe holonome $\mathscr{M}$ et un espace analytique Y on a l'égalité entre fonctions constructibles caractéristiques d'Euler-Poincaré :

$$\chi(\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})) = \chi(\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M}^*)).$$

Mais si Y est une hypersurface il est facile de voir que la nullité du faisceau $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})$ est équivalente à la nullité de sa fonction d'Euler-Poincaré, on voit que la nullité du faisceau $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})$ est équivalente à la nullité du faisceau $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M}^*)$, bien que ces deux faisceaux ne soient pas en dualité. Ce résultat donne un résultat plus précis que 7.1–1, en ce sens qu'un module holonome est régulier le long d'une hypersurface si et seulement si son module dual est régulier le long de cette même hypersurface.

Remarque 7.1–6. — On peut définir algébriquement les polygones de Newton d'un module holonome le long d'une hypersurface [**L-M**] dont la trivialité est équivalente à la régularité le long de cette hypersurface. On peut montrer que ces polygones de Newton sont invariants par dualité [**L-M**]. En particulier la stabilité par dualité le long d'une hypersurface est purement algébrique.

7.2. Image inverse extraordinaire

Définition 7.2–1. — Si $f : X' \to X$ est un morphisme variétés analytiques complexes et $\mathscr{M}$ un complexe de $D^b(\mathscr{D}_X)$ on définit son image inverse extraordinaire par :

$$f_d^! \mathscr{M} := (f_d^* \mathscr{M}^*)^*.$$

Corollaire 7.2–2. — *Si $\mathscr{M}$ est un complexe holonome régulier son image inverse extraordinaire $f_d^!\mathscr{M}$ est un complexe holonome régulier et l'on a un isomorphisme canonique de complexes constructibles :*

$$f^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{DR}(f_d^!\mathscr{M}).$$

Démonstration. — En effet le complexe dual $\mathscr{M}^*$ est régulier en vertu du théorème 7.1–1 et l'image inverse d'un complexe régulier est régulier en vertu du théorème 6.1–1. D'autre part on a les morphismes canoniques :

$$f^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} f^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}^*) \longrightarrow \mathbf{S}(f_d^*\mathscr{M}^*) \xrightarrow{\sim} \mathbf{DR}(f_d^!\mathscr{M}).$$

En vertu du théorème 6.1–1 ces morphismes sont des isomorphismes.

7.3. Pleine fidélité du foncteur de de Rham

Théorème 7.3–1. — *Soient deux complexes holonomes $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$, alors il existe un morphisme canonique fonctoriel en $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$:*

$$\mathbf{S}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2) : \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2) \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}_2),\mathbf{S}(\mathscr{M}_1))$$

de complexes constructibles qui est un isomorphisme si les complexes $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ sont réguliers.

Démonstration. — Nous avons vu dans la proposition 3.5–8 qu'il existe des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned}\mathbf{DR}(\mathscr{M}_1^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_2) &\xrightarrow{\sim} \omega_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} (\mathscr{M}_1^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_2)[-\dim X]\\ &\xrightarrow{\sim} (\omega_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_1^*) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}_2[-\dim X] \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1,\mathscr{D}_X) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}_2\\ &\xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2).\end{aligned}$$

On obtient un diagramme de morphisme canoniques :

$$\begin{aligned}\mathbf{DR}(\mathscr{M}_1^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_2) &\xrightarrow{DL} \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}_1^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_2),\mathbb{C}_X)\\ &\xrightarrow{CK} \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}_1^*)\otimes_{\mathbb{C}_X}\mathbf{S}(\mathscr{M}_2)),\mathbb{C}_X)\\ &\xrightarrow{Ad} \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}_2),\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}_1^*),\mathbb{C}_X))\\ &\xrightarrow{DL^{-1}} \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}_2),\mathbf{S}(\mathscr{M}_1))\end{aligned}$$

où DL est le morphisme de dualité locale, CK le morphisme de Cauchy-Kowalewska et le morphisme de transition est le morphisme d'adjonction.

Tous les morphismes précédents sont définis pour $\mathscr{M}_1$ dans $D^b_h(\mathscr{D}_X)$ et $\mathscr{M}_2$ dans $D^b_h(\mathscr{D}_X)$. Les morphismes de dualité locale sont des isomorphismes pour les complexes holonomes et le morphisme de Cauchy-Kowalewska est un isomorphisme pour les complexes réguliers 6.2–4, puisque si $\mathscr{M}_1$ est régulier son complexe dual est régulier 7.1–1 et si le complexe $\mathscr{M}_2$ est régulier le produit tensoriel $\mathscr{M}_1^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_2$ est régulier 6.2–4.

Donc sous l'hypothèse de régularité on obtient un isomorphisme fonctoriel canonique

$$\mathbf{S}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) : \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \simeq \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}_2), \mathbf{S}(\mathscr{M}_1)).$$

Remarque 7.3–2. — L'obstruction à l'isomorphisme précédent est le complexe $\mathrm{Irr}^*_\Delta(\mathscr{M}_1^* \boxtimes_{\mathscr{D}} \mathscr{M}_2)$. Mais pour que ce complexe soit nul, il faut faire l'hypothèse de régularité de $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ dans toutes les directions.

Corollaire 7.3–3. — *Les foncteurs $\mathbf{S}, \mathbf{DR}$ de la catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ des complexes holonomes réguliers dans la catégorie $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ des complexes constructibles sont pleinement fidèles.*

Démonstration. — Soient deux complexes holonomes réguliers $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2$. En prenant l'espace de cohomologie de degré zéro dans le théorème 7.3–1, on trouve que le morphisme canonique :

$$\mathrm{hom}_{\mathscr{D}_X}(X; \mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbb{C}_X}(X; \mathbf{S}(\mathscr{M}_2), \mathbf{S}(\mathscr{M}_1))$$

est un isomorphisme, donc le foncteur $\mathbf{S}$ est pleinement fidèle. D'autre part on a un isomorphisme canonique de dualité *cf.* [**N**] :

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}((\mathscr{M}_2)^*, (\mathscr{M}_1)^*).$$

Mais en vertu du théorème 7.1–1 les complexes $\mathscr{M}_2^*, \mathscr{M}_1^*$ sont holonomes réguliers. Les morphismes canoniques :

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(X; (\mathscr{M}_2)^*, (\mathscr{M}_1)^*) \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}((\mathscr{M}_1)^*), \mathbf{S}((\mathscr{M}_2)^*))$$

$$\longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{DR}(\mathscr{M}_1), \mathrm{DR}(\mathscr{M}_2))$$

sont des isomorphismes. En prenant l'espace de cohomologie de degré zéro, on trouve que le foncteur $\mathbf{DR}$ est pleinement fidèle.

8. Résumé

Nous allons marquer une pose et résumer les résultats importants dont la démonstration n'est pas de nature formelle. Il y trois types de résultats à retenir. Les résultats de finitude de type **F**, les résultats de positivité de type **P** et les résultats de régularité de type **R**.

8.1. Résultats de Finitude.

— Soit $f : X' \to X$ un morphisme de variétés analytiques complexes. On a les catégories $D^b_h(\mathscr{D}_X)$ des complexes holonomes et les catégories $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ des complexes constructibles.

F. 1) Les catégories $D^b_h(\mathscr{D}_X)$ sont stables par cohomologie locale algébrique le long d'un fermé analytique, par images inverses, par produit tensoriel interne et externe [**M-T**].

F. 2) Les catégories $D^b_h(\mathscr{D}_X)$ sont stables par images directe par un morphisme propre sous l'hypothèse d'existence d'une filtration globale pour les faisceaux de cohomologie [**Ma**]. La faiblesse des écoles de Nice et de Séville réside certainement dans l'exposé sur l'image directe.

Le foncteur image directe pour les complexes de $\mathscr{D}_X$-modules commute, par le foncteur de de Rham, avec le foncteur image directe des complexes de faisceaux d'espaces vectoriels complexes [**M-N1**].

F. 3) Le théorème de constructibilité fournit deux foncteurs exacts de catégorie triangulées l'un covariant et l'autre contravariant [**M-N1**] :

$$\mathbf{DR}, \mathbf{S} : D^b_h(\mathscr{D}_X) \longrightarrow D^b_c(\mathbb{C}_X).$$

F. 4) Le théorème de dualité locale fournit un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}), \mathbb{C}_X)$$

pour tout complexe holonome $\mathscr{M}$ qui exprime que le foncteur dualité des complexes holonomes est compatible par le foncteur de de Rham avec le foncteur dualité pour les complexes constructibles [**N**].

8.2. Résultats de Positivité

P. 1) Pour tout espace analytique fermé Y de X on a les foncteurs $\mathrm{Irr}_Y, \mathrm{Irr}^*_Y$ complexes d'irrégularité le long de Y, l'un covariant l'autre contravariant :

$$\mathrm{Irr}_Y, \mathrm{Irr}^*_Y : D^b_h(\mathscr{D}_X) \longrightarrow D^b_c(\mathbb{C}_Y).$$

Le théorème de positivité 3.5–2 fournit pour toute hypersurface Y de X deux foncteurs $\mathrm{Irr}_Y, \mathrm{Irr}^*_Y$ faisceaux d'irrégularité le long de Y, l'un covariant l'autre contravariant :

$$\mathrm{Irr}_Y, \mathrm{Irr}^*_Y : \mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X) \longrightarrow \mathrm{Perv}(\mathbb{C}_Y).$$

P. 2) Les foncteurs complexes d'irrégularité commutent à l'image directe par un morphisme propre 3.6–6.

P. 3) Un complexe holonome $\mathscr{M}$ est régulier le long d'un espace analytique fermé Y si ses complexes d'irrégularité $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M}), \mathrm{Irr}^*_Y(\mathscr{M})$ sont nuls 4.2–3.

La catégorie $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X, Y)$ des modules holonomes réguliers le long d'une hypersurface Y est stable par sous-quotient 4.2–4.

La catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X, Y)$ des complexes holonomes réguliers le long d'une hypersurface Y est stable par cohomologie 4.2–4.

P. 4) Un complexe holonome $\mathscr{M}$ est régulier le long de tout espace analytique fermé si et seulement s'il est régulier le long de toute hypersurface 4.2–2. La catégorie des complexes holonomes réguliers $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ est définie comme la catégorie des complexes holonomes réguliers le long de toute hypersurface et la catégorie $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ des modules holonomes réguliers est définie comme la catégorie des modules holonomes réguliers le long de toute hypersurface.

La catégorie $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ des modules holonomes réguliers est stable par sous-quotient 4.2–4.

La catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ des complexes holonomes réguliers est stable par cohomologie 4.2–4.

P. 5) Le foncteur de la catégorie des connexions méromorphes le long d'une hypersurface génériquement régulières dans la catégorie des systèmes locaux qui associe à une connexion son système local des sections horizontales est pleinement fidèle 3.5–23.

8.3. Résultats de Régularité

R. 1) Le critère fondamental de la régularité : le faisceau d'irrégularité le long d'une hypersurface d'un module lisse en dehors de cette hypersurface est nul si et seulement s'il est nul en codimension 1 4.3–1.

R. 2) Le critère fondamental de la régularité entraîne le théorème de comparaison global de Grothendieck-Deligne 5.1–1, 5.2–1.

R. 3) Les catégories $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ sont stables par image inverse, par produit tensoriel interne et externe 6.1–1 et le foncteur image inverse des complexes holonomes réguliers est compatible par le foncteur solution holomorphe au foncteur image inverse des complexes constructibles.

R. 4) Un complexe holonome est régulier si et seulement si son image inverse sur toute courbe est un complexe holonome régulier 6.2–5.

Un complexe holonome est régulier si et seulement si son complexe d'irrégularité le long de tout point est nul 6.2–6.

R. 5) Les catégories $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$, $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ sont stables par dualité 7.1–1.

R. 6) Les foncteur de de Rham **DR** et le foncteur **S** de la catégorie des complexes holonomes réguliers $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ dans la catégorie des complexes constructibles $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ sont pleinement fidèles 7.3–3.

Remarque 8.3–1. — Attention prendre garde que la régularité le long d'une hypersurface fixe n'est pas stable par image inverse. Dans le même ordre d'idée le comportement par image inverse de l'irrégularité et de la régularité le long d'une hypersurface donnée n'est pas bien compris. Par exemple le comportement par un éclatement du faisceau d'irrégularité n'a pas été étudié à notre connaissance.

Problème 8.3–2. — Un problème intéressant est la détermination du faisceau d'irrégularité ou de son cycle caractéristique de l'image inverse d'une connexion méromorphe par une application à l'aide de la géométrie de l'application et du faisceau d'irrégularité de la connexion ou de son cycle caractéristique.

9. La catégorie des complexes holonomes réguliers : cas algébrique

Nous avons développé la théorie précédente par voie transcendante, mais la théorie garde un sens de façon purement algébrique à condition de tenir compte du diviseur à l'infini. Nous allons surtout indiquer quelles sont les différences avec le cas analytique.

Soient $X/\mathbb{C}$ une variété algébrique affine complexe non singulière, $\mathscr{M}$ un complexe holonome. Soit $j : X \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ une immersion de X dans un espace projectif et $j_*^d\mathscr{M}$ l'image directe au sens des $\mathscr{D}_X$-modules de $\mathscr{M}$, c'est donc un complexe holonome sur l'espace projectif. Soit Z une sous-variété localement fermée de $\mathbf{P}^N$. On note X^{an}, $\mathscr{M}^{\mathrm{an}}$ et Z^{an} les objets analytiques associés.

Définition 9.0–3. — On appelle complexe d'irrégularité de $\mathscr{M}$ le long de Z et on note $\mathrm{Irr}_Z(j_*^d\mathscr{M})$ le complexe $\mathrm{Irr}_{Z^{\mathrm{an}}}((j_*^d\mathscr{M})^{\mathrm{an}})$.

Par construction le complexe $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est algébriquement constructible.

Définition 9.0–4. — On dit que le complexe $\mathscr{M}$ est régulier le long de Z si le complexe $\mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M})$ est nul. On dit que le complexe $\mathscr{M}$ est régulier si son complexe d'irrégularité le long de toute sous-variété de $\mathbf{P}^N$ est nul.

Proposition 9.0–5. — *La condition pour le complexe $\mathscr{M}$ d'être régulier ne dépend pas de l'immersion j.*

Démonstration. — Soit $j' : X \hookrightarrow \mathbf{P}^{N'}$ une autre immersion. Notons f, f' les projections du produit $\mathbf{P}^N \times \mathbf{P}^{N'}$ sur le premier et le second facteur. Alors les complexes $\mathbf{R}\Gamma_{\overline{X}\times\overline{X'}}(f_d^* j_*^d\mathscr{M})$ et $\mathbf{R}\Gamma_{\overline{X}\times\overline{X'}}(f_d'^{*} j_*'^d\mathscr{M})$ sont canoniquement isomorphes à l'image directe de $\mathscr{M}$ par l'immersion diagonale de X dans $\mathbf{P}^N \times \mathbf{P}^{N'}$. Ceci entraîne l'isomorphisme :

$$j_*'^d\mathscr{M} \simeq f_*'^d\mathbf{R}\Gamma_{\overline{X}\times\overline{X'}}(f_d^* j_*^d\mathscr{M}).$$

Cet isomorphisme montre en vertu de la stabilité de la catégorie des complexes holonomes réguliers par image inverse, par cohomologie locale puis par image directe que si $j_*^d\mathscr{M}$ est régulier alors $j_*'^d\mathscr{M}$ est régulier.

Proposition 9.0–6. — *Si l'image directe de $\mathscr{M}$ par une une immersion $j : X \hookrightarrow X'$ dans une variété projective non singulière est régulier, alors $\mathscr{M}$ est régulier.*

Démonstration. — En effet pour un plongement projectif $X' \hookrightarrow \mathbf{P}^N$, l'image directe de $\mathscr{M}$ par le plongement composé est régulier.

Définition 9.0–7. — Sur une variété algébrique complexe non singulière on dit qu'un complexe holonome est régulier s'il est localement régulier.

On note $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ la catégorie des complexes holonomes réguliers.

Théorème 9.0–8. — *La catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ est stable par image directe par un morphisme quelconque de variétés algébriques.*

Démonstration. — Si le morphisme est propre c'est une conséquence de la commutation de l'image direct avec le complexe d'irrégularité. Cependant si le morphisme n'est pas propre l'image directe ne commute pas a priori avec le complexe d'irrégularité. Le cas crucial est celui d'une projection. Soit $f : X \times X' \to X'$ une projection de variétés algébriques non singulières et $\mathscr{M}$ un complexe holonome régulier sur la source. Comme la question est locale sur la base on peut supposer que X' est affine. La catégorie des complexes holonomes réguliers est triangulée par construction, on peut supposer que $\mathscr{M}$ est un module holonome régulier. L'image directe $f^d_*\mathscr{M}$ est isomorphe au complexe de de Rham relatif décalé

$$\mathbf{R}f_*\,\mathbf{DR}(\mathscr{M})[\dim X].$$

Notons $\mathscr{H}^i_f(\mathscr{M})$ le préfaisceau sur X à valeurs dans la catégorie des $\mathscr{D}_{X'}$-modules qui à un ouvert U de X associe $h^i(\mathbf{R}f_{U*}\,\mathbf{DR}(\mathscr{M}))$ où f_{U*} est la projection de $U \times X' \to X'$. Si $\mathscr{U}$ est un recouvrement affine de X le lemme 5.1–2 montre qu'il existe une suite spectrale

$$h^j(\mathscr{U}, \mathscr{H}^i_f(\mathscr{M})) \Longrightarrow h^{i+j}(\mathbf{R}f_*\,\mathbf{DR}(\mathscr{M}))$$

ce qui ramène à supposer que X est affine. Soit $X \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ et $X' \hookrightarrow \mathbf{P}^{n'}$ des plongements dans des espaces projectifs. La variété produit $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n'}$ est projective en vertu du plongement de Segré, ce qui montre que si $\mathscr{M}$ et régulier son image directe dans $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n'}$ est un module holonome régulier. Le théorème est alors conséquence de la commutation du complexe d'irrégularité avec un morphisme propre.

Corollaire 9.0–9. — *Pour tout morphisme $f : X \to X'$ le complexe dit de Gauss-Manin $f^d_*\mathscr{O}_X$ est régulier.*

Démonstration. — Si $j : U \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ est un plongement d'un ouvert affine, en vertu du critère fondamental de la régularité le complexe d'irrégularité $\mathrm{Irr}_Z(j^d_*\mathscr{O}_X)$ le long de toute variété Z de $\mathbf{P}^n$ est nul, autrement dit le faisceau structural est régulier. On est réduit au théorème précédent.

Remarque 9.0–10. — En particulier si la base est le plan complexe, on trouve que les singularités du complexe $f^d_*\mathscr{O}_X$ sont toutes régulières y compris à l'infini. C'est la démonstration la plus simple et la plus concise que nous connaissons qui, rappelons-le encore une fois, est indépendante de la résolution des singularités.

Théorème 9.0–11. — *La catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ est stable par image inverse par un morphisme quelconque de variétés algébriques.*

Démonstration. — Soit $f : X \to X'$ un morphisme de variétés algébriques complexes non singulières et $\mathscr{M}'$ un complexe holonome régulier sur la base. Il s'agit de voir que le complexe $f_d^*\mathscr{M}'$ est régulier. On peut supposer que $\mathscr{M}$ est un module holonome régulier. La question est locale sur la source X. Tout point de X admet un voisinage affine dont l'image par f est contenu dans un voisinage affine de son image. On peut supposer alors que X et X' sont affines. Alors si $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ et $X' \hookrightarrow \mathbb{A}^{n'}$ sont des plongements affines le morphisme f se prolonge en un morphisme $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n'}$ d'espaces affines. On peut supposer que $X' = \mathbb{A}^{n'}$ puis que $X' = \mathbf{P}^{n'}$. Si le complexe d'irrégularité de $\mathscr{M}'$ le long de toute sous-variété de la base $\mathbf{P}^{n'}$ est nul, alors le complexe d'irrégularité le long de toute sous variété du produit $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n'}$ de son image inverse par la projection $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n'} \to \mathbf{P}^{n'}$ est nul en vertu de la stabilité de la régularité par image inverse 6.1–1. Considérons alors le morphisme graphe $\mathbb{A}^n \to \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n'}$, il suffit de montrer que l'image directe par ce morphisme du complexe $F_d^*\mathscr{M}'$ est régulier puisque la variété produit $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n'}$ est projective. Mais cette image directe, qui est isomorphe à une localisation du complexe de cohomologie locale d'un module holonome régulier sur le produit $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n'}$, est un complexe holonome régulier.

En particulier si $f : C \to X$ est un morphisme d'une courbe complexe non singulière et $\mathscr{M}$ un complexe holonome régulier sur X le complexe $f_d^*\mathscr{M}$ n'a que des singularités régulières à distance finie comme à distance infini. Réciproquement :

Théorème 9.0–12. — *Soit $\mathscr{M}$ un complexe holonome sur X tel que le complexe $f_d^*\mathscr{M}$ est régulier pour tout morphisme f d'une courbe C dans X. Alors le complexe $\mathscr{M}$ est régulier.*

Démonstration. — La question est locale sur X, on peut supposer que X est affine. Soit $X \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ un plongement dans un espace projectif. Le morphisme f se prolonge de façon unique en un morphisme de la compactification canonique $\overline{C}$ sur $\mathbf{P}^n$. Comme l'image directe par une immersion commute à l'image inverse, on est ramené au cas de l'espace projectif. Comme la question est locale on est ramené au cas des singularités à distance finie, autrement si l'image inverse d'un complexe sur l'espace affine par un morphisme d'une courbe n'a que des singularités régulières à distance finie, ce complexe n'a que des singularités régulières à distance finie. Dans cette situation le dévissage de nature locale est le même que dans la cas analytique 6.2–5.

La notion de complexe holonome sur une courbe non singulière est une notion purement algébrique et garde un sens sur un corps de caractéristique nulle. On peut donc définir la catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_{X/k})$ des complexes holonomes réguliers comme ceux dont l'image inverse par un morphisme d'une courbe dans X n'ont que des singularités régulières à distances finie et infinie. La catégorie ainsi obtenue est stable par images inverses par construction. Cependant, pour avoir les autres propriétés de la catégorie transcendante, il faut invoquer le critère fondamental de la régularité qui a un sens purement algébrique mais dont la démonstration est de nature transcendante.

Définition 9.0–13. — Soient un morphisme $f : X \to X'$ de variétés algébriques non singulières sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et $\mathscr{M}$ un complexe holonome. On définit le complexe image directe à support propre :

$$f_!^d \mathscr{M} := (f_*^d(\mathscr{M}^*))^*.$$

Théorème 9.0–14. — *La catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ est stable par image directe à support propre $f_!^d$ par un morphisme quelconque de variétés algébriques.*

Démonstration. — En effet les catégories $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ sont stables par dualité et par image directe.

Soient un morphisme $f : X \to X'$ de variétés algébriques complexes non singulières et $\mathscr{M}$ un complexe holonome. Notons par *an* en exposant les objets analytiques associés. On alors le morphisme de comparaison :

$$(f_*^d \mathscr{M})^{\mathrm{an}} \longrightarrow f_*^{\mathrm{an}\,d} \mathscr{M}^{\mathrm{an}}.$$

Le morphisme de comparaison n'est pas un isomorphisme si f n'est pas propre même pour les modules holonomes réguliers comme on le voit dans le cas d'une immersion ouverte. Cependant :

Proposition 9.0–15. — *Si X est affine et $\mathscr{M}$ est régulier le morphisme de comparaison induit un isomorphisme entre les complexes de de Rham :*

$$\mathbf{DR}((f_*^d \mathscr{M})^{\mathrm{an}}) \simeq \mathbf{DR}(f_*^{\mathrm{an}\,d} \mathscr{M}^{\mathrm{an}}).$$

Démonstration. — En factorisant le morphisme f par une immersion fermée suivie d'une projection on est ramené au cas crucial d'une projection $f : X \times X' \to X'$. L'hypothèse de régularité permet de remplacer la variété affine par un espace projectif. On est alors réduit au cas d'un morphisme propre.

Exercice 9.0–16. — Étendre la proposition précédente au cas d'un morphisme $f : X \to X'$ de variétés algébriques complexes non singulières.

Le théorème de comparaison est alors :

Théorème 9.0–17. — *Soient deux complexes holonomes $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ on a alors un morphisme canonique de comparaison*

$$\mathbf{R}\operatorname{hom}_{\mathscr{D}_X}(X; \mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \longrightarrow \mathbf{R}\operatorname{hom}_{\mathscr{D}_X^{\mathrm{an}}}(X^{\mathrm{an}}; \mathscr{M}_1^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}_2^{\mathrm{an}})$$

qui est un isomorphisme si les complexes $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ sont réguliers.

Démonstration. — Soit $\mathscr{M}$ un complexe borné de $\mathscr{D}_X$-modules et $\mathscr{I}$ une résolution $\mathscr{D}_X$-injective. Alors le complexe de de Rham se représente par le complexe à composantes flasques :

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}) := \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X, \mathscr{M}) \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X, I).$$

Si on note $\varepsilon : X^{\mathrm{an}} \to X$ le morphisme GaGa d'espaces annelés on trouve les morphismes globaux canoniques

$$\begin{aligned}\hom_{\mathscr{D}_X}(X; \mathscr{O}_X, \mathscr{I}) \longrightarrow \varepsilon^{-1} \hom_{\mathscr{D}_X}(X; \mathscr{O}_X, \mathscr{I}) \longrightarrow \hom_{\mathscr{D}_X^{\mathrm{an}}}(X^{\mathrm{an}}; \mathscr{O}_X^{\mathrm{an}}, \mathscr{I}^{\mathrm{an}})\\ \longrightarrow \mathbf{R}\hom_{\mathscr{D}_X^{\mathrm{an}}}(X^{\mathrm{an}}; \mathscr{O}_X^{\mathrm{an}}, \mathscr{I}^{\mathrm{an}}) \simeq \mathbf{R}\hom_{\mathscr{D}_X^{\mathrm{an}}}(X^{\mathrm{an}}; \mathscr{O}_X^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}^{\mathrm{an}}).\end{aligned}$$

En considérant l'isomorphisme canonique :

$$\mathbf{R}\hom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \simeq \mathbf{R}\hom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X; \mathscr{M}_1^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_2)$$

et son analogue analytique, on trouve le morphisme de comparaison du théorème.

Pour montrer que c'est un isomorphisme dans le cas régulier, le lemme 5.1–2 permet de supposer que X est affine puis que X est l'espace projectif par régularité comme dans la démonstration du théorème 5.2–1. On est réduit à appliquer GaGa pour les limites inductives de faisceaux algébriques cohérents.

10. Le Théorème d'Existence de type de Riemann

10.1. Introduction. — Commençons par expliquer le titre de ce chapitre.

10.1.1. B. Riemann a démontré que tout revêtement topologique fini d'une courbe algébrique complexe non singulière est algébrique. Plus exactement Riemann (1826-1866) a énoncé ce théorème, comme c'est souvent le cas chez Riemann, dont la démonstration a été complétée par D. Hilbert.

10.1.2. Ce théorème a été généralisé par Grauert-Remmert (1958) aux variétés algébriques complexes non singulières.

10.1.3. Un revêtement fini donne naissance par image directe à un système local de vectoriels complexes de dimension finie. Les systèmes locaux qu'on obtient de la sorte forment une classe de systèmes à monodromie finie, en ce sens que l'image de la représentation associée du groupe fondamental topologique est finie en supposant la variété connexe pour simplifier. Le théorème d'existence de Grauert-Remmert peut se formuler en disant que tout système local de vectoriels complexes de dimension finie de cette classe s'obtient de façon essentiellement unique comme système local des sections horizontales d'un fibré algébrique à connexion intégrable régulier. En fait dans cette situation le fibré en question n'est rien d'autre que l'image directe du fibré trivial sur le revêtement algébrique muni de la connexion dite aujourd'hui de Gauss-Manin.

10.1.4. Dans les démonstrations précédentes on considère une compactification qui existe toujours pour les variétés algébriques et la difficulté principale en dimension $\geqslant 2$ est qu'en général les compactifications naturelles sont singulières à l'infini.

10.1.5. A. Grothendieck a redémontré dans ([**SGA1**], appendice) le théorème de Grauert-Remmert comme conséquence facile du théorème d'Hironaka. Grothendieck était motivé par le théorème de comparaison entre la cohomologie étale d'une variété algébrique complexe à valeurs dans un anneau de torsion et sa cohomologie transcendante à valeurs dans ce même anneau. Cette démonstration a été reprise par M. Artin dans [**SGA4**].

10.1.6. Le théorème d'existence de Riemann garde un sens pour les systèmes locaux sur une variété algébrique complexe non singulière et Riemann avait déjà considéré le cas de certains systèmes locaux de rang 2 sur le complémentaire de trois points de la droite projective et avait montré que ce sont les systèmes locaux provenant des équations hypergéométriques de Gauss.

10.1.7. Cela a amené Hilbert à poser en 1900 comme 21-ème problème de réaliser un système local sur un ouvert algébrique de la droite projective comme système des sections horizontales d'un fibré algébrique à connexion et n'ayant que des singularités régulières aux points à l'infini.

10.1.8. Ce problème a été résolu par Plemelj (1908) et G. Birkhoff (1913). La difficulté pour ces auteurs, qui ne disposaient pas des outils d'aujourd'hui, est de tout faire à la main, ce qui a encore un grand intérêt.

10.1.9. De plus Plemelj et Birkhoff montrent que si une des matrices de la monodromie locale en un point est diagonalisable, on peut trouver une base globale dans laquelle la matrice de la connexion n'a que des pôles simples. Mais Bolibruch a montré (1989) que ce n'est pas le cas général si le rang est $\geqslant 3$ mettant fin à une grande confusion. Mais ce problème de nature globale, dont l'histoire mouvementée est très intéressante, est secondaire pour les questions de nature locale qui nous concernent ici bien qu'il garde un sens en dimensions supérieures et est clairement difficile.

10.1.10. Le théorème d'existence de Riemann a été étendu au cas des systèmes locaux sur les variétés algébriques par Deligne (1970) comme conséquence facile du théorème d'Hironaka. Le théorème d'Hironaka réduit la question pour l'essentiel au cas d'une variable. De même Deligne était motivé par le théorème de comparaison entre la cohomologie de de Rham d'une variété algébrique complexe non singulière à valeurs dans un fibré à connexion intégrable régulier à l'infini et sa cohomologie transcendante à valeurs dans le système local de ses sections horizontales, problème posé par Grothendieck dans ([**G2**], note 13). Le cas des revêtements apparaît comme cas particulier du cas des systèmes locaux.

10.1.11. À partir de là une fois le formalisme des complexes constructibles et des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes assimilé dans la première moitié des années 1970, on est passé au théorème d'existence de type de Riemann pour les coefficients constructibles dans les années 1976-77-78, avec le tournant décisif qu'un faisceau constructible provient en général d'un complexe et a nécessité l'introduction dans le sujet de la catégorie dérivée, qui peut être considéré comme une avancée majeure. En fait ce théorème est un succès particulièrement éclatant de la théorie des catégories triangulées et des catégories dérivées qui ne lui été pas destiné a priori. Ceci a eu de nombreuses répercutions profondes dans les domaines les plus divers et a fait couler beaucoup d'encre. Dans l'autre sens il nous a fait mieux comprendre la structure intrinsèque des catégories triangulées et des catégorie dérivées. La théorie ℓ-adique montrait la démarche à suivre si l'on remplace la topologie étale par la résolution des singularités. Ce qui est intéressant dans cette étape est le résultat et non la démonstration. En fait les motivations dans le contexte des complexes constructibles sont indépendantes du cas des systèmes locaux. À cette occasion les conceptions très originales de Grothendieck ont pris une autre dimension dans un domaine des mathématiques qui peut-être considéré comme classique car il est évident que ni Riemann ni Hilbert ne pouvaient imaginer un tel résultat.

10.1.12. Grothendieck est parvenu à l'idée de la catégorie dérivée en formulant le théorème de dualité cohérente pour un morphisme. Le formalisme de dualité se transpose de façon particulièrement naturelle au cas de la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules cohérents : M. Z. Théorème de Dualité pour les $\mathscr{D}_X$-modules cohérents, C.R. Acad. Sci. Paris 285 (1977), 785-787. Ce théorème apparaît comme une généralisation commune de la dualité discrète de type de Poincaré et de la dualité continue de type de Serre. Cependant pour que cette généralisation soit vraiment féconde il faut savoir remonter les coefficients discrets constructibles aux coefficients continus $\mathscr{D}_X$-cohérents. C'est la principale motivation de l'équivalence de catégories triangulées précédentes. Ramener les problèmes pour les coefficients discrets constructibles aux problèmes pour les coefficients continus qui gardent un sens dans de nombreux contextes est l'idée fondatrice de la théorie des $\mathscr{D}_X$-modules et explique son succès dans toutes sortes de théories.

10.1.13. Dans ce chapitre nous allons montrer les théorèmes d'existence de type de Riemann en construisant des *réseaux canoniques explicites à partir des systèmes locaux* de vectoriels complexes. Nous allons voir que pour ce type de questions les singularités les plus difficiles à résoudre n'interviennent pas, il est donc inutile de les résoudre.

10.1.14. Nous avons développé dans les chapitres précédents le principe qui dans le cas des connexions méromorphes régulières exprime que les singularités en *codimension* 2 sont inessentielles pour la pleine fidélité du foncteur de de Rham.

10.1.15. Nous allons développer dans ce chapitre le principe selon lequel les singularités en *codimension* 3 sont inessentielles pour l'essentielle surjectivité du foncteur de de Rham.

10.1.16. Outre le théorème de comparaison du chapitre précédent nous utilisons le théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents et le théorème de résolution des surfaces.

10.1.17. L'intérêt de cette méthode, outre qu'elle est explicite et élémentaire, est qu'elle se transpose pour construire des réseaux canoniques dans des situations de singularités irrégulières et aussi dans les situations où on ne dispose pas du théorème de la résolution des singularités en dimension supérieure comme par exemple le cas d'un corps local d'égales caractéristiques $p > 0$. Elle nous montre aussi que le cas de la dimension 2 est crucial pour l'étude des équations différentielles en toutes dimensions. Dans cette étape ce qui est intéressant c'est la démonstration et non le résultat. Si l'on met les deux étapes ensembles on trouve une résultat intéressant avec une démonstration intéressante.

10.1.18. Ce point de vue a été introduit en 1986 dans [**M1**] qui à son tour a eu des répercussions profondes. Le lecteur pourra constater combien cette approche est plus précise que les précédentes, les résolutions des singularités des courbes et des surfaces permettent seulement de montrer que les réseaux canoniques définis en dehors des singularités sont prolongeables et donc définissent des réseaux canoniques partout définis en vertu du théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents.

10.2. Le Théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents

Nous allons d'abord rappeler les propriétés de la profondeur des faisceaux analytiques cohérents pour énoncer le théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à l'exposé III de [**SGA2**].

Soient X un espace analytique complexe, Z un sous-espace analytique fermé de X, $\mathscr{F}_U$ un faisceau analytique cohérent sur le complémentaire U de Z dans X et $i : U \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique. Naturellement l'image directe par une immersion ouverte d'un faisceau analytique cohérent n'est pas analytique cohérent en général.

Les théorèmes de prolongement fournissent des conditions suffisantes pour que l'image directe $i_*\mathscr{F}_U$ soit un faisceau cohérent sur X. Ces types de théorèmes proviennent de la géométrie algébrique où ils sont beaucoup plus élémentaires [**SGA2**]. Le théorème de Serre traite le cas où Z est de codimension 2 dans X et le théorème de Trautmann-Frisch-Guenot-Siu traite le cas où Z est de codimension 3 dans X.

Définition 10.2–1. — Soient A un anneau commutatif unitaire, I un idéal de A et M un A-module. On dit qu'une suite $f_1, \ldots, f_q$ d'éléments de I est une suite M-régulière de longueur $q \geqslant 1$ si l'action de f_1 sur M est injective et si l'action de f_i sur le quotient $M/(f_1, \ldots, f_{i-1})M$ est injective pour $2 \leqslant i \leqslant q$.

Définition 10.2–2. — On appelle profondeur en un point x de X d'un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ non nul en x la longueur maximale $\mathrm{prof}_x(\mathscr{F})$ des suites $\mathscr{F}_x$-régulières de l'idéal maximum de l'anneau local $\mathscr{O}_x$. Plus généralement on appelle profondeur en un point x de X d'un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ non nul en x le long d'un sous-espace analytique fermé Y la longueur maximale $\mathrm{prof}_{Y_x}(\mathscr{F})$ des suites $\mathscr{F}_x$-régulières de l'idéal de Y de l'anneau local $\mathscr{O}_x$. On convient que la profondeur d'un faisceau cohérent nul en x est l'infini.

Si X est un-sous espace fermé d'un espace numérique $\mathbb{C}^N$ au voisinage de x alors la profondeur $\mathrm{prof}_x(\mathscr{F})$ est aussi égale à la profondeur en x de $\mathscr{F}$ vu comme faisceau cohérent sur l'espace numérique. D'autre part on a :

$$\mathrm{prof}_x(\mathscr{F}) + \mathrm{dp}(\mathscr{F}_x) = N$$

où $\mathrm{dp}(\mathscr{F}_x)$ est la dimension projective de $\mathscr{F}_x$ comme module sur l'anneau local de l'espace numérique. En particulier la profondeur d'un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ non nul en x est bornée par la dimension de plongement dans un espace lisse.

Exemple 10.2–3. — Sur un espace lisse X la profondeur d'un module localement libre de type fini est maximum et égale à la dimension de X.

Définition 10.2–4. — Soit $m \geqslant 0$ un entier, on note $S_m(\mathscr{F})$ l'ensemble des points de X où la profondeur d'un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ est $\leqslant m$.

Les ensembles $S_m(\mathscr{F})$ constituent une filtration des singularités du faisceau $\mathscr{F}$. Par exemple sur un espace lisse X de dimension n le faisceau $\mathscr{F}$ est libre en dehors de l'ensemble $S_{n-1}(\mathscr{F})$ et $S_0(\mathscr{F})$ est un ensemble discret où le faisceau $\mathscr{F}$ est le plus singulier. Nous allons démontrer le théorème :

Théorème 10.2–5. — *Pour un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur un espace analytique X les ensembles $S_m(\mathscr{F})$ sont des fermés analytiques de dimension bornée par m pour tout $m \geqslant 0$.*

Démonstration. — La question est locale. On peut supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Une résolution libre locale finie d'un faisceau cohérent montre que la dimension projective est une fonction semi-continue supérieurement et donc la profondeur est une fonction semi-continue inférieurement, en particulier les ensembles $S_m(\mathscr{F})$ sont fermés.

Exercice 10.2–6. — Soit $\mathscr{O}_x^q \xrightarrow{A} \mathscr{O}_x^p$ un morphisme entre $\mathscr{O}_x$-modules libres de rang fini. Montrer que le conoyau de ce morphisme est libre si et seulement si le rang de la matrice A sur le corps des fractions de l'anneau local $\mathscr{O}_x$ est égal au rang de la réduction modulo l'idéal maximal $\overline{A}$.

Soit $\mathscr{O}_X^q \xrightarrow{A} \mathscr{O}_X^p \to \mathscr{F} \to 0$ une représentation locale d'un faisceau cohérent. Remarquons que le rang de A sur le corps des fractions des anneaux locaux est une fonction localement constante, soit r ce rang sur un petit ouvert connexe. En vertu de l'exercice précédent l'ensemble des points $S_{n-1}(\mathscr{F})$ où le faisceau cohérent $\mathscr{F}$ n'est pas localement libre est fourni par l'annulation des mineurs d'ordre r de la matrice A. Ceci montre que $S_{n-1}(\mathscr{F})$ est un fermé analytique. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{O}_X^p \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

montre que $S_{m-1}(\mathscr{F})$ est égal à $S_m(\mathscr{K})$, ce qui montre par récurrence descendante que les fermés $S_m(\mathscr{F})$ sont analytiques.

Montrons la majoration $\dim S_m(\mathscr{F}) \leqslant m$. Voyons que $S_0(\mathscr{F})$ est un ensemble discret. Soit un point x de $S_0(\mathscr{F})$ et considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_x(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 0$$

qui est une suite exacte de faisceaux cohérents. Si on montre que $\operatorname{prof}_x(\mathscr{G})$ est $\geqslant 1$ en vertu de la semi-continuité inférieure de la profondeur on aura $\dim S_0(\mathscr{F}) \leqslant 0$. Si $\operatorname{prof}_x(\mathscr{G})$ est nulle alors tout élément de l'idéal maximal est un diviseur de zéro de $\mathscr{G}_x$.

Exercice 10.2–7. — Montrer que si l'idéal maximal $\mathscr{M}_x$ de l'anneau local $\mathscr{O}_x$ en x est formé de diviseurs de zéro de $\mathscr{G}_x$ alors $\mathscr{M}_x$ est un idéal associé autrement dit il existe une section locale non nulle de $\mathscr{G}_x$ dont l'annulateur est l'idéal maximal.

En vertu de l'exercice précédent l'espace $\Gamma_x(\mathscr{G})$ serait non nul, ce qui entraîne nécessairement que $\operatorname{prof}_x(\mathscr{G}) \geqslant 1$ et donc que $\dim S_0(\mathscr{F}) \leqslant 0$.

Soit $m \geqslant 1$ et supposons que $\dim S_k(\mathscr{F}) \leqslant k$ pour tout $k < m$ et pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$. Soit x un point de $S_m(\mathscr{F})$ que nous supposons ne pas appartenir à $S_0(\mathscr{F})$ ce qui est loisible. Alors il existe une fonction f s'annulant en x mais qui n'est pas diviseur de zéro de $\mathscr{F}_x$. Sur un voisinage de x l'action de f sur $\mathscr{F}$ est injective et nous pouvons considérer le quotient $\mathscr{F}/f\mathscr{F}$. Si Y est l'hypersurface des zéros de f, on a d'une part que $\dim(Y \cap S_m(\mathscr{F})) \geqslant \dim S_m(\mathscr{F}) - 1$ et d'autre part $S_m(\mathscr{F}) \cap Y \subset S_{m-1}(\mathscr{F}/f\mathscr{F})$. L'hypothèse de récurrence permet de conclure à l'inégalité $\dim S_m(\mathscr{F}) \leqslant m$.

Remarque 10.2–8. — Les inégalités $\dim S_m(\mathscr{F}) \leqslant m$ sont analogues aux conditions de support d'un complexe constructible.

Théorème 10.2–9. — *Soient un Y un sous-espace analytique fermé de X et $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X et $q \geqslant 0$ un entier positif. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\operatorname{prof}_Y(\mathscr{F}) \geqslant q+1$,
2) *on a les inégalités* $\dim Y \cap S_{m+q+1}(\mathscr{F}) \leqslant m$ *pour tout* m,
3) *les faisceaux de cohomologies locales* $\mathscr{H}^i_Y(\mathscr{F})$ *sont nuls pour* $i \leqslant q$.

Démonstration. — 1) $\Rightarrow$ 2). Par définition de la profondeur le long de Y, il existe une suite $\mathscr{F}$-régulière $f_1, \ldots, f_{q+1}$ de longueur $q+1$ de l'idéal de Y. On a alors localement l'égalité

$$Y \cap S_{m+q+1}(\mathscr{F}) = Y \cap S_m\left(\mathscr{F}/(f_1, \ldots, f_{q+1})\mathscr{F}\right)$$

et donc $\dim(Y \cap S_{m+q+1}(\mathscr{F})) \leqslant m$ pour tout m.

Exercice 10.2–10. — Montrer que si $\dim Y = d$ et $\operatorname{prof}(\mathscr{F}) \geqslant d+q$ alors les faisceaux $\mathscr{H}^i_Y(\mathscr{F})$ sont nuls pour $i < q$.

2) $\Rightarrow$ 3). On raisonne par récurrence sur $\dim Y$. Si $\dim Y = 0$ on trouve que $S_q(\mathscr{F})$ est vide et donc que $\mathrm{prof}(\mathscr{F}) \geqslant q+1$ et en vertu de l'exercice précédent les faisceaux $\mathscr{H}^i_Y(\mathscr{F})$ sont nuls pour $i \leqslant q$.
Soit un sous-espace Y de dimension $d > 0$ et $Y' := Y \cap S_{d+q}(\mathscr{F})$, alors $\dim Y' \leqslant d-1$. Sur $Y'' := Y - Y'$ on a $\mathrm{prof}(\mathscr{F}) \geqslant d+q+1$ et en vertu de l'exercice précédent $\mathscr{H}^i_{Y''}(\mathscr{F})$ sont nuls pour $i \leqslant q$. L'hypothèse de récurrence appliquée à Y' et la suite exacte

$$\longrightarrow \mathscr{H}^i_{Y'}(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{H}^i_Y(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{H}^i_{Y''}(\mathscr{F}) \longrightarrow$$

permettent de conclure.

3) $\Rightarrow$ 1). Nous raisonnons par récurrence sur q. Si $q = 0$ et $\mathscr{H}^0_{Y'}(\mathscr{F}) = 0$ alors la profondeur $\mathrm{prof}_{Y,x}(\mathscr{F}) \geqslant 1$. Si $q \geqslant 1$, il existe une fonction s'annulant sur Y qui n'est pas diviseur de zéro de $\mathscr{F}$. La suite exacte $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}/f \to 0$ donne naissance à la suite longue

$$\longrightarrow \mathscr{H}^i_Y(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{H}^i_Y(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{H}^i_Y(\mathscr{F}/f) \longrightarrow$$

et l'hypothèse de récurrence montre que $\mathrm{prof}_{Y,x}(\mathscr{F}/f) \geqslant q$, donc $\mathrm{prof}_{Y,x}(\mathscr{F}) \geqslant q+1$.

Proposition 10.2–11. — *Soient Y un sous-espace analytique fermé de X, $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X et $q \geqslant 0$ un entier positif. Le faisceau $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Y, \mathscr{F})$ est nul pour $i \leqslant q$ si et seulement s'il existe une suite $\mathscr{F}$-régulière de l'idéal de Y de longueur $q+1$, et donc* $\mathrm{prof}_Y(\mathscr{F}) \geqslant q+1$.

Démonstration. — La question est locale. On raisonne par récurrence sur q. Rappelons que les assassins de $\mathscr{F}$ sont les fermés irréductibles qui contiennent les supports de sections locales de $\mathscr{F}$ [**SGA2**]. La réunion des idéaux des assassins de $\mathscr{F}$ est formée des éléments de $\mathscr{O}_X$ qui ne sont pas $\mathscr{F}$-réguliers. Si le faisceau $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Y, \mathscr{F})$ est nul alors l'idéal de Y contient un élément $\mathscr{F}$-régulier. D'où la proposition pour $q = 0$. Si $q > 0$ il existe fonction f qui est $\mathscr{F}$-régulière. La suite longue de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}/f \longrightarrow 0$$

et l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

Corollaire 10.2–12. — *Soit un faisceau $\mathscr{F}$ cohérent sur $X - Y$ tel que son image directe $i_*\mathscr{F}$ par l'inclusion canonique est cohérente sur X, alors* $\dim Y \cap S_{m+2}(i_*\mathscr{F}) \leqslant m$.

Démonstration. — En effet les faisceaux $\mathscr{H}^i_Y(i_*\mathscr{F})$ sont nuls pour $i \leqslant 1$, et on applique le théorème précédent pour $q = 1$ et au faisceau cohérent $i_*\mathscr{F}$.

En particulier supposons que X est lisse et que $\mathscr{F}$ est lisse sur $X - Y$, alors si $i_*\mathscr{F}$ est cohérent il est lisse en dehors d'un fermé de codimension au moins 3.

Corollaire 10.2–13. — *Un espace X est normal si et seulement si les faisceaux*

$$\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_{\mathrm{sing}(X)}, \mathscr{O}_X)$$

sont nuls pour $i \leqslant 1$ et donc si et seulement si sa profondeur le long de son lieu singulier est au moins égale à 2.

Démonstration. — En effet X est normal si et seulement si $\mathscr{O}_X \simeq i_* i^{-1}\mathscr{O}_X$ autrement dit si $\Gamma_{\operatorname{sing}(X)}(\mathscr{O}_X) = \mathscr{H}^1_{\operatorname{sing}(X)}(\mathscr{O}_X) = 0$. On conclut à l'aide de la proposition et du théorème précédent.

Le théorème de prolongement des faisceaux cohérents que nous utilisons est le suivant :

Théorème 10.2–14. — *Soit un faisceau cohérent $\mathscr{F}_U$ sur un ouvert U d'un espace analytique X complémentaire d'un fermé analytique Y de dimension borné par p, tel que $\dim S_k(\mathscr{F}_U) \leqslant k-2$ pour tout $k \leqslant p+2$, alors l'image directe par l'inclusion canonique $i_*\mathscr{F}_U$ est cohérente sur X.*

Il n'est malheureusement pas possible de donner ici une démonstration de ce théorème dû à Trautmann-Frisch-Guenot-Siu et qui date des années 1960. Cela nous aurait pris encore plus de temps et nous avons déjà consacré énormément de temps à la rédaction de ce cours. Le lecteur trouvera un rapport sur ce théorème dans l'exposé 336 du séminaire Bourbaki par A. Douady fait en 1969. Comme nous l'avons dit dans l'introduction une démonstration courte de ce théorème actualisée est très souhaitable et a certainement sa place dans une école comme celle là.

Exemple 10.2–15. — Soient Y un sous-espace analytique fermé d'un espace X et $\mathscr{F}_U$ un $\mathscr{O}_U$-module localement libre de rang fini sur $U := X - Y$. Supposons que U est connexe et lisse et que la codimension de Y dans X est au moins égale à 3, alors l'image directe $i_*\mathscr{F}$ par l'inclusion canonique $i : U \hookrightarrow X$ est cohérent sur X. En effet $S_k(\mathscr{F}_U)$ est vide pour tout $k \leqslant \dim Y + 2$.

On ne peut pas appliquer directement le théorème de prolongement dans la cas de codimension 2. Cependant dans ce cas on a le résultat fondamental :

Corollaire 10.2–16. — *Soient $Z \subset Y$ un couple d'espaces analytiques fermés d'un espace X où Y est de codimension 2 et $\mathscr{F}_U$ un $\mathscr{O}_U$-module localement libre de rang fini sur $U := X - Y$. Supposons que U est connexe lisse, que la codimension de Z dans X est au moins égale à 3 et que l'image directe $j_*\mathscr{F}_U$ par l'inclusion j de U dans $X - Z$ est cohérente, alors l'image directe $i_*\mathscr{F}_U$ par l'inclusion canonique $i : U \hookrightarrow X$ est cohérente sur X.*

Démonstration. — En effet le faisceau $\mathscr{H}^k_{Y-Z}(j_*\mathscr{F}_U) = 0$, $k \leqslant 1$, en vertu du théorème 10.2–9 $\dim S_k(\mathscr{F}) \leqslant k-2$ pour $k \leqslant \dim Z + 2$. On est dans les conditions d'application du théorème de prolongement, l'image directe de $j_*\mathscr{F}_U$ par l'inclusion canonique $X - Z \hookrightarrow X$ qui est $i_*\mathscr{F}_U$ est cohérente.

Ce corollaire ramène la construction des réseaux à ignorer les ensembles de codimension au moins 3 et donc les singularités les plus difficiles à résoudre n'interviennent pas.

Pour construire les réseaux en dehors des sous-ensembles analytiques de codimension au moins 3 on utilise le critère suivant dû à Serre :

Théorème 10.2–17. — *Soient un espace analytique normal X, un sous-ensemble Y analytique de codimension 2 et $\mathscr{F}_U$ un faisceau cohérent sur $U := X - Y$ sans torsion. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *l'image directe $i_*\mathscr{F}_U$ par l'inclusion canonique $U \hookrightarrow X$ est cohérente ;*

2) *il existe un prolongement cohérent sur X de $\mathscr{F}_U$;*

3) *tout point de Y a un voisinage V tel que la fibre de $\mathscr{F}_U$ en tout point de $V - Y$ est engendrée par les sections globales au-dessus de $V - Y$.*

La démonstration de ce critère est nettement plus simple que la démonstration du théorème de prolongement.

Nous allons montrer comment les théorèmes d'extension précédents permettent de montrer le théorème d'existence de type de Riemann indépendamment du théorème général de la résolution des singularités en construisant des réseaux canoniques. On est ramené à montrer que certains fibrés définis en dehors d'ensembles de codimension 2 sont prolongeables en dehors d'ensembles de codimension 3. Cela nécessite que la résolution des singularités plongée des courbes planes et la résolution des singularités des surfaces.

10.3. Le théorème d'existence de type de Riemann pour les modules lisses à connexion. — Soient X une variété analytique complexe équidimensionnelle, Y une hypersurface éventuellement singulière et $j : U := X - Y \hookrightarrow X$.

Rappelons que l'on dit qu'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ est une connexion méromorphe le long de Y s'il est lisse au-dessus de U, c'est-à-dire si $\mathscr{M}_U$ est fibré de rang fini à connexion intégrable, et s'il est isomorphe à son localisé le long de Y :

$$\mathscr{M} \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}(*Y).$$

Il revient au même de dire que $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{O}_X(*Y)$-module cohérent muni d'une action de $\mathscr{D}_X$. Une connexion méromorphe le long de Y est automatiquement un $\mathscr{D}_X$-module holonome [**M-T**].

Définition 10.3–1. — On appelle réseau d'une connexion méromorphe $\mathscr{M}$ le long de Y, un $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$ tel que

$$\mathscr{O}_X(*Y) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F} \simeq \mathscr{M}.$$

Une connexion méromorphe admet toujours localement des réseaux. Nous allons montrer que toute connexion méromorphe régulière admet des réseaux globaux.

Le faisceau $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})$ d'irrégularité de $\mathscr{M}$ le long de Y est alors défini. Rappelons qu'on dit que la connexion méromorphe $\mathscr{M}$ est régulière le long de Y si son faisceau $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})$ est nul. En vertu du critère fondamental 4.3–1 de la régularité il faut et il suffit que $\mathscr{M}$ soit génériquement régulière, c'est-à-dire que le support du faisceau $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})$ soit de codimension dans Y au moins 1, qui est le critère le plus explicite. Cela entraîne que $\mathscr{M}$ est génériquement régulière si et seulement si $\mathscr{M}$ est régulière le long de toute hypersurface, en fait le long de tout sous-espace analytique.

Nous notons $\mathrm{Mhr}(\mathscr{O}_X(*Y))$ la catégorie des connexions méromorphes régulières le long de Y. On a alors le foncteur exact

$$\mathrm{DR}_r \ : \ \mathrm{Mhr}(\mathscr{O}_X(*Y)) \longrightarrow \mathrm{Loc}(\mathbb{C}_U)$$

de la catégorie des connexions méromorphes régulières le long de Y dans la catégorie des systèmes locaux sur U de vectoriels complexes de dimension finie qui à $\mathscr{M}$ associe son système des sections horizontales $\mathrm{DR}_r(\mathscr{M}) := \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_U}(\mathscr{O}_U, \mathscr{M}_U)$.

Théorème 10.3–2. — *Le foncteur* DR_r *est une équivalence de catégories abéliennes.*

Démonstration. — Comme on l'a déjà vu, la pleine fidélité est un corollaire 3.5–23 du théorème de positivité 3.5–2 qui n'utilise pas le critère fondamental de la régularité. Rappelons que c'est une conséquence de la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1(*Y), \mathscr{M}_2(*Y)) \longrightarrow j_*j^{-1}\, \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1(*Y), \mathscr{M}_2(*Y)) \\ \longrightarrow h^0(\mathrm{Irr}_Y((\mathscr{M}_1(*Y))^* \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_2(*Y))) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

et de la nullité du faisceau ordinaire

$$h^0(\mathrm{Irr}_Y((\mathscr{M}_1(*Y))^* \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_2(*Y))$$

qui résulte du théorème de positivité.

Montrons que le foncteur est essentiellement surjectif. Rappelons que si $\mathscr{L}_U$ est un système local de vectoriels complexes de dimension finie sur le complémentaire d'une hypersurface lisse Y, pour toute section $\sigma : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ de la projection canonique le fibré plat $\mathscr{O}_U \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{L}_U$ se prolonge en un fibré $\mathscr{F}_X^\sigma$ à connexion logarithmique le long de Y.

Soient une hypersurface Y de lieu singulier $\mathrm{sing}(Y)$ et $\mathscr{L}_U$ est un système local de vectoriels complexes de dimension finie sur le complémentaire de Y. Appliquant ce qui précède au triplet $(X - \mathrm{sing}(Y), Y - \mathrm{sing}(Y), \mathscr{L}_U)$ on trouve un fibré à connexion logarithmique $\mathscr{F}_W^\sigma$ sur le complémentaire W de $\mathrm{sing}(Y)$.

Théorème 10.3–3. — *L'image directe* $i_*\mathscr{F}_W^\sigma$ *par l'inclusion canonique* $i : W \hookrightarrow X$ *est un faisceau analytique cohérent.*

Démonstration. — Remarquons que si $\operatorname{codim}_X \operatorname{sing}(Y) \geqslant 3$, les hypothèses du théorème de prolongement des faisceaux cohérents sont satisfaites d'où le théorème dans ce cas là sans avoir rien à éclater, ce qui est déjà significatif.

Supposons que $\operatorname{codim}_X \operatorname{sing}(Y) = 2$, en vertu du corollaire 10.2–16 il suffit de montrer que $\mathscr{F}_W^\sigma$ est prolongeable au voisinage de tout point dans le complémentaire d'un fermé analytique propre de $\operatorname{sing}(Y)$. On peut supposer alors qu'il existe un système de coordonnées locales $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tel que $\operatorname{sing}(Y)$ est défini par $x_1 = x_2 = 0$, d'où une rétraction locale $X \to \operatorname{sing}(Y)$, et Y apparaît comme une famille de courbes planes paramétrées par la base $\operatorname{sing}(Y)$. De plus on peut supposer, quitte à enlever un fermé analytique stricte de $\operatorname{sing}(Y)$, que $Y - \operatorname{sing}(Y)$ est une famille topologiquement triviale le long de $\operatorname{sing}(Y)$ en vertu de la généricité des conditions de Whitney.

Si $\operatorname{sing}(Y)$ est un point alors le théorème de résolution plongée d'un germe de courbe plane 4.3–2 et le théorème d'image directe par un morphisme projectif montre que le réseau $\mathscr{F}_W^\sigma$ est prolongeable et donc que $i_*\mathscr{F}_W^\sigma$ est analytique cohérent, en fait localement libre dans ce cas là.

Dans le cas général le procédé canonique de la résolution plongée d'une courbe plane ne va pas résoudre toute la famille simultanément, mais il résout l'hypersurface Y audessus d'un ouvert dont le complémentaire est un fermé analytique dont la trace sur le lieu singulier $\operatorname{sing}(Y)$ est un fermé stricte. Ceci est suffisant en vertu du corollaire 10.2–16.

Définissons une suite de couples (X_i, Y_i) en posant $(X_0, Y_0) := (X, Y)$ et en obtenant le couple (X_{i+1}, Y_{i+1}) en éclatant dans l'espace X_i le lieu singulier de l'hypersurface Y_i, l'hypersurface Y_{i+1} étant l'image inverse totale de Y_i. Le théorème de résolution générique d'une famille de courbe planes est :

Théorème 10.3–4. — *Il existe un ouvert de Zariski non vide V de Y dont le complémentaire a une trace stricte sur le lieu singulier* $\operatorname{sing}(Y)$ *et un entier N tels qu'au-dessus du complémentaire de ce fermé l'espace X_N est non singulier et l'hypersurface Y_N est localement un diviseur à croisement normaux relatif sur* $\operatorname{sing}(Y)$.

Autrement dit quitte à enlever un fermé analytique de Y qui ne contient pas $\operatorname{sing}(Y)$ on obtient une résolution plongée de l'hypersurface.

Démonstration. — Supposons d'abord que Y est irréductible, alors $Y - \operatorname{sing}(Y)$ est connexe. Considérons le morphisme induit par la projection $Y - \operatorname{sing}(Y) \to \operatorname{sing}(Y)$, la trivialité topologique montre que ses fibres sont connexes et donc les fibres du morphisme $Y \to \operatorname{sing}(Y)$ sont irréductibles.

Ceci montre dans le cas général que les composantes irréductibles des fibres du morphisme $Y \to \operatorname{sing}(Y)$ sont les fibres du morphisme induit sur les composantes irréductibles de Y.

Rappelons que le lemme de Sard assure que pour un morphisme surjectif de variétés analytiques complexes lisses le complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques contient un ouvert partout dense de la base.

On en déduit que, pour un morphisme surjectif d'espaces analytiques complexes de base lisse, il existe un ouvert dense de la base au-dessus duquel les singularités des fibres sont contenues dans les singularités de la source. En fait la deuxième suite fondamentale reliant les formes différentielles de la base, les formes différentielles de la source et les formes différentielles relatives montre qu'en fait la fibre du lieu singulier de la source coïncide avec le lieu singulier de la fibre au-dessus d'un ouvert partout dense de la base. Comme conséquence du lemme de Sard on trouve donc que :

Lemme 10.3–5. — *Pour un morphisme d'espaces analytiques complexes surjectif il existe un ouvert partout dense de la base au-dessus duquel le lieu critique du morphisme coïncide avec les singularités de la source.*

En appliquant le lemme précédent on trouve qu'au-dessus d'un ouvert partout dense de $\mathrm{sing}(Y)$ les singularités des fibres du morphisme $Y \to \mathrm{sing}(Y)$ sont dans $\mathrm{sing}(Y)$.

Lemme 10.3–6. — *Soient $f : Z \to T$ un morphisme d'espaces analytique complexes réduits dont la base est lisse et S un fermé de Z génériquement fini sur la base. Alors il existe un ouvert partout dense de la base au-dessus duquel l'éclatement de S commute au passage aux fibres.*

Démonstration. — En effet l'ouvert en question est simplement l'ouvert au-dessus duquel le morphisme $S \to T$est étale. Dans ce cas la fibre de l'éclatement au-dessus d'un point de S est le projectif associé au cône normal de S dans Z qui ne change pas par passage aux fibres.

On déduit des lemmes précédents qu'au-dessus d'un ouvert de $\mathrm{sing}(Y)$ partout dense le processus (X_i, Y_i) commute au passage aux fibres à chaque étape. En effet chaque étape fournit un ouvert partout dense de la base au-dessus duquel le procédé canonique commute aux fibres.

En vertu du théorème de Baire l'intersection de ces ouverts de la base est non vide. La fibre au-dessus d'un point de cette intersection est une résolution plongée de la fibre au-dessus de ce point.

Rappelons qu'au bout d'un nombre fini d'étapes le procédé canonique d'éclatement du lieu singulier d'un germe de courbe plane rend non singulier les transformées strictes des composantes irréductibles, puis au bout d'un nombre fini d'étape rend le transformé total de la courbe à croisements normaux.

Cela entraîne d'abord qu'au bout d'un nombre fini d'étapes les transformées strictes des composantes irréductibles de Y deviennent lisses au-dessus d'un ouvert dense de sing(Y) en vertu du lemme de Sard. Puis au bout d'un autre nombre fini d'éclatements, elles forment un diviseur à croisement normaux avec les diviseurs exceptionnels ayant au plus deux composantes locales. Cela montre que le procédé canonique de résolution plongée fournit une résolution plongée de l'hypersurface dans le complémentaire d'un fermé analytique dont la trace sur sing(Y) est un fermé analytique propre. D'où le théorème 10.3–4

Un diviseur à croisements normaux relatif est un diviseur à croisements normaux absolu, en particulier l'image inverse sur X_N du fibré $\mathscr{F}_W^\sigma$ défini a priori au-dessus de $X - \operatorname{sing}(Y)$ se prolonge en un fibré défini au-dessus du complémentaire dans X d'un ensemble analytique de codimension au moins trois. Son image directe, qui est cohérente en vertu du théorème d'image directe par un morphisme projectif, est un prolongement de $\mathscr{F}_W^\sigma$ en dehors d'un ensemble de codimension au moins trois dans X. En vertu du corollaire 10.2–16 le faisceau $i_*\mathscr{F}_W^\sigma$ est *analytique cohérent*.

Proposition 10.3–7. — *Le morphisme de restriction*

$$\mathscr{O}_X(*Y)\otimes_{\mathscr{O}_X} i_*\mathscr{F}_W^\sigma \longrightarrow i_*i^{-1}\mathscr{O}_X(*Y)\otimes_{\mathscr{O}_X} i_*\mathscr{F}_W^\sigma$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La question est locale. Le faisceau $\mathscr{O}_X(*Y)$ est localement libre sur $\mathscr{O}_X$ et donc le morphisme de restriction est injectif. Soit $u(U)$ une section globale de l'espace

$$\Gamma(U;\mathscr{O}_X(*Y)\otimes_{\mathscr{O}_X} i_*\mathscr{F}_W^\sigma)$$

au-dessus d'un ouvert de W. Il existe un recouvrement U_j de U tel la restriction de $u(U)$ à U_j est un élément de l'espace

$$\Gamma(U_j;\mathscr{O}_X(*Y))\otimes_{\Gamma(U_j;\mathscr{O}_X)}\Gamma(U_j;\mathscr{F}_W^\sigma).$$

Ces restrictions donnent par recollement une suite de sections globales de $\Gamma(U;\mathscr{F}_W^\sigma)$ dont les restrictions locales sont presque toutes nulles. Donc par unicité du prolongement analytique cette suite est presque toute nulle et définit une section globale de $\mathscr{O}_X(*Y)\otimes_{\mathscr{O}_X} i_*\mathscr{F}_W^\sigma$ qui prolonge $u(U)$. Le morphisme de restriction est surjectif.

Remarque 10.3–8. — Prendre garde que le morphisme de restriction

$$\mathscr{O}_X(*Y)\otimes_{\mathscr{O}_X} R^1i_*\mathscr{F}_W^\sigma \longrightarrow R^1i_*i^{-1}\mathscr{O}_X(*Y)\otimes_{\mathscr{O}_X} i_*\mathscr{F}_W^\sigma$$

n'est pas un isomorphisme.

Définition 10.3–9. — On appelle réseau canonique associé au système local $\mathscr{L}_U$ et à la section σ, le faisceau analytique cohérent $i_*\mathscr{F}_W^\sigma$.

Corollaire 10.3–10. — *$i_*\mathscr{F}_W^\sigma(*Y)$ est une connexion méromorphe régulière qui admet le faisceau $i_*\mathscr{F}_W^\sigma$ comme réseau global.*

Démonstration. — En effet, sur W le localisé de la connexion logarithmique $\mathscr{F}_W^\sigma(*Y)$ est muni canoniquement d'une structure de $\mathscr{D}_W$-module à gauche et donc son image directe est munie d'une structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche.

En vertu de la proposition précédente $i_*\mathscr{F}_W^\sigma(*Y)$ est une connexion méromorphe munie d'un réseau global, c'est en particulier un $\mathscr{D}_X$-module holonome.

Le faisceau $\mathrm{Irr}_Y(i_*\mathscr{F}_W^\sigma(*Y))$ est porté par construction par $\mathrm{sing}(Y)$. En vertu du critère fondamental de la régularité 4.3–1, ce faisceau est nul.

De plus par construction $\mathrm{DR}_r(i_*\mathscr{F}_W^\sigma(*Y))$ est isomorphe au système local $\mathscr{L}_U$.

D'où le théorème d'existence de Riemann pour les connexions méromorphes 10.3–2.

Corollaire 10.3–11. — *Localement il existe un entier k tel que $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{I}_Y^k, i_*\mathscr{F}_W^\sigma)$ engendre la connexion $i_*\mathscr{F}_W^\sigma(*Y)$ comme $\mathscr{D}_X$-module cohérent.*

Démonstration. — En effet l'équation fonctionnelle montre l'existence d'un tel entier k. En particulier la connexion $i_*\mathscr{F}_W^\sigma(*Y)$ admet au voisinage de tout compact une bonne filtration au sens des $\mathscr{D}_X$-modules cohérents et ses images directes par un morphisme propre sont des modules holonomes réguliers sur la base.

Problème 10.3–12. — Sur une surface X les réseaux $i_*\mathscr{F}_W^\sigma$ canoniques sont localement libres. Si $X := \mathbf{P}^2$ est le plan projectif on peut se demander dans quelles conditions ces réseaux sont libres ? Est-ce que si le système local sur U est irréductible les réseaux associés sont libres. On sait que cela est vrai pour la droite projective en vertu d'un théorème de Bolibruch.

10.4. Holonomie et régularité des images directes locales par une fonction d'un module holonome régulier. — Nous allons utiliser la cohérence des images directes par un morphisme propre des connexions régulières pour montrer que les images directes locales d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier par une fonction sont des modules holonomes réguliers.

Théorème 10.4–1. — *Soient $\mathscr{M}$ un complexe holonome régulier dans un voisinage X assez petit de l'origine de $\mathbb{C}^n$ et f un germe de fonction analytique. Alors pour des représentants sur un voisinage assez petit de l'origine de f et de $\mathscr{M}$ le complexe $f_*^d\mathscr{M}$ est holonome régulier dans un voisinage assez petit de l'origine qui ne dépend pas des représentants.*

Démonstration. — Par la méthode du graphe on peut supposer que f est une projection $X \times D \to D$.

Lemme 10.4–2. — *Soit Z une hypersurface de $X \times D$ dont la trace sur la fibre spéciale $X \times 0$ est une hypersurface, alors dans un voisinage de zéro assez petit, il existe une projection $X \to X'$ telle que la projection produit $X \times D \to X' \times D$ est* finie *sur Z.*

Démonstration. — Soit une projection $X \to X'$ qui est finie sur $Z \cap X \times 0$ alors la projection produit induit un morphisme d'algèbres $\mathbb{C}\{x', z\} \to \mathscr{O}_{Z,0}$ et il suffit de montrer qu'il fait de l'algèbre $\mathscr{O}_{Z,0}$ un $\mathbb{C}\{x', z\}$-module de type fini. Par construction par réduction modulo l'idéal z l'algèbre $\mathscr{O}_{Z,0}/z$ est un $\mathbb{C}\{x'\}$-module de type fini et en vertu du lemme de Nakayama l'algèbre $\mathscr{O}_{Z,0}$ est un $\mathbb{C}\{x', z\}$-module de type fini.

Démonstration du théorème 10.4–1. — On raisonne par récurrence sur $\dim X$ à partir du cas trivial de la dimension nulle. On peut supposer que $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier. On a le triangle

$$\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_X(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}(*X)$$

et $\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_X(\mathscr{M})$ provient d'un complexe sur X identifiée à la fibre spéciale, dont l'image directe sur l'origine du disque est son complexe de de Rham absolu, qui pour X assez petit est un complexe d'espaces vectoriels à cohomologie de dimension finie. Cela montre que le complexe $f_*^d\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_X(\mathscr{M})$ est holonome.

Il suffit de montrer que le complexe $f_*^d\mathscr{M}(*X)$ est holonome pour X assez petit. Soit $X \to X'$ une projection qui induit une projection $p : X \times D \to X' \times D$ finie sur les composantes distinctes de $X \times 0$ du lieu singulier de $\mathscr{M}$. Soit Z le lieu singulier non vertical de la connexion qui est alors fini sur $X' \times D$, on a un triangle

$$\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}(*Z)$$

et les images directes par p de $\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Z(\mathscr{M})$ sont holonomes régulières. Donc leurs images directes par f sont holonomes régulières en vertu de l'hypothèse de récurrence.

On peut donc supposer que $\mathscr{M} \simeq \mathscr{M}(*X \cup Z)$. Dans cette situation la connexion se prolonge en une connexion sur $X' \times \mathbf{P}_{\mathbb{C}} \times D$ régulière et donc admet, d'après le paragraphe précédent, une bonne filtration au voisinage de chaque fibre de la projection

$$X' \times P_{\mathbb{C}} \times D \longrightarrow X' \times D.$$

Les images directes sont holonomes régulières et sont isomorphes aux images directes locales par le raisonnement que nous avons déjà vu plusieurs fois. L'hypothèse de récurrence permet de conclure au théorème.

Remarque 10.4–3. — Dans le théorème précédent, si on fait seulement l'hypothèse de la régularité dans la direction de la fibre spéciale, on peut reprendre le raisonnement précédent, mais on se heurte dans cette situation à prolonger les bonnes filtrations locales en bonnes filtrations globales, ce qui n'est pas clair. Mais si on utilise le résultat selon lequel les connexions méromorphes irrégulières admettent des réseaux globaux alors le raisonnement précédent reste correcte. En fait ce qui est au fond du problème c'est la cohérence des images directes par un morphisme propre sans hypothèse d'existence de filtrations globales, ce qui est encore conjectural depuis longtemps, mais personne n'a pris la peine de rédiger une démonstration. Mais il faut prendre garde que le théorème précédent est *faux* si l'on ne fait pas l'hypothèse de régularité le long de la fibre spéciale.

Exercice 10.4–4. — Construire un module holonome dont l'image directe locale par une fonction lisse n'est pas cohérente.

10.5. Le théorème d'existence de type de Riemann pour les coefficients analytiquement constructibles. — Pour passer aux complexes constructibles il nous faut généraliser le théorème 10.3–2 à la situation de Whitney. On considère un triplet $Y \subset Z \subset X$ où (Y, Z) est un couple d'espaces analytiques fermés de X tel que $U := Z - Y$ est lisse, connexe et Y est défini par une équation. La situation précédente correspond à Z lisse.

On se donne un système local de vectoriels complexes de dimension finie $\mathscr{L}_U$ sur U et on va montrer qu'il se prolonge en un module holonome régulier sur X à support dans Z. On fixe une section $\sigma : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Supposons Z normal, alors $\mathscr{L}_U$ se prolonge en un fibré sur $W := Z - \operatorname{sing}(Z) \cup \operatorname{sing}(Y) \hookrightarrow Z$ qui est le complémentaire dans le lieu lisse de Z du lieu singulier de Y. Ce prolongement $\mathscr{F}_W^\sigma$ est muni d'une connexion logarithmique le long de Y.

Théorème 10.5–1. — *L'image directe $i_*\mathscr{F}_W^\sigma$ est un faisceau analytique cohérent.*

Démonstration. — En vertu du théorème 10.3–2 le faisceau $i_*\mathscr{F}_W^\sigma$ est cohérent dans le complémentaire des points singuliers de Z. En vertu du corollaire 10.2–16 il suffit de montrer que ce faisceau est prolongeable en tout point non singulier de $\operatorname{sing}(Z)$. Au voisinage V d'un tel point l'inclusion $\operatorname{sing}(Z) \hookrightarrow Z$ admet une rétraction $Z \cap V \to \operatorname{sing}(Z) \cap V$, de sorte que génériquement sur la base, Z apparaît comme une famille de surface paramétrée par un espace lisse. Rappelons le procédé de résolution des singularités des surfaces de Zariski :

Théorème 10.5–2. — *Pour un germe de surface complexe normale le précédé canonique d'éclatement du lieu singulier suivi de la normalisation résout les singularités au bout d'un nombre fini d'étapes.*

Nous allons en déduire une version générique en famille du procédé précédent.

Lemme 10.5–3. — *Soit $f : Z \to T$ un morphisme d'espaces analytiques complexes réduits surjectif dont la base est lisse tel que Z est normal et le lieu singulier de Z est génériquement fini sur la base. Alors il existe un ouvert partout dense de T au-dessus duquel les fibres du morphisme sont normales.*

Démonstration. — Rappelons qu'en vertu du corollaire 10.2–13, Z est normal si et seulement si $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{O}_Z}(\mathscr{O}_Z/\mathscr{I}_{\mathrm{sing}(Z)}, \mathscr{O}_Z) = 0$ pour $i \leqslant 1$.

En vertu de lemme de Sard on peut supposer, au-dessus d'un ouvert partout dense de T, que le lieu singulier est étale sur la base et contient les singularités des fibres. Quitte encore à ôter un fermé analytique propre on peut supposer que les faisceaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{sing}(Z)}$-modules $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{O}_Z}(\mathscr{O}_{\mathrm{sing}(Z)}, \mathscr{O}_Z)$ sont lisses pour $i = 0\ldots, 1 + \dim T$. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales de $\mathrm{sing}(Z)$ en un point de $\mathrm{sing}(Z)$. L'action de x_1 sur $\mathscr{O}_Z$ est injectif puisque Z est normal. D'autre part l'action de x_1 sur $\mathscr{O}_{\mathrm{sing}(Z)}$ est aussi injectif puisque $\mathrm{sing}(Z)$ est non singulier. Des isomorphismes :

$$\begin{aligned}\mathscr{O}_Z/x_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_Z} \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Z}(\mathscr{O}_{\mathrm{sing}(Z)}, \mathscr{O}_Z)&\\ \simeq \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Z/x_1}(\mathscr{O}_{\mathrm{sing}(Z)} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_Z} \mathscr{O}_Z/x_1, \mathscr{O}_Z/x_1)&\\ \simeq \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Z/x_1}(\mathscr{O}_{\mathrm{sing}(Z)}/x_1, \mathscr{O}_Z/x_1),&\end{aligned}$$

on déduit que les faisceaux de $\mathscr{O}_Z/x_1$-modules $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{O}_Z/x_1}(\mathscr{O}_{\mathrm{sing}(Z)}/x_1, \mathscr{O}_Z/x_1)$ sont les restrictions des modules lisses analogues pour $i = 0, \ldots, 1+(\dim T-1)$. En particulier la profondeur de la restriction $\mathscr{O}_Z/x_1$ le long de son lieu singulier est au moins 2. De proche en propre on établit comme cela que la profondeur de la fibre le long se son lieu singulier du morphisme f est au moins 2. D'où le lemme.

Remarque 10.5–4. — Attention : comme Z est singulier le complexe

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Z}(\mathscr{O}_{\mathrm{sing}(Z)}, \mathscr{O}_Z)$$

n'est pas cohomologiquement borné et on ne peut pas choisir un fermé analytique propre de $\mathrm{sing}(Z)$ en dehors duquel ses faisceaux de cohomologie sont lisses. Mais heureusement on a besoin que de ses faisceaux de cohomologie au plus en degré $\dim T+1$.

Remarque 10.5–5. — Prendre garde que l'ouvert partout dense du lemme précédent n'est pas en général de Zariski, son complémentaire n'est pas analytique.

Revenons à la situation du théorème 10.5–1.

Lemme 10.5–6. — *Il existe un ouvert de* $\mathrm{sing}(Z) \cap V$ *partout dense au-dessus duquel le procédé canonique précédent commute aux fibres.*

Démonstration. — Cela résulte des deux lemmes précédents.

On en déduit le corollaire :

Corollaire 10.5–7. — *En partant de $Z \cap V$, le procédé canonique d'éclatement du lieu singulier suivi de la normalisation résout les singularités au bout d'un nombre fini d'étapes au-dessus d'un ouvert non vide de* $\mathrm{sing}(Z) \cap V$ *complémentaire d'un fermé analytique dont la trace sur* $\mathrm{sing}(Z)$ *est propre.*

Démonstration. — En effet chaque étape fournit un ouvert partout dense de la base au-dessus duquel le procédé canonique commute aux fibres. En vertu du théorème de Baire l'intersection de ces ouverts de la base est non vide. La fibre au-dessus d'un point de cette intersection devient lisse au bout d'un nombre fini d'étapes. En vertu du lemme de Sard l'image sur la base du lieu singulier de l'espace total du procédé canonique précédent est un fermé analytique dont la trace sur $\mathrm{sing}(Z)$ est propre.

Démonstration du théorème 10.5–1. — En vertu du corollaire précédent et du théorème 10.3–2 le fibré $\mathscr{F}_W^\sigma$ est prolongeable au voisinage de tout point lisse du lieu $\mathrm{sing}(Z)$ en dehors d'un ensemble de codimension 3 dans Z. En vertu du corollaire 10.2–16 l'image directe $i_*\mathscr{F}_W^\sigma$ est un faisceau analytique cohérent.

Problème 10.5–8. — Soit X une surface normale et Z une courbe sur X contenant les singularités de X. Si on se donne un système local sur $X - Z$ qu'on prolonge comme fibré en dehors des singularités de X, alors ce fibré est prolongeable en vertu du théorème de la résolution des singularités de la surface X. Est-ce qu'on peut démontrer que ce fibré est prolongeable sans invoquer ce théorème ?

Revenons à la situation du triplet $Y \subset Z \subset X$ où (Y, Z) est un couple d'espaces analytiques fermés de X tel que $U := Z - Y$ est lisse, connexe et Y est défini par une équation et soit $\mathscr{L}_U$ un système local de vectoriels complexes de dimension finie sur U.

Corollaire 10.5–9. — *Le $\mathscr{D}_{X-Y}$-module $\mathscr{H}_U^{\mathrm{codim}_{X-Y} U}(\mathscr{O}_{X-Y}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{L}_U$ se prolonge en un $\mathscr{D}_X$-module holonome à support dans Z et régulier le long de Y.*

Démonstration. — Considérons le normalisé $f : \widetilde{Z} \to Z \subset X$ de Z, $\widetilde{Y}$ et $\widetilde{\mathscr{L}_{\widetilde{U}}}$ les images inverses. Si l'on fixe une section $\sigma : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ le fibré $\widetilde{\mathscr{L}_{\widetilde{U}}}$ se prolonge sur $\widetilde{W} := Z - \mathrm{sing}(\widetilde{Z}) \cup \mathrm{sing}(\widetilde{Y})$ en un fibré $\widetilde{\mathscr{F}}_{\widetilde{W}}^\sigma$ à connexion logarithmique le long de $\widetilde{Y}$. On a alors le morphisme :

$$\mathscr{D}_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{W}}} \mathscr{T}_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{W}}} \widetilde{\mathscr{F}}_{\widetilde{W}}^\sigma \longrightarrow \mathscr{D}_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{W}}} \widetilde{\mathscr{F}}_{\widetilde{W}}^\sigma$$

qui à $P \otimes \delta \otimes a$ associe $P\delta \otimes a - P \otimes \delta a$ où δ est une section du fibré tangent $\mathscr{T}_{\widetilde{W}}$. C'est une présentation globale du $\mathscr{D}_{\widetilde{W}}$-module engendré par le réseau $\widetilde{\mathscr{F}}_{\widetilde{W}}^\sigma$. Prenons l'image directe au sens des $\mathscr{D}_{\widetilde{W}}$-modules de cette présentation par $f : \widetilde{W} \to V$ où $V := X - f(\mathrm{sing}(\widetilde{Z}) \cup \mathrm{sing}(\widetilde{Y}))$. Le conoyau de l'image de la présentation précédente

$$\mathscr{D}_V \otimes_{\mathscr{O}_V} f_*(\mathscr{T}_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{W}}} \widetilde{\mathscr{F}}_{\widetilde{W}}^\sigma) \longrightarrow \mathscr{D}_V \otimes_{\mathscr{O}_V} f_*\widetilde{\mathscr{F}}_{\widetilde{W}}^\sigma$$

est un prolongement du système local $\mathscr{L}_U$ à V comme $\mathscr{D}_V$-module holonome génériquement régulier le long de $V \cap Y$. Notons $i : V \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique. La démonstration de la proposition 10.3–7 montre :

Lemme 10.5–10. — *Les morphismes canoniques*

$$\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} i_*(f_*(\mathscr{T}_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{W}}} \widetilde{\mathscr{F}^\sigma_{\widetilde{W}}})) \longrightarrow i_*(\mathscr{D}_V \otimes_{\mathscr{O}_V} f_*(\mathscr{T}_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{O}_V} \widetilde{\mathscr{F}^\sigma_{\widetilde{W}}})),$$

$$\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} i_* f_* \widetilde{\mathscr{F}^\sigma_{\widetilde{W}}} \longrightarrow i_*(\mathscr{D}_V \otimes_{\mathscr{O}_V} f_* \widetilde{\mathscr{F}^\sigma_{\widetilde{W}}})$$

sont des isomorphismes.

En vertu du théorème 10.5–1 précédent les images directes

$$i_*(f_*(\mathscr{T}_{\widetilde{W}} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{W}}} \widetilde{\mathscr{F}^\sigma_{\widetilde{W}}})) \text{ et } i_* f_* \widetilde{\mathscr{F}^\sigma_{\widetilde{W}}}$$

sont des faisceaux analytique cohérents sur X. Le conoyau du morphisme :

$$i_*(\mathscr{D}_V \otimes_{\mathscr{O}_V} f_*(\mathscr{T} \otimes_{\mathscr{O}_V} \widetilde{\mathscr{F}^\sigma_{\widetilde{W}}})) \longrightarrow i_*(\mathscr{D}_V \otimes_{\mathscr{O}_V} \widetilde{f}_* \mathscr{F}^\sigma_{\widetilde{W}})$$

est un $\mathscr{D}_X$-module cohérent qui prolonge le système local $\mathscr{L}_U$. Son localisé le long de Y est un $\mathscr{D}_X$-module holonome qui est régulier en vertu du critère fondamental de l'irrégularité 4.3–16. D'où le corollaire.

Corollaire 10.5–11. — *Sur une variété algébrique complexe non singulière T tout système local de vectoriels complexes de dimension finie est de façon unique le système local d'un fibré algébrique à connexion intégrable et régulier à l'infini et tout revêtement topologique fini est algébrique.*

Démonstration. — On peut supposer que que la variété T est affine non singulière et connexe. Soit $\overline{T}$ une compactification projective. Si on se donne un système local $\mathscr{L}_T$ sur T^{an} on applique le corollaire précédent. On obtient un module holonome sur l'espace projectif qui est algébrique en vertu de GaGa. Sa restriction à T est alors un fibré algébrique à connexion intégrable et régulier à l'infini. Si le système local $\mathscr{L}_T$ est l'image directe par un revêtement topologique fini du faisceau constant, il est muni d'une structure d'algèbre qui est algébrisable et donne naissance à un revêtement algébrique.

Corollaire 10.5–12. — *Pour tout complexe constructible $\mathscr{F}$ sur X, il existe* localement *un complexe holonome régulier $\mathscr{M}$ et un isomorphisme*

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}) \simeq \mathscr{F}.$$

Démonstration. — Soit Z le support de $\mathscr{F}$, réunion des supports des faisceaux de cohomologie. C'est donc un fermé analytique de X. Nous allons raisonner par récurrence sur la dimension de Z. Si $\dim Z = 0$ le complexe $\mathit{alg}\mathscr{H}^n_Z(\mathscr{O}_X) \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathscr{F}[\dim X]$ convient.

Dans le cas général il existe, en vertu du lemme 6.1–4, *localement* une hypersurface Y de Z en dehors de laquelle Z et les faisceaux de cohomologie de $\mathscr{F}$ sont lisses. On a alors la suite exacte de complexes :

$$0 \longrightarrow j_! j^{-1}\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}_Y \longrightarrow 0$$

où j est l'inclusion canonique locale du complémentaire de Y dans Z. Le support de $\mathscr{F}_Y$ est de dimension $< \dim Z$ et en vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe un complexe holonome régulier $\mathscr{M}_1$ et un isomorphisme

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}_1) \simeq \mathscr{F}_Y.$$

Si $j^{-1}\mathscr{F}$ est concentré en un seul degré, en vertu du corollaire précédent il existe un prolongement qui est $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier le long de Y. En raisonnant par récurrence sur l'amplitude de $j^{-1}\mathscr{F}$ et en vertu du théorème de comparaison 7.3–1, il existe un complexe holonome régulier le long de Y qui prolonge $j^{-1}\mathscr{F}$.

Notons $\mathscr{M}_2$ le complexe de $\mathscr{D}_X$-modules dual du localisé le long de Y de ce prolongement. Par construction $\mathscr{M}_2$ est un complexe holonome régulier dont le complexe de de Rham est isomorphe à $j_! j^{-1}\mathscr{F}$.

En vertu du théorème de comparaison 7.3–1 on a un isomorphisme :

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_1[1], \mathscr{M}_2) \simeq \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}_Y[1], j!j^{-1}\mathscr{F}),$$

d'où un morphisme

$$\mathscr{M}_1[1] \longrightarrow \mathscr{M}_2$$

dont le cône est un complexe holonome régulier $\mathscr{M}$ dont le complexe de de Rham est isomorphe à $\mathscr{F}$.

Le recollement des objets de la catégorie dérivée nous a causé de sérieuses difficultés à l'origine. Il n'est pas étonnant que derrière cette difficulté se cachait en fait une idée très féconde : le formalisme de la cohomologie dite perverse.

Passage du local au global, première étape : recollement des objets

D'après ce qui précède tout complexe constructible est *localement* le complexe de de Rham d'un complexe holonome régulier. En vertu du théorème de comparaison, les complexes holonomes réguliers qui admettent même complexe de de Rham sont isomorphes comme objets de la catégorie dérivée. Voyons que les isomorphismes locaux sont compatibles. Par construction les isomorphismes locaux de leur complexe de de Rham sont compatibles. Comme en vertu du théorème de comparaison les morphismes entre complexes holonomes réguliers sont canoniquement isomorphes aux morphismes de leurs complexes de de Rham, on en déduit que les isomorphismes locaux satisfont aux conditions de compatibilité.

Mais en général les objets d'une catégorie dérivée qui se recollent localement avec conditions de compatibilité ne se recollent pas nécessairement globalement. Mais pour une catégorie dérivée de faisceaux usuels les objets de cohomologie se recollent globalement. En particulier les modules de cohomologie des complexes holonomes réguliers dont le complexe de de Rham sont isomorphes au faisceau $\mathscr{F}$ se recollent globalement.

On voit par récurrence sur la dimension du support que l'amplitude des complexes holonomes réguliers dont le complexe de Rham est isomorphe à $\mathscr{F}$ est globalement bornée. Si cette amplitude est égale à un alors $\mathscr{F}$ est isomorphe au complexe de de Rham d'un complexe concentré cohomologiquement en seul degré, et donc $\mathscr{F}$ est isomorphe, *globalement* au complexe de Rham d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier.

Passage du local au global, deuxième étape : recollement des morphismes

Dans le cas général nous raisonnons par récurrence sur l'amplitude des complexes holonomes réguliers dont les complexes de de Rham sont isomorphes au complexe constructible donné $\mathscr{F}$. Soit $h^{i_0}(\mathscr{M})$ le premier faisceau de cohomologie non nul des complexes holonomes réguliers dont les complexes de de Rham sont isomorphe au complexe constructible donné $\mathscr{F}$, c'est un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier bien défini globalement et son complexe de de Rham $\mathbf{DR}(h^{i_0}(\mathscr{M}))$ est bien défini globalement.

Le premier faisceau de cohomologie non nul d'un complexe s'envoie canoniquement dans le complexe, d'où un morphisme défini *localement* :

$$h^{i_0}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathscr{M},$$

qui donne par fonctorialité un morphisme défini *localement* :

$$\mathbf{DR}(h^{i_0}(\mathscr{M})) \longrightarrow \mathscr{F}.$$

Lemme 10.5–13. — *Le préfaisceau des morphismes locaux* $\mathbf{DR}(h^{i_0}(\mathscr{M})) \to \mathscr{F}$ *est un faisceau.*

Démonstration. — En effet les sections de ce préfaisceau au-dessus d'un ouvert U est l'espace

$$\Gamma(U; \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{DR}(h^{i_0}(\mathscr{M})), \mathscr{F}).$$

En vertu du théorème de comparaison 7.3–1 on a l'isomorphisme :

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(h^{i_0}(\mathscr{M})), \mathscr{M}) = \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{DR}(h^{i_0}(\mathscr{M})), \mathscr{F})$$

qui montre que les faisceaux locaux

$$\mathscr{E}xt^i_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{DR}(h^{i_0}(\mathscr{M})), \mathscr{F})$$

sont nuls pour $i < 0$ et donc l'espace des morphisme globaux :

$$\Gamma(X; \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{DR}(h^{i_0}(\mathscr{M})), \mathscr{F}) \simeq \Gamma(X; \mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{DR}(h^{i_0}(\mathscr{M})), \mathscr{F})$$

sont les sections d'un faisceau.

Les morphismes locaux $\mathbf{DR}(h^{i_0}(\mathscr{M})) \to \mathscr{F}$ se recollent et donnent naissance à un morphisme global :

$$\mathbf{DR}(h^{i_0}(\mathscr{M})) \longrightarrow \mathscr{F}$$

en vertu du lemme précédent.

Le cône de ce morphisme provient localement d'un complexe holonome régulier dont l'amplitude est strictement plus petite que celle de $\mathscr{M}$. En vertu de l'hypothèse de récurrence il provient globalement d'un complexe holonome régulier. En vertu du théorème de comparaison le translaté de ce complexe est muni d'un morphisme global dans $h^{i_0}(\mathscr{M})$ dont le cône est un complexe holonome régulier globalement défini et de complexe de de Rham isomorphe à $\mathscr{F}$. On a alors démontré :

Théorème 10.5–14. — *Le foncteur*

$$\mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathscr{M})$$
$$D^b_{hr}(\mathscr{D}_X) \longrightarrow D^b_c(\mathbb{C}_X)$$

est essentiellement surjectif. C'est donc un foncteur exact de catégories triangulées qui est une équivalence de catégories.

Ce théorème est de nature géométrique et n'a rien à voir avec la théorie des distributions qui apparaît comme une diversion comme on peut le voir. Sa première démonstration complète qui repose sur le théorème de la résolution des singularités date de 1979.

Proposition 10.5–15. — *Si le complexe $\mathscr{F}$ a les propriétés de support et co-support il provient d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier placé en degré zéro.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que si $\mathscr{M}$ est un complexe holonome régulier tel que son complexe de de Rham a les propriétés de support et co-support alors il est concentré cohomologiquement en degré zéro. On raisonne par récurrence sur $\dim X$. Si la dimension de X est un, alors génériquement $\mathscr{M}$ est un fibré vectoriel à connexion et ses faisceaux de cohomologie en degrés non nuls sont ponctuels. Le complexe de de Rham d'un module ponctuel placé en degré $i > 0$ est concentré en degré $i + 1$. Cela montre que les faisceaux de cohomologie de $\mathscr{M}$ en degrés strictement positifs sont nuls. Par dualité les faisceaux de cohomologie en degrés strictement négatifs sont nuls.

Le complexe $\mathscr{M}$ étant donné, il passe en dehors d'une partie de dimension nulle une hypersurface non singulière non caractéristique pour les faisceaux de cohomologie de $\mathscr{M}$. En vertu du théorème de Cauchy-Kowalewska, le foncteur restriction des modules est exact et le complexe des solutions commute à la restriction non caractéristique. En vertu de la proposition 3.5–6 les propriétés de support et de co-support sont conservées par restriction transverse assez générale. En vertu de l'hypothèse de récurrence les faisceaux de cohomologie de $\mathscr{M}$ sont ponctuels en degrés non nuls. Le complexe de de Rham d'un module ponctuel placé en degré $i > 0$ est concentré en degré $i + \dim X$. On conclut par le raisonnement précédent comme dans le cas des courbes.

Rappelons que la catégorie $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ est la sous-catégorie pleine de la catégorie $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ des complexes qui ont la propriété de support et de co-support.

Corollaire 10.5–16. — *Le foncteur*

$$\mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathscr{M})$$

induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X) \longrightarrow \mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$$

entre la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ *et la catégorie des faisceaux au sens dérivé* $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$.

Corollaire 10.5–17. — *La catégorie* $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ *est une sous-catégorie abélienne pleine de la catégorie $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ et est un champ, c'est-à-dire ses objets et ses morphismes sont de nature locale et le foncteur* $\mathbf{DR}$ *est un foncteur exact de catégories abéliennes.*

Démonstration. — En effet la catégorie $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ est une sous-catégorie abélienne pleine de la catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ et est un champ.

Corollaire 10.5–18. — *Un triangle distingué de complexes constructibles donne naissance à une suite longue de cohomologie de faisceaux au sens dérivé.*

Démonstration. — Soit en effet un tel triangle :

$$\mathscr{F}_1 \longrightarrow \mathscr{F}_2 \longrightarrow \mathscr{F}_3$$

il provient d'un triangle distingué de complexes holonomes réguliers :

$$\mathscr{M}_1 \longrightarrow \mathscr{M}_2 \longrightarrow \mathscr{M}_3$$

qui donne naissance à une suite longue de cohomologie ordinaire :

$$\longrightarrow h^i(\mathscr{M}_1) \longrightarrow h^i(\mathscr{M}_2) \longrightarrow h^i(\mathscr{M}_3) \longrightarrow h^{i+1}(\mathscr{M}_1) \longrightarrow$$

qui par application du foncteur $\mathbf{DR}$ donne un complexe de faisceaux au sens dérivé :

$$\longrightarrow \mathbf{DR}(h^i(\mathscr{M}_1)) \longrightarrow \mathbf{DR}(h^i(\mathscr{M}_2)) \longrightarrow \mathbf{DR}(h^i(\mathscr{M}_3)) \longrightarrow \mathbf{DR}(h^{i+1}(\mathscr{M}_1)) \longrightarrow$$

qui est une suite longue de faisceaux au sens dérivé en vertu de l'équivalence de catégories du corollaire précédent.

Corollaire 10.5–19. — *Soit Y une hypersurface de X alors le foncteur $\mathscr{M} \to \mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})$ de $\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X)$ dans $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_Y)$ est un foncteur exact de catégories abéliennes.*

Démonstration. — En effet le foncteur exact de catégorie triangulées $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})$ transforme par construction une suite exacte de modules holonomes

$$0 \longrightarrow \mathscr{M}_1 \longrightarrow \mathscr{M}_2 \longrightarrow \mathscr{M}_3 \longrightarrow 0$$

en un triangle distingué :

$$\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M}_1) \longrightarrow \mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M}_2) \longrightarrow \mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M}_3).$$

En vertu du théorème de positivité 3.5–2, les complexes précédents sont des faisceaux au sens dérivé et donc, en vertu de l'équivalence de catégorie précédente, le triangle distingué provient d'une suite exacte de modules holonomes. Donc le triangle distingué est une vraie suite exacte dans une catégorie abélienne de faisceaux au sens dérivé.

Corollaire 10.5–20. — *Soient Y une hypersurface de X et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome alors le triangle distingué de la catégorie $D_c(\mathbb{C}_X)$*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Irr}_Z(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathbf{R}\mathscr{M}(*Z)) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathbf{R}j_*j^{-1}(\mathscr{M})) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de la catégorie abélienne $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$.

Démonstration. — En effet c'est par construction un triangle distingué formés de faisceaux. C'est donc une suite exacte de la catégorie abélienne $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$.

10.6. Le théorème d'existence de type de Riemann pour les coefficients algébriquement constructibles. — Soit X une variété algébrique complexe non singulière. On a alors la catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ des complexes holonome réguliers dont le complexe de de Rham transcendant

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}) := \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X^{\mathrm{an}}}}(\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}, \mathscr{M}^{\mathrm{an}})$$

est algébriquement constructible.

Théorème 10.6–1. — *Le foncteur exact de catégories triangulées*

$$\mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathscr{M})$$

$$D^b_{hr}(\mathscr{D}_X) \longrightarrow D^b_c(\mathbb{C}_X)$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — Par rapport au cas analytique il faut tenir compte du diviseur à l'infini, mais la démonstration est parallèle. Le théorème de comparaison 9.0–17 dit que si $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ sont deux complexes holonomes réguliers les morphismes canoniques :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\mathrm{hom}_{\mathscr{D}_X}(X; \mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) &\longrightarrow \mathbf{R}\mathrm{hom}_{\mathscr{D}_{X^{\mathrm{an}}}}(X^{\mathrm{an}}; \mathscr{M}_1^{\mathrm{an}}, \mathscr{M}_2^{\mathrm{an}})\\ &\longrightarrow \mathbf{R}\mathrm{hom}_{\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}}}(X^{\mathrm{an}}; \mathbf{DR}(\mathscr{M}_1^{\mathrm{an}}), \mathbf{DR}(\mathscr{M}_2^{\mathrm{an}}))\end{aligned}$$

sont des isomorphismes. En particulier le foncteur de de Rham est pleinement fidèle.

Voyons qu'il est essentiellement surjectif. Soit $\mathscr{F}$ un complexe algébriquement constructible, comme nous l'avons montré dans le cas analytique il suffit de montrer qu'il provient localement d'un complexe holonome régulier. On peut supposer que la variété X est affine, que $\mathscr{F}$ est lisse sur un ouvert U lisse connexe d'une sous-variété fermée Y de X complémentaire d'une hypersurface Z et que $\mathscr{F} \simeq \mathbf{R}i_*^{\mathrm{an}}i^{\mathrm{an}-1}\mathscr{F}$, où $i : U \hookrightarrow Y$ est l'inclusion canonique. Soit $j : X \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ un plongement projectif et $\mathbf{R}j_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}$ l'image directe de $\mathscr{F}$ qui est un complexe algébriquement constructible sur l'espace projectif. Si on montre qu'il provient d'un complexe holonome régulier, la restriction de ce complexe à X convient.

L'ouvert U est le complémentaire d'une hypersurface T de l'adhérence $\overline{Y}$ dans l'espace projectif. Le choix d'une section σ de la projection $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ permet par la méthode du cas analytique d'étendre le fibré à connexion intégrable $\mathscr{O}_U \otimes_{\mathbb{C}_U} \mathscr{F}_U$ en un faisceau analytique cohérent sur $\overline{Y}$ qui est alors algébrique en vertu de GaGa de Serre [**S**]. À partir de là on construit comme dans le cas analytique un $\mathscr{D}_{\mathbf{P}^N}$-module holonome algébrique dont le faisceau d'irrégularité le long de T est nul, ce qui exprime très exactement que son complexe de de Rham transcendant est isomorphe à $\mathbf{R}j_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}$.

Corollaire 10.6–2. — *Le foncteur de de Rham induit une équivalence de catégories entre la catégorie* $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ *et la catégorie* $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$.

Démonstration. — En effet si $\mathscr{M}$ est un complexe holonome dont le complexe de de Rham transcendant à les propriétés de support et de co-support le complexe analytique associé $\mathscr{M}^{\mathrm{an}}$ est concentré cohomologiquement en degré zéro. Comme le foncteur GaGa est fidèle le complexe $\mathscr{M}$ est concentré cohomologiquement en un seul degré.

Corollaire 10.6–3. — *La catégorie* $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ *est une sous-catégorie abélienne pleine de la catégorie* $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ *et est un champ, c'est-à-dire ses objets et ses morphismes sont de nature locale et le foncteur* $\mathbf{DR}$ *est un foncteur exact de catégories abéliennes.*

Démonstration. — En effet la catégorie $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ est une sous-catégorie abélienne pleine de la catégorie $D^b_{hr}(\mathscr{D}_X)$ et est un champ.

Corollaire 10.6–4. — *Un triangle distingué de complexes constructibles donne naissance à une suite longue de cohomologie de faisceaux au sens dérivé.*

Corollaire 10.6–5. — *Soit Y une hypersurface de X alors le foncteur $\mathscr{M} \to \mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})$ de* $\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X)$ *dans* $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_Y)$ *est un foncteur exacte de catégories abéliennes.*

Les démonstrations des corollaires précédents sont exactement les mêmes que dans le cas analytique.

Remarque 10.6–6. — La catégorie $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X)$ garde un sens purement algébriquement au-dessus d'un corps de caractéristique nulle. En effet un complexe est holonome régulier si et seulement si son image inverse sur toute courbe au-dessus de X n'a que des singularités à distances finie et infinie, ce qui a un sens purement algébriquement.

De façon beaucoup plus précise le cycle d'irrégularité d'un module holonome le long d'une hypersurface Y d'une variété algébrique non singulière au-dessus d'un corps de caractéristique nulle se définit purement algébriquement. Sa nullité qui est aussi équivalente à l'absence de pentes finies non nulles le long de Y, caractérise la régularité de $\mathscr{M}$ le long de Y, voir le cours de Y. Laurent dans cette même école ou l'article [**L-M**].

11. Le Théorème d'Existence de type de Frobenius pour les coefficients holonomes d'ordre infini

11.1. Introduction. — Nous avons montré que le foncteur **DR** est une équivalence de catégories triangulées en montrant qu'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif. Son quasi-inverse existe donc mais est abstraitement défini en général à part le cas de certaines situations provenant de la géométrie. Nous allons montrer dans ce chapitre que l'introduction du faisceau des opérateurs d'ordre infini permet de construire un quasi-inverse explicite mais seulement au niveau de la catégorie des complexes holonomes d'ordre infini. La démonstration repose de façon essentielle sur l'équivalence précédente, bien que dans l'énoncé la régularité n'intervient pas.

Ce résultat généralise l'équivalence de catégories évidente entre la catégorie des fibrés vectoriels munis d'une connexion intégrable et la catégorie des systèmes locaux de vectoriels complexes sur une variété analytique complexe connu parfois sous le nom de théorème d'existence de Frobenius qui explique le titre de ce chapitre. Le lecteur prendra seulement garde que la démonstration pour le cas des faisceaux constructibles ayant des singularités n'a pour l'essentiel rien à avoir avec le cas des système locaux.

Les résultats de ce chapitre ont eu et auront encore de profondes répercussions et leur influence est sans doute loin d'être épuisée [**M-N2**].

11.2. Le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini. — Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ une variété analytique complexe dénombrable à l'infini, alors le faisceau structural est à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels topologiques métriques complets. Plus précisément la famille de semi-normes indexée par les compacts K d'un ouvert U :

$$f \in \mathscr{O}_X(U) \longrightarrow |f|_K := \sup_{x \in K} |f(x)|$$

munit l'espace des fonctions holomorphes sur U d'une structure espace vectoriel topologique métrique complet.

On peut considérer le préfaisceau qui à un ouvert U associe la $\mathbb{C}$-algèbre des endomorphismes continus $\mathscr{H}omtop_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_X(U), \mathscr{O}_X(U))$.

Proposition 11.2–1. — *le préfaisceau $U \to \mathscr{H}omtop_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_X(U), \mathscr{O}_X(U))$ est un faisceau.*

Démonstration. — En effet si $\cup U_i$ est un recouvrement d'un ouvert U l'injection canonique :

$$\mathscr{O}_X(U) \longrightarrow \prod_i \mathscr{O}_X(U_i)$$

est une immersion topologique : la topologie canonique sur le produit induit la topologie canonique et donc un homomorphisme qui est localement continu est continu.

Définition 11.2–2. — On note $\mathscr{D}_X^\infty$ le faisceau $\mathscr{H}omtop_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$ des endomorphismes continus du faisceau structural.

Par construction le faisceau $\mathscr{D}_X^\infty$ est un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres qui contient comme sous-faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres le faisceau $\mathscr{D}_X$ des opérateurs différentiels d'ordre localement fini. De plus par construction le faisceau structural $\mathscr{O}_X$ est un $\mathscr{D}_X^\infty$-module à gauche.

Proposition 11.2–3. — *Soit $P : \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire du faisceau structural. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *P est continu.*

2) *Pour tout couple de compacts K, K' avec $K \subset \mathring{K}'$ il existe une constante $C_{K,K'} > 0$ telle que, pour toute fonction f de $\mathscr{O}_X(K')$,*

$$|P(f)|_K \leqslant C_{K,K'}|f|_{K'}.$$

Démonstration. — Supposons P continu et soit un couple (K, K') avec $K \subset \mathring{K}'$. Prenons $U = \mathring{K}'$, puisque $P : \mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(U)$ est continu, il existe un compact K_1 de U et une constante $C > 0$ tels que $|P(f)|_K \leqslant C|f|_{K_1'}$ d'où $|P(f)|_K \leqslant C|f|_{K'}$. Réciproquement soit U un ouvert et K un compact de U. Prenons un autre compact K' de U tel que $K \subset \mathring{K}'$. En vertu de 2) il existe une constante $C_{K,K'} > 0$ telle que $|P(f)|_K \leqslant C_{K,K'}|f|_{K'}$ qui exprime que P est continu.

Proposition 11.2–4. — *Soient (U, x) une carte locale de X et P une section au-dessus de U du faisceau $\mathscr{D}_X^\infty$, alors il existe une unique suite de fonctions holomorphes $a_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n$ de $\mathscr{O}_X(U)$ telle que*

$$P = \sum_\alpha a_\alpha \Delta^{(\alpha)},$$

de plus

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} |a_\alpha|^{1/|\alpha|} = 0$$

uniformément sur tout compact de U ou de façon équivalente le symbole total $P = \sum_\alpha a_\alpha \xi^{(\alpha)}$ est une fonction holomorphe au-dessus de $U \times \mathbb{C}^n$.

Démonstration. — On définit la suite a_α par

$$a_\alpha(x) := \sum_{\gamma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (-x)^\gamma P(x^{\alpha-\gamma}).$$

Le point est que l'égalité suivante a lieu pour *tout* point y de $\mathbb{C}^n$:

$$a_\alpha(x) := \sum_{\gamma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (-x+y)^\gamma P((x-y)^{\alpha-\gamma}).$$

Notons pour tout $\epsilon > 0$ assez petit $B(p, \epsilon)$ la boule fermée de centre p et de rayon ϵ. Pour un compact K de U, soit un recouvrement fini $B_i := B(p_i, \epsilon)$ de K. Pour une fonction f holomorphe sur U on a la majoration évidente $|f|_K \leqslant \sum_i |f|_{B_i}$ qui avec la proposition précédente donne la majoration pour ϵ assez petit

$$\begin{aligned}|a_\alpha(x)|_K &\leqslant \sum_i \sum_{\gamma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} |(-x+x(p_i))|^{\gamma}_{B_i} \, |P((x-x(p_i)^{\alpha-\gamma})|_{B_i} \\ &\leqslant \sum_i \sum_{\gamma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \epsilon^{|\gamma|} C_i (2\epsilon)^{|\alpha-\gamma|} \leqslant \Big(\sum_i C_i\Big)(4\epsilon)^{|\alpha|}\end{aligned}$$

qui montre la propriété de convergence de la suite a_α. Cette majoration montre que la série $\sum_\alpha a_\alpha \Delta^{(\alpha)}$ définit un endomorphisme continu du faisceau structural. Cet endomorphisme coïncide avec P sur les polynômes par construction, par suite par densité et continuité cet endomorphisme coïncide avec P sur les fonctions analytiques sur des boules et finalement il coïncide avec P sur les fonctions analytiques sur U. D'où la proposition qui montre que le faisceau $\mathscr{D}_X^\infty$ ainsi défini coïncide avec le faisceau des opérateurs d'ordre infini défini par cohomologie locale et noté $\mathscr{D}_X$ dans [**SKK**]. Le couple $(\mathscr{D}_X, \mathscr{D}_X^\infty)$ était noté $(\mathscr{D}_X^f, \mathscr{D}_X)$ par ces auteurs. La notation plus cohérente $(\mathscr{D}_X, \mathscr{D}_X^\infty)$ a été introduite en 1975.

On ignore si le faisceau $\mathscr{D}_X^\infty$ est cohérent ou pas et on ne peut pas développer une théorie des $\mathscr{D}_X^\infty$-modules cohérents sur le modèle de la théorie des $\mathscr{D}_X$-modules cohérents. D'un autre coté comme le faisceau $\mathscr{D}_X^\infty$ opère par construction sur le faisceau $\mathscr{O}_X$ il opère donc sur l'image directe $j_* j^{-1}\mathscr{O}_X$ par une immersion ouverte $j : U \hookrightarrow X$. Ce faisceau n'a pas de propriétés de finitude sur $\mathscr{D}_X$ et une question fondamentale et hautement non triviale est de montrer que cette image directe a alors de bonnes propriétés de finitude sur $\mathscr{D}_X^\infty$.

On est amené à considérer la catégorie des complexes parfaits :

Définition 11.2–5. — On dit qu'un complexe $\mathscr{M}^\infty$ de $D^b(\mathscr{D}_X^\infty)$ est parfait s'il admet localement des résolutions finie par des $\mathscr{D}_X^\infty$-modules localement libre de type fini.

On note $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^\infty)$ la catégorie des complexes parfaits. C'est une catégorie triangulée dont la structure n'est pas complètement élucidée [**M-N2**].

11.3. Fidèle platitude de l'extension $\mathscr{D}_X \to \mathscr{D}_X^\infty$. — Le premier résultat de la théorie est :

Théorème 11.3–1. — *L'extension $\mathscr{D}_X \to \mathscr{D}_X^\infty$ est fidèlement plate à droite et à gauche.*

Ce résultat était indiqué dans ([**SKK**], remark 2 p. 406) en suggérant une démonstration micro-différentielle qui n'est pas explicite et que personne n'a explicité depuis presque trente ans.

Nous avons cherché une démonstration différentielle, qu'on peut transposer au cas d'un corps local. Il se trouve qu'on peut déduire [**M-N2**] cette fidèle platitude du théorème de continuité de la division dans l'anneau des opérateurs différentiels d'ordre fini sur le modèle de démonstration de Serre de la fidèle platitude d'un l'anneau local noethérien sur son complété. Le rôle de la topologie $\mathfrak{m}$-adique est joué par la topologie localement convexe naturelle. Pour être complet le lecteur de cours trouvera cette démonstration dans l'article dans ce volume [**L-N**].

Exemple 11.3–2. — Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module cohérent il résulte de la proposition 2.7–6 et de la fidèle platitude $\mathscr{D}_X \to \mathscr{D}_X^\infty$ que le module $\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}$ est parfait. Plus généralement si $\mathscr{M}$ est un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à cohomologie cohérente et bornée le complexe $\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}$ est parfait.

11.4. Théorème de bidualité pour les $\mathscr{D}_X^\infty$-modules. — Soient $\mathscr{M}$ un fibré à connexion intégrable et $\mathscr{L} := \mathbf{DR}(\mathscr{M})$ son système local de sections horizontale. Alors $\mathscr{M}$ est complètement déterminé par ses sections horizontales : il existe un isomorphisme canonique :

$$\mathscr{M} \simeq \mathscr{L} \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathscr{O}_X.$$

De plus la structure de $\mathscr{D}_X$-module qui provient de la structure de $\mathscr{D}_X$-module du faisceau structural se prolonge en une structure de $\mathscr{D}_X^\infty$. Ceci n'est plus vrai pour un module holonome comme le montre le cas du faisceau de cohomologie locale $\operatorname{alg}\mathscr{H}_Y(\mathscr{O}_X)$ d'une hypersurface non singulière Y. En effet son complexe de de Rham se réduit au faisceau $\mathbb{C}_Y[-1]$ qui tordu par $\mathscr{O}_X$ ne peut être isomorphe à $\operatorname{alg}\mathscr{H}_Y^1(\mathscr{O}_X)$ ni même à $\mathscr{H}_Y^1(\mathscr{O}_X)$. Cependant un calcul simple montre que l'on a un isomorphisme canonique :

$$\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \operatorname{alg}\mathscr{H}_Y^1(\mathscr{O}_X) \simeq \mathscr{H}_Y^1(\mathscr{O}_X) \simeq \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbb{C}_Y[-1], \mathscr{O}_X)$$

et l'on remarque que $\mathbb{C}_Y[-1]$ est le complexe des solutions holomorphes du module $\operatorname{alg}\mathscr{H}_Y^1(\mathscr{O}_X)$. Ceci est général et très profond : l'étendu d'un module holonome au faisceau $\mathscr{D}_X^\infty$ est complètement déterminé par son complexe des solutions holomorphes mais sa démonstration n'a pas du tout était facile à l'origine et repose sur le théorème de dualité locale :

Théorème 11.4–1. — *Soit $\mathscr{M}^\infty$ un $\mathscr{D}_X^\infty$-complexe parfait tel que son complexe des solutions holomorphes*

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{M}^\infty, \mathscr{O}_X)$$

est constructible, *alors il existe un isomorphisme canonique de bidualité :*

$$\mathscr{M}_X^\infty \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{M}^\infty, \mathscr{O}_X), \mathscr{O}_X).$$

Soit $\mathscr{M}^\infty$ un $\mathscr{D}_X^\infty$-complexe on obtient le morphisme de bidualité

$$\mathscr{M}_X^\infty \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{M}^\infty, \mathscr{O}_X), \mathscr{O}_X)$$

en prenant une résolution $\mathscr{D}_X^\infty$-injective de $\mathscr{O}_X$ qui reste $\mathbb{C}_X$-injective.

On observe que cet isomorphisme n'a pas lieu pour $\mathscr{M}^\infty = \mathscr{D}_X^\infty$, à gauche on trouve $\mathscr{D}_X^\infty$ qui est un

$$\mathbf{R}\mathscr{H}omtop_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$$

alors qu'à droite on trouve un
$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{O}_X,\mathscr{O}_X).$$
Intuitivement l'isomorphisme a lieu si l'on peut donner un sens à
$$\mathbf{R}\mathscr{H}omtop_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}),\mathscr{O}_X),$$
ce qui est loin d'être évident et est à l'origine de grandes difficultés. En fait le morphisme de bidualité doit se factoriser par
$$\begin{aligned}\mathscr{M}_X^\infty \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}omtop_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{M}^\infty,\mathscr{O}_X),\mathscr{O}_X)&\\ \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{M}^\infty,\mathscr{O}_X),\mathscr{O}_X)&\end{aligned}$$
où le premier morphisme est un isomorphisme sous l'hypothèse de $\mathscr{D}_X^\infty$-perfection de $\mathscr{M}^\infty$ et le second morphisme est un isomorphisme sous l'hypothèse de la constructibilité du complexe
$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{M}^\infty,\mathscr{O}_X).$$

Pour démontrer le théorème 11.4–1 qui est de nature locale nous remplaçons le faisceau $\mathscr{H}omtop_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{O}_X,\mathscr{O}_X)$ par la définition de ce faisceau de M. Sato.

Notons $\delta : X \hookrightarrow X\times X$, l'immersion diagonale et p,q les projections canoniques de $X\times X \to X$.

Proposition 11.4–2. — *Si $x=(x_1,\dots,x_n)$ est un système de coordonnées locales il existe un isomorphisme de $(\mathscr{D}_X^\infty,\mathscr{D}_X^\infty)$-bimodules*
$$q_*\mathscr{H}^n_\Delta(p^*\omega_X)\simeq \mathscr{D}_X^\infty,$$
où $\Delta := \delta(X)$ est la diagonale et ω_X est le faisceau des n-formes différentielles.

Démonstration. — Remarquons d'abord que ω_X est un $\mathscr{D}_X^\infty$-modules à droite par
$$(f(x)dx)(\sum_\alpha a_\alpha(x)\Delta^{(\alpha)}) := \sum_\alpha(-1)^{|\alpha|}\Delta^{(\alpha)}a_\alpha(x)f(x)dx,$$
ce qui entraîne que $p^*\omega_X$ est un $(p^{-1}\mathscr{D}_X^\infty,q^{-1}\mathscr{D}_X^\infty)$-bimodule et que $q_*\mathscr{H}^n_\Delta(p^*\omega_X)$ est un $(\mathscr{D}_X^\infty,\mathscr{D}_X^\infty)$-bimodule.

L'application
$$\sum_\alpha a_\alpha(x)\Delta^{(\alpha)} \longrightarrow K(x,y) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_\alpha \frac{a_\alpha(x)}{(y-x)^{\alpha+1}}dy$$
admet comme inverse l'application
$$K(x,y)\longrightarrow (f\longrightarrow Pf := 2\pi\sqrt{-1}\int_{|y-x|=\epsilon} f(y)K(x,y)),$$
où
$$\frac{1}{(y-x)^{\alpha+1}} := \prod_i \frac{1}{(y_i-x_i)^{\alpha_i+1}}$$

et $|y-x| = \epsilon$ est le cycle $|y_i - x_i| = \epsilon > 0, i = 1, \ldots, n$. C'est donc un isomorphisme dont on voit par un calcul direct que c'est un isomorphisme de $(\mathscr{D}_X^\infty, \mathscr{D}_X^\infty)$-bimodules. Ceci munit en particulier le faisceau $q_* \mathscr{H}^n_\Delta(p^* \omega_X)$ d'une structure de faisceau d'anneaux et l'isomorphisme précédent est compatible aux structures d'anneaux.

Considérons un produit $X \times Z$ de deux variétés analytiques complexes et les projections p, q naturelles.

Proposition 11.4–3. — *Si $\mathscr{F}$ est un complexe constructible sur X et $\mathscr{G}$ un complexe borné d'espaces vectoriels complexes sur Z il existe un isomorphisme canonique :*

$$p^{-1}\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathbb{C}_X) \otimes_{\mathbb{C}_{X\times Z}} q^{-1}\mathscr{G} \simeq \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_{X\times Z}}(p^{-1}\mathscr{F}, q^{-1}\mathscr{G}).$$

Démonstration. — Soit $\mathbb{C}_X \to \mathscr{I}$ une résolution injective du faisceau constant sur X, alors le morphisme de la proposition est défini par :

$$\begin{aligned} p^{-1}\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathbb{C}_X) \otimes_{\mathbb{C}_{X\times Z}} q^{-1}\mathscr{G} &\longrightarrow p^{-1}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{I}) \otimes_{\mathbb{C}_{X\times Z}} q^{-1}\mathscr{G} \\ \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathbb{C}_{X\times Z}}(p^{-1}\mathscr{F}, p^{-1}\mathscr{I} \otimes_{\mathbb{C}_{X\times Z}} q^{-1}\mathscr{G}) &\longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_{X\times Z}}(p^{-1}\mathscr{F}, q^{-1}\mathscr{G}). \end{aligned}$$

Pour voir que c'est un isomorphisme la question est locale. Soit (x, y) un point de $X \times Z$ et $U \times V$ un voisinage de (x, y). Notons encore par p, q les projections canoniques. On a $q^{-1}\mathscr{G} \simeq q^!\mathscr{G}[-2\dim X]$. Le théorème de dualité de Grothendieck-Verdier pour la projection q fournit un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{R}\hom_{\mathbb{C}_{U\times V}}(p^{-1}\mathscr{F}, q^{-1}\mathscr{G}) \simeq \mathbf{R}\hom_{\mathbb{C}_V}(\mathbf{R}q_! p^{-1}\mathscr{F}_U, \mathscr{G}_V)[-2\dim X].$$

Mais le complexe $\mathbf{R}q_! p^{-1}\mathscr{F}_U$ est constant de valeur $\mathbf{R}\Gamma_c(U; \mathscr{F})$ qui est à cohomologie de dimension finie pour U assez petit en vertu de la constructibilité. On trouve donc l'isomorphisme

$$\mathbf{R}\hom_{\mathbb{C}_V}(\mathbf{R}q_! p^{-1}\mathscr{F}_U, \mathscr{G}_V) \simeq \mathbf{R}\hom_{\mathbb{C}}(\mathbf{R}q_! p^{-1}\mathscr{F}_U, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbf{R}\Gamma(V; \mathscr{G}_V).$$

D'autre part par dualité de Grothendieck-Verdier sur U on a l'isomorphisme canonique :

$$\mathbf{R}\hom_{\mathbb{C}}(\mathbf{R}\Gamma_c(U; \mathscr{F}), \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}_U} \mathbf{R}\Gamma(V; \mathscr{G}_V) \simeq \mathbf{R}\hom_{\mathbb{C}_U}(\mathscr{F}_U, \mathbb{C}_V) \otimes_{\mathbb{C}_U} \mathbf{R}\Gamma(V; \mathscr{G}_V)[2\dim X].$$

En passant à la limite inductive sur $U \times V$ on trouve finalement l'isomorphisme de la proposition.

Proposition 11.4–4. — *Pour chaque complexe constructible $\mathscr{F}$ sur X et chaque complexe borné d'espaces vectoriels complexes $\mathscr{G}$ sur X il existe un isomorphisme canonique :*

$$\mathbf{R}q_*\mathbf{R}\Gamma_\Delta(p^{-1}\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathbb{C}_X) \otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} q^{-1}\mathscr{G}) \simeq \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})[-2\dim X].$$

Démonstration. — En appliquant la proposition précédente au cas $X = Z$ on trouve les isomorphismes :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\Gamma_\Delta(p^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F},\mathbb{C}_X)\otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} q^{-1}\mathscr{G}) &\simeq \mathbf{R}\Gamma_\Delta(\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_{X\times Z}}(p^{-1}\mathscr{F},q^{-1}\mathscr{G}))\\ &\simeq \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_{X\times X}}(\mathbb{C}_\Delta\otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} p^{-1}\mathscr{F},q^{-1}\mathscr{G}).\end{aligned}$$

Appliquant l'isomorphisme de dualité relative on trouve l'isomorphisme :

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}q_*\mathbf{R}\Gamma_\Delta(p^{-1}\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F},\mathbb{C}_X),q^{-1}\mathscr{G})\\ &\qquad\simeq \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{R}q_!\mathbb{C}_\Delta\otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} p^{-1}\mathscr{F},\mathscr{G})[-2\dim X].\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer l'isomorphisme canonique :

$$\mathbf{R}q_!\mathbb{C}_\Delta\otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} p^{-1}\mathscr{F}\simeq\mathscr{F}$$

pour avoir la proposition.

Soit $\mathscr{M}^\infty$ un complexe parfait de $\mathscr{D}_X^\infty$-modules tel que le complexe

$$\mathbf{S}(\mathscr{M}^\infty) := \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{M}^\infty,\mathscr{O}_X)$$

est constructible. Si on définit le complexe de de Rham par :

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}^\infty) := \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{O}_X,\mathscr{M}^\infty)$$

le théorème de dualité locale exposé dans le cours [**N**] s'applique et on a un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{DR}(\mathscr{M}^\infty)\simeq\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}^\infty),\mathbb{C}_X).$$

Appliquant la proposition précédente on trouve un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{R}\Gamma_\Delta(p^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathscr{M}^\infty)\otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} q^{-1}\mathscr{O}_X)[2\dim X]\simeq\mathbf{R}hom_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}^\infty),\mathscr{O}_X).$$

Soit $\mathscr{M}^\infty$ un complexe parfait de $\mathscr{D}_X^\infty$-modules à gauche et

$$0\longrightarrow(\mathscr{D}_X^\infty)^{r_m}\xrightarrow{P_m}\cdots\xrightarrow{P_1}(\mathscr{D}_X^\infty)^{r_0}\longrightarrow 0$$

une résolution libre locale. D'où un complexe :

$$0\longrightarrow\mathscr{H}_\Delta^n((p^*\omega_X)^{r_m})\xrightarrow{P_m}\cdots\xrightarrow{P_1}\mathscr{H}_\Delta^n((p^*\omega_X)^{r_0})\longrightarrow 0$$

qui représente le complexe de cohomologie locale :

$$\mathbf{R}\Gamma_\Delta(0\longrightarrow(p^*\omega_X)^{r_m}\xrightarrow{P_m}\cdots\xrightarrow{P_1}(p^*\omega_X)^{r_0}\longrightarrow 0)[\dim X].$$

Le complexe $p^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathscr{M}^\infty)\otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} q^{-1}\mathscr{O}_X$ se représente par le complexe :

$$\begin{aligned}&0\longrightarrow(p^{-1}\omega_X)^{r_m}\otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} q^{-1}\mathscr{O}_X\xrightarrow{P_m}\cdots\\ &\qquad\xrightarrow{P_1}(p^{-1}\omega_X)^{r_0}\otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} q^{-1}\mathscr{O}_X\longrightarrow 0[-\dim X].\end{aligned}$$

Proposition 11.4–5. — *Soit $\mathscr{M}^\infty$ un complexe parfait de $\mathscr{D}_X^\infty$-modules tel que le complexe*

$$\mathbf{S}(\mathscr{M}^\infty) := \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{M}^\infty, \mathscr{O}_X)$$

est constructible, alors il existe un morphisme canonique du complexe :

$$0 \longrightarrow (p^{-1}\omega_X)^{r_m} \otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} q^{-1}\mathscr{O}_X \xrightarrow{P_m} \cdots \xrightarrow{P_1} (p^{-1}\omega_X)^{r_0} \otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} q^{-1}\mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

dans le complexe

$$0 \longrightarrow (p^*\omega_X)^{r_m} \xrightarrow{P_m} \cdots \xrightarrow{P_1} (p^*\omega_X)^{r_0} \longrightarrow 0$$

qui est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — Le faisceau $p^{-1}\omega_X \otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} q^{-1}\mathscr{O}_X$ est associé au préfaisceau

$$U \times V \longrightarrow \Gamma(U;\omega_X) \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma(V;\mathscr{O}_X),$$

alors que le faisceau $p^*\omega_X$ est associé au préfaisceau

$$U \times V \longrightarrow \Gamma(U;\omega_X)\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\Gamma(V;\mathscr{O}_X),$$

l'espace $\Gamma(V;\mathscr{O}_X)$ est un espace de Fréchet nucléaire et le produit tensoriel complété est défini sans ambiguïté : c'est le complété pour l'une des topologies naturelles sur le produit tensoriel algébrique. On est alors réduit au lemme suivant :

Lemme 11.4–6. — *Soient un complexe borné $F^\bullet$ d'espaces vectoriels complexes topologiques métriques complets à cohomologie de dimension finie et E un espace vectoriel complexe topologique métrique complet nucléaire, alors le morphisme canonique :*

$$E \otimes_{\mathbb{C}_X} F^\bullet \longrightarrow E\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_X} F^\bullet$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — Sous ces hypothèses le foncteur $F \to E\widehat{\otimes}F$ transforme suite exacte courte d'espaces vectoriels complexes topologiques métriques complets en suite exacte. D'autre part les images des différentielles du complexes $F^\bullet$ sont fermées en vertu du théorème des homomorphismes de Banach et donc les topologies induites sur les espaces de cohomologie sont séparées. Cela entraîne que le foncteur $F \to E\widehat{\otimes}F$ commute à la cohomologie. En particulier :

$$H^i(E\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_X}F^\bullet) \simeq E\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_X}H^i(F^\bullet).$$

Le morphisme induit en cohomologie est le morphisme :

$$E\otimes_{\mathbb{C}_X}H^i(F^\bullet) \longrightarrow E\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_X}H^i(F^\bullet)$$

qui est bien entendu un isomorphisme en vertu de la finitude de la cohomologie de $F^\bullet$.

Démonstration du théorème 11.4–1. — La question est locale. Soit $\mathscr{M}^\infty$ un complexe parfait de $\mathscr{D}_X^\infty$-modules tel que le complexe

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{M}^\infty, \mathscr{O}_X)$$

est constructible et soit

$$0 \longrightarrow (\mathscr{D}_X^\infty)^{r_m} \xrightarrow{P_m} \cdots \xrightarrow{P_1} (\mathscr{D}_X^\infty)^{r_0} \longrightarrow 0$$

une résolution locale de $\mathscr{M}^\infty$. Alors le complexe

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{M}^\infty, \mathscr{O}_X), \mathscr{O}_X)$$

se représente localement par le complexe :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\Gamma_\Delta(0 \longrightarrow (p^{-1}\omega_X)^{r_m} \otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} q^{-1}\mathscr{O}_X \xrightarrow{P_m} \cdots \\ \xrightarrow{P_1} (p^{-1}\omega_X)^{r_0} \otimes_{\mathbb{C}_{X\times X}} q^{-1}\mathscr{O}_X \longrightarrow 0)[\dim X]\end{aligned}$$

et le complexe $\mathscr{M}^\infty$ se représente localement par le complexe

$$\mathbf{R}\Gamma_\Delta(0 \longrightarrow (p^*\omega_X)^{r_m} \xrightarrow{P_m} \cdots \xrightarrow{P_1} (p^*\omega_X)^{r_0} \longrightarrow 0)[\dim X].$$

Ces deux complexes sont isomorphes en vertu de la proposition précédente ce qui implique le théorème de bidualité 11.4–1.

Corollaire 11.4–7. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-complexe holonome alors il existe un isomorphisme canonique de bidualité :*

$$\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}), \mathscr{O}_X).$$

Démonstration. — En effet dans le cas où $\mathscr{M}^\infty = \mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}$ le complexe

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)$$

est canoniquement isomorphe au complexe

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{M}^\infty, \mathscr{O}_X)$$

en vertu de la platitude de $\mathscr{D}_X^\infty$ sur $\mathscr{D}_X$ et qui est constructible en vertu du théorème de constructibilité.

On déduit de ce corollaire et de la régularité du faisceau structural le théorème :

Théorème 11.4–8. — *Soit $j : U \hookrightarrow X$ le complémentaire d'une hypersurface Y de X. Le morphisme canonique*

$$\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{O}_X(*Y) \longrightarrow j_*j^{-1}\mathscr{O}_X$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Soit $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique du complémentaire de Y. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{O}_X(*Y) & \longrightarrow & \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{O}_X(*Y)), \mathscr{O}_X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
j_*j^{-1}\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{O}_X(*Y) & \longrightarrow & \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{O}_X(*Y)), j_*j^{-1}\mathscr{O}_X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
j_*j^{-1}\mathscr{O}_X & \longrightarrow & \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(j_!j^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{O}_X(*Y)), \mathscr{O}_X)
\end{array}$$

où le morphisme de la dernière ligne provient de l'isomorphisme canonique $j_*j^{-1}\mathscr{O}_X = \mathbf{R}j_*j^{-1}\mathscr{O}_X \simeq \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(j_!j^{-1}\mathbb{C}_X, \mathscr{O}_X)$. En vertu du critère fondamental de la régularité le morphisme canonique

$$j_!j^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{O}_X(*Y)) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathscr{O}_X(*Y))$$

est un isomorphisme ce qui implique que tous les morphismes verticaux de la deuxième colonne sont des isomorphismes. Les morphismes horizontaux du diagramme précédent sont des isomorphismes en vertu du théorème de bidualité précédent. D'où le théorème.

Corollaire 11.4–9. — *Soit Y un sous-espace analytique de X, on a alors un morphisme canonique de triangle qui est un isomorphisme :*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Y(\mathscr{O}_X) & \longrightarrow & \mathscr{O}_X & \longrightarrow & \mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathbf{R}(\mathscr{O}_X(*Y)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathscr{O}_X) & \longrightarrow & \mathscr{O}_X & \longrightarrow & \mathbf{R}j_*j^{-1}(\mathscr{O}_X)
\end{array}.$$

Démonstration. — La question est locale. On raisonne sur le nombre d'équations définissant Y. Si Y est définie par une équation c'est une conséquence du théorème précédent. Dans le cas général soient $(f_1, \dots, f_k)$ un système d'équations de Y, Y_1 l'hypersurface définie par f_1 et Y_2 l'espace défini par $(f_2, \dots, f_k)$. Alors Y est l'intersection de Y_1 et de Y_2 et la réunion $Y_1 \cup Y_2$ est définie par $(f_1f_2, \dots, f_1f_k)$. On a alors le morphisme de triangles de Mayer-Vietoris :

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Y(\mathscr{O}_X) & \longrightarrow & \mathbf{R}\Gamma_Y(\mathscr{O}_X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_{Y_1}(\mathscr{O}_X) \oplus \mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_{Y_2}(\mathscr{O}_X) & \longrightarrow & \mathbf{R}\Gamma_{Y_1}(\mathscr{O}_X) \oplus \mathbf{R}\Gamma_{Y_2}(\mathscr{O}_X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_{Y_1\cup Y_2}(\mathscr{O}_X) & \longrightarrow & \mathbf{R}\Gamma_{Y_1\cup Y_2}(\mathscr{O}_X)
\end{array}$$

qui permet de conclure au corollaire.

Définition 11.4–10. — On définit et on note $D^b_{\mathrm{parf},c}(\mathscr{D}_X^\infty)$ la sous-catégorie pleine de $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^\infty)$ des complexes parfaits dont le complexe des solutions holomorphes est constructible.

La catégorie $D^b_{\mathrm{parf},c}(\mathscr{D}^\infty_X)$ est donc triangulée. Dans cette catégorie les théorèmes de dualité locale et de bidualité 11.4–7 s'appliquent. La constructibilité va nous permettre d'élucider la structure de la catégorie $D^b_{\mathrm{parf},c}(\mathscr{D}^\infty_X)$.

11.5. Équivalence de catégories entre la catégorie des complexes holonomes d'ordre infini et la catégorie des complexes constructible.

Définition 11.5–1. — On dit qu'un $\mathscr{D}^\infty_X$-complexe $\mathscr{M}^\infty$ est holonome si *localement* il existe un $\mathscr{D}_X$-complexe holonome $\mathscr{M}$ et un isomorphisme

$$\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M} \simeq \mathscr{M}^\infty.$$

En particulier un $\mathscr{D}^\infty_X$-module est holonome si *localement* il existe un $\mathscr{D}_X$-module holonome $\mathscr{M}$ et un isomorphisme

$$\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M} \simeq \mathscr{M}^\infty.$$

Rappelons qu'un $\mathscr{D}_X$-complexe holonome est un objet de la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}_X)$. A priori un $\mathscr{D}^\infty_X$-complexe à cohomologie holonome n'est pas nécessairement holonome, c'est pourtant vrai mais c'est un résultat profond comme nous allons le voir.

Exemple 11.5–2. — En vertu du corollaire précédent le complexe de cohomologie locale $\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathscr{O}_X)$ d'un sous-espace analytique fermé de X à valeurs dans le faisceau des fonctions holomorphes est holonome.

On note $\mathrm{Mh}(\mathscr{D}^\infty_X)$ la catégorie des $\mathscr{D}^\infty_X$-modules holonomes et $D^b_h(\mathscr{D}^\infty_X)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $D(\mathscr{D}^\infty_X)$ des complexes holonomes. Il n'est pas du tout clair que la catégorie $\mathrm{Mh}(\mathscr{D}^\infty_X)$ est abélienne ou que la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}^\infty_X)$ est triangulée. Par le théorème de constructibilité on a une inclusion évidente de $D^b_h(\mathscr{D}^\infty_X) \subset D^b_{\mathrm{parf},c}(\mathscr{D}^\infty_X)$.

En vertu du théorème de constructibilité pour un $\mathscr{D}^\infty_X$-complexe holonome le complexe des solutions holomorphes

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\infty_X}(\mathscr{M}^\infty, \mathscr{O}_X)$$

est constructible. D'où un foncteur

$$D^b_h(\mathscr{D}^\infty_X) \longrightarrow D^b_c(\mathbb{C}_X).$$

Réciproquement soit $\mathscr{F}$ un complexe constructible, le complexe

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$$

est naturellement un complexe de $\mathscr{D}^\infty_X$-modules.

Théorème 11.5–3. — *Le $\mathscr{D}^\infty_X$-complexe $\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$ est holonome.*

Démonstration. — La question est locale. La démonstration repose de façon essentielle sur la *local surjectivité* de l'équivalence de catégories du chapitre 10. En effet en vertu du corollaire 10.5–12 il existe un $\mathscr{D}_X$-complexe holonome régulier $\mathscr{M}$ et un isomorphisme

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X) \simeq \mathscr{F}.$$

En vertu du corollaire 11.4–7 de bidualité on obtient un isomorphisme

$$\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M} \simeq \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}), \mathscr{O}_X) \simeq \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$$

qui exprime bien que le complexe $\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$ est un $\mathscr{D}_X^\infty$-complexe holonome.

Corollaire 11.5–4. — *Les foncteurs*

$$\mathscr{M}^\infty \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{M}^\infty, \mathscr{O}_X) \quad \textit{et} \quad \mathscr{F} \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$$

sont des équivalences de catégories entre les catégories $D_h^b(\mathscr{D}_X^\infty)$, $D_c^b(\mathbb{C}_X)$ quasi-inverses l'un de l'autre.

Démonstration. — En effet si $\mathscr{F}$ est un complexe constructible on a par construction un isomorphisme :

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X), \mathscr{O}_X) \simeq \mathscr{F}.$$

Dans l'autre sens c'est une conséquence du corollaire 11.4–7.

Corollaire 11.5–5. — *L'extension $\mathscr{D}_X \to \mathscr{D}_X^\infty$ induit des équivalences de catégories*

$$\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X) \longrightarrow \mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X^\infty), \qquad D_{hr}^b(\mathscr{D}_X) \longrightarrow D_h^b(\mathscr{D}_X^\infty).$$

En effet les couples $(\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X), D_{hr}^b(\mathscr{D}_X))$ et $(\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X^\infty), D_h^b(\mathscr{D}_X^\infty))$ sont tous deux équivalents au couple $(\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X), D_c^b(\mathbb{C}_X))$. En particulier pour tout $\mathscr{D}_X$ holonome $\mathscr{M}$ il existe à isomorphe près un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier $\mathscr{M}_r$ fonctoriel en $\mathscr{M}$ et un isomorphisme :

$$\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}_r \simeq \mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M},$$

qui est caractérisé par l'isomorphisme :

$$\mathbf{S}(\mathscr{M}_r) \simeq \mathbf{S}(\mathscr{M}).$$

Corollaire 11.5–6. — *La catégorie $\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X^\infty)$ est une sous-catégorie abélienne stable par extension de la catégorie des $\mathscr{D}_X^\infty$-modules et la catégorie $D_h^b(\mathscr{D}_X^\infty)$ est triangulée.*

Démonstration. — En effet le couple $\mathrm{Mhr}(\mathscr{D}_X), D_{hr}^b(\mathscr{D}_X)$ qui est équivalent au couple

$$\mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X^\infty), D_h^b(\mathscr{D}_X^\infty)$$

a les propriétés du corollaire.

On obtient le corollaire qui est en quelque sorte le théorème réciproque du théorème de constructibilité :

Corollaire 11.5–7. — *Un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ est holonome si et seulement si son complexe des solutions holomorphes est constructible.*

Démonstration. — La question est locale. Il suffit de montrer en vertu de la caractérisation homologique de l'holonomie que les faisceaux $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X)$ sont nuls pour $i \neq \dim X$, ce qui est équivalent en vertu de la fidèle platitude à la nullité des faisceaux

$$\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}, \mathscr{D}_X^\infty)$$

pour $i \neq \dim X$. Soit $\mathscr{F}$ le complexe constructible des solutions holomorphes de $\mathscr{M}$, en vertu du corollaire 10.5–12 il existe un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier $\mathscr{M}_r$ et un isomorphisme

$$\mathbf{S}(\mathscr{M}_r) \simeq \mathscr{F}.$$

En vertu du théorème 11.4–7 on a un isomorphisme :

$$\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M} \simeq \mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}_r$$

qui implique les isomorphismes des faisceaux

$$\begin{aligned}\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X) \simeq \mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}, \mathscr{D}_X^\infty) &\simeq \mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}_r, \mathscr{D}_X^\infty)\\ &\simeq \mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}_r, \mathscr{D}_X)\end{aligned}$$

qui sont alors nuls pour $i \neq \dim X$ et donc $\mathscr{M}$ est holonome. La démonstration précédente montre de même :

Corollaire 11.5–8. — *Un complexe parfait de $\mathscr{D}_X^\infty$-modules est holonome si et seulement si son complexe des solutions holomorphes est constructible.*

Autrement dit l'inclusion $D^b_h(\mathscr{D}_X^\infty) \subset D^b_{\mathrm{parf},c}(\mathscr{D}_X^\infty)$ est une équivalence de catégories.

Corollaire 11.5–9. — *Un complexe de $\mathscr{D}_X^\infty$-modules est holonome si et seulement s'il est à cohomologie holonome.*

Démonstration. — En effet le complexe des solutions d'un tel complexe est constructible. On raisonne par récurrence sur l'amplitude en montrant qu'un tel complexe provient d'un $\mathscr{D}_X$-complexe holonome régulier.

Corollaire 11.5–10. — *Soient $\mathscr{M}^\infty$ un complexe holonome et $\mathscr{F}$ un complexe constructible. Alors le complexe $\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{M}^\infty)$ qui est naturellement un complexe de $\mathscr{D}_X^\infty$-modules est un complexe holonome.*

Démonstration. — En vertu du théorème de bidualité on a un isomorphisme canonique :

$$\mathscr{M}^\infty \simeq \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}^\infty), \mathscr{O}_X)$$

et donc un isomorphisme :

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{M}^\infty) \simeq \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}^\infty), \mathscr{O}_X)).$$

Soit par adjonction un isomorphisme :

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{M}^\infty) \simeq \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F} \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathbf{S}(\mathscr{M}^\infty), \mathscr{O}_X).$$

On est réduit au théorème 11.5–3.

Remarque 11.5–11. — L'holonomie du complexe $\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$ est un problème locale et n'utilise que l'essentielle surjectivité locale du foncteur $\mathbf{S}_r$. On peut alors utiliser cette holonomie pour passer du local au global et pour montrer que le foncteur $\mathbf{S}_r$ est globalement surjectif. En effet soit $\mathscr{F}$ un complexe constructible. Il nous faut montrer qu'il est de la forme $\mathbf{S}_r(\mathscr{M})$ pour un complexe holonome régulier de $\mathscr{D}_X$-modules. On raisonne sur l'amplitude du complexe holonome d'ordre infini $\mathscr{M}^\infty := \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$, on se ramène, en utilisant que la catégorie $D^b_h(\mathscr{D}^\infty_X)$ est triangulée qui est aussi un problème local, au cas où ce complexe se réduit à un $\mathscr{D}^\infty_X$-module holonome $\mathscr{M}^\infty$. Un tel $\mathscr{D}^\infty_X$-module holonome $\mathscr{M}^\infty$ est alors localement de la forme $\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}_r$ pour un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier $\mathscr{M}_r$ parce que l'extension $\mathscr{D}_X \to \mathscr{D}^\infty_X$ est pleinement fidèle. Les différents modules locaux $\mathscr{M}_r$ se recollent par le raisonnement habituel des faisceaux usuels. C'est comme cela qu'on a procédé originellement, ce qui correspond à dévisser un complexe constructible non à l'aide de sa cohomologie ordinaire mais à l'aide de sa cohomologie dite perverse !, mais on ne le savait pas encore à l'époque et pour cause cette cohomologie est issue de ce théorème. Cela précise un peu plus que que tous les problèmes qui nous concernent ici sont de nature locale et la difficulté des recollements des objets de la catégorie dérivée se trouve remarquablement résolue.

11.6. Le module d'Irrégularité. — La construction d'un module holonome régulier à partir d'un faisceau au sens dérivé est abstraite quand le faisceau ne provient pas de la géométrie. C'est le cas en particulier du faisceau d'irrégularité $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})$ d'un module holonome $\mathscr{M}$ le long d'une hypersurface Y. On ne peut pas construire algébriquement à partir de $\mathscr{M}$ un module holonome régulier dont le complexe de de Rham est isomorphe à $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})$. Pourtant nous allons voir que l'on peut construire canoniquement un module holonome d'ordre infini à partir du module $\mathscr{M}$ dont le complexe des solution holomorphes est isomorphe à $\mathrm{Irr}^*_Y(\mathscr{M})$.

Commençons par un lemme utile :

Lemme 11.6–1. — *Soient un $\mathscr{D}^\infty_X$-module parfait $\mathscr{M}^\infty$ et $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion du complémentaire d'une hypersurface Y. Alors les faisceaux $R^i j_* j^{-1}\mathscr{M}^\infty$ sont nuls pour $i \neq 0$.*

Démonstration. — La question est locale. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales au-dessus d'un petit ouvert V. La proposition 11.2–4 montre que le faisceau d'espaces vectoriels complexes $\mathscr{D}_V^\infty$ est isomorphe à l'image directe $\pi_*\mathscr{O}_{V\times\mathbb{C}^n}$ par l'application symbole total. Mais en vertu du théorème B de Cartan $R^i j_* j^{-1}\pi_*\mathscr{O}_{V\times\mathbb{C}^n} = 0, i \neq 0$ et donc $R^i j_* j^{-1}\mathscr{D}_X^\infty = 0, i \neq 0$. En raisonnant par récurrence sur la longueur de la résolution d'un $\mathscr{D}_X^\infty$-module parfait on obtient le lemme.

Théorème 11.6–2. — *Soient $j : U \hookrightarrow X$ le complémentaire d'une hypersurface Y et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome. Alors le morphisme naturel :*

$$c_Y(\mathscr{M}) : \mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y) \longrightarrow j_* j^{-1}\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y) = j_*\mathscr{D}_U^\infty \otimes_{\mathscr{D}_U} \mathscr{M}_U$$

est un isomorphisme si et seulement si le module $\mathscr{M}$ est régulier le long de Y.

Démonstration. — En vertu du lemme précédent on peut remplacer le module image directe $j_* j^{-1}\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y)$ par le complexe $\mathbf{R}j_* j^{-1}\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y)$. Si le morphisme $c_Y(\mathscr{M})$ est un isomorphisme, en prenant les complexes de de Rham on trouve que le morphisme $a_Y(\mathscr{M})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{DR}(\mathscr{M}(*Y)) \simeq \mathbf{DR}(\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y)) &\simeq \mathbf{DR}(\mathbf{R}j_* j^{-1}\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y))\\ &\simeq \mathbf{R}j_* j^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathscr{M}(*Y))\end{aligned}$$

est un isomorphisme et donc que le faisceau $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})$ est nul par construction.

En vertu du corollaire de bidualité 11.4–7 on a l'isomorphisme :

$$\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y) \simeq \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}(*Y), \mathscr{O}_X)).$$

Si le faisceau $\mathrm{Irr}_Y^*(\mathscr{M})$ est nul, les morphismes naturels sont des isomorphismes :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}(*Y), \mathscr{O}_X)) &\longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(j_! j^{-1}\,\mathbf{S}(\mathscr{M}(*Y), \mathscr{O}_X))\\ &\simeq \mathbf{R}j_* j^{-1}\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbf{S}(\mathscr{M}(*Y), \mathscr{O}_X)) \simeq \mathbf{R}j_* j^{-1}\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y).\end{aligned}$$

D'où le théorème.

Dans ce contexte le théorème de positivité se traduit par :

Théorème 11.6–3. — *Soit un triplet $(X, Y, \mathscr{M})$ où X est variété analytique complexe, Y une hypersurface et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module holonome, alors les faisceaux de cohomologie locale*

$$\mathscr{H}_Y^i(\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y))$$

sont nuls pour $i \neq 0$ et l'on a l'isomorphisme canonique

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^\infty}(\Gamma_Y(\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y)), \mathscr{O}_X) \simeq \mathrm{Irr}_Y^*(\mathscr{M}).$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que la nullité des faisceaux

$$\mathscr{H}^i_Y(\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y))$$

pour $i \geqslant 2$ est conséquence du lemme 11.6–1. Seule la nullité du faisceau

$$\mathscr{H}^1_Y(\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y))$$

est non triviale mais *hautement non triviale*. On a le triangle de cohomologie locale :

$$\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y)) \longrightarrow \mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y) \longrightarrow \mathbf{R}j_*j^{-1}(\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y)).$$

En prenant le complexe de de Rham on trouve un triangle :

$$\begin{aligned}\mathbf{DR}(\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y))) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y))&\\ \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathbf{R}j_*j^{-1}(\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y)))&\end{aligned}$$

qui montre que le complexe

$$\mathbf{DR}(\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y)))$$

est isomorphe au faisceau $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})$. Maintenant le théorème résulte de deux points non triviaux. Soit le module holonome $\mathscr{M}_r$ régulier tel que :

$$\mathbf{S}(\mathscr{M}(*Y)) \simeq \mathbf{S}(\mathscr{M}_r).$$

Alors en vertu du corollaire de bidualité 11.4–7 on a les isomorphismes

$$\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y)) \simeq \mathbf{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}_r).$$

Mais le morphisme $c_Y(\mathscr{M}_r)$ est un isomorphisme puisqu'en particulier $\mathscr{M}_r$ est régulier le long de Y. Ceci se traduit par l'isomorphisme :

$$\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Y(\mathscr{M}_r) \simeq \mathbf{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}_r).$$

On a alors l'isomorphisme :

$$\mathbf{DR}(\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Y(\mathscr{M}_r)) \simeq \mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M}).$$

Comme $\mathrm{Irr}_Y(\mathscr{M})$ est un faisceau au sens dérivé cela force le complexe $\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_Y(\mathscr{M}_r)$ d'être concentré en degré zéro et donc le complexe $\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y))$ est concentré en degré zéro.

Définition 11.6–4. — On appelle module d'irrégularité de $\mathscr{M}$ le long de Y le module holonome d'ordre infini

$$\mathscr{I}rr_Y(\mathscr{M}) := \Gamma_Y(\mathscr{D}^\infty_X \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y)).$$

Son complexe des solutions est isomorphe au faisceau $\mathrm{Irr}^*_Y(\mathscr{M})$. Le foncteur

$$\mathscr{I}rr_Y : \mathrm{Mh}(\mathscr{D}_X) \longrightarrow \mathrm{Mh}(\mathscr{D}^\infty_X)$$

est un foncteur exact de la catégorie abélienne des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes dans la catégorie abélienne des $\mathscr{D}^\infty_X$-modules holonomes

Autrement dit on a une suite exacte de $\mathscr{D}_X^\infty$-modules holonomes :

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}rr_Y(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y) \longrightarrow j_*j^{-1}(\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}(*Y)) \longrightarrow 0.$$

Le critère fondamental de la régularité prend la forme suivante :

Théorème 11.6–5. — *Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome sur X lisse sur U le module $\mathscr{I}rr_Y(\mathscr{M})$ est nul si et seulement si son support est au moins de codimension* 1 *dans Y.*

Exemple 11.6–6. — Le conoyau du morphisme

$$\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{O}_X(*Y) \longrightarrow j_*j^{-1}\mathscr{O}_X$$

qui est le faisceau

$$\mathscr{H}^1_{\mathrm{sing}(Y)}(\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{O}_X(*Y))$$

est nul en vertu du théorème de positivité et son noyau qui est le faisceau

$$\Gamma_{\mathrm{sing}(Y)}(\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{O}_X(*Y))$$

est nul en vertu du théorème de comparaison.

Même dans le cas d'une singularité isolée ce résultat est non trivial. Plus généralement dans la situation des connexions méromorphes le faisceau

$$\Gamma_{\mathrm{sing}(Y)}(\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathscr{F}^\sigma(*Y))$$

associé à un système local sur U est nul.

Rappelons encore une fois que le théorème précédent est indépendant du théorème de la résolution des singularités.

Remarque 11.6–7. — C'est la difficulté à montrer le résultat précédent à l'aide de la résolution des singularités qui nous a permis de formuler le théorème de comparaison à l'aide des opérateurs différentiels d'ordre infini en 1974. Il nous est particulièrement agréable de constater qu'on peut démontrer aujourd'hui ce théorème de comparaison sans l'aide du théorème de la résolution des singularités.

Remarque 11.6–8. — Les résultats précédents sont, comme on le voit, hautement non triviaux. Il est sans doute intéressant de trouver d'autres démonstrations qui fond appel à d'autres notions et le lien avec d'autres théories.

Par exemple en utilisant le critère topologique de la régularité introduit dans [**M-N2**] on montre dans ce même article que le morphisme $c_Y(\mathscr{M})$ est un isomorphisme si en tout point de Y, le $\mathscr{D}_X$-module holonome $\mathscr{M}$ admet une équation fonctionnelle régulière. Mais le problème du critère de l'existence d'une équation fonctionnelle régulière est encore ouvert à notre connaissance [**L-M**].

Références

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck & J.-L. Verdier – *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1963-64, Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas*, Lect. Notes in Math., vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-73.

[C] F. Castro – « Exercices sur le complexe de de Rham et l'image directe des $\mathscr{D}$-modules », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 46, Hermann, Paris, 1993, p. 15–45.

[D1] P. Deligne – *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes in Math., vol. 163, Springer-Verlag, 1970.

[D2] ———, « La Conjecture de Weil I », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **43** (1974), p. 273–307.

[D3] ———, « La Conjecture de Weil II », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **52** (1981), p. 313–428.

[Di] J. Dieudonné – *A History of Algebraic and Differential Topology. 1900-1960*, Birkhaüser, Boston, 1989.

[G-M] M. Granger & Ph. Maisonobe – « A basic course on differential modules », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 45, Hermann, Paris, 1993, p. 103–168.

[G1] A. Grothendieck – « Formule de Lefschetz et Rationalité des fonctions L », in *Séminaire Bourbaki*, 1965, exposé 279.

[G2] ———, « On the de Rham cohomology of algebraic varieties », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **29** (1966), p. 95–105.

[G3] ———, « Crystals and De Rham cohomology of schemes », in *Dix exposés sur la Cohomologie des Schémas*, Advanced Studies in pures Math., vol. 3, North-Holland, 1968, p. 306–358.

[SGA1] ———, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960-61, Revêtements Étales et Groupe Fondamental*, Lect. Notes in Math., vol. 224, Springer-Verlag, 1971.

[SGA2] ———, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 2, North Holland Company, Amsterdam/Masson & Cie Éditeurs, Paris, 1968.

[SGA5] ———, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1965-66, Cohomologie ℓ-adique et fonctions L*, Lect. Notes in Math., vol. 589, Springer-Verlag, 1977.

[H] H. Hironaka – « Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a field of characteristic zero », *Ann. of Math.* **79** (1964), p. 109–326.

[K] M. Kashiwara – « On the maximally overdetermined systems of differential equations », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **10** (1975), p. 563–579.

[L-M] Y. Laurent & Z. Mebkhout – « Pentes algébriques et pentes analytiques d'un $\mathscr{D}_X$-module », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4$^{\text{e}}$ *série* **32** (1999), p. 39–69.

[M-T] Ph. Maisonobe & T. Torrelli – « Image inverse en théorie des $\mathscr{D}$-modules », ce volume.

[Ma] B. Malgrange – « De Rham Complex and Direct Images of $\mathscr{D}$-Modules », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 46, Hermann, Paris, 1993, p. 1–13.

[M1] Z. Mebkhout – « Le théorème de comparaison entre cohomologies de de Rham d'une variété algébrique complexe et le théorème d'existence de Riemann », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **69** (1989), p. 47–89.

[M2] ———, « Le théorème de positivité de l'irrégularité pour les $\mathscr{D}_X$-modules », in *The Grothendieck Festschrift*, Progress in Math., vol. 88, no. 3, Birkhäuser, Basel, Boston, 1990, p. 83–131.

[M-N1] Z. Mebkhout & L. Narváez-Macarro – « Le théorème de constructibilité de Kashiwara », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 46, Hermann, Paris, 1993, p. 47–98.

[M-N2] ———, « Le Théorème de continuité de la division dans les anneaux d'opérateurs différentiels », *J. reine angew. Math.* **503** (1998), p. 193–236.

[N] L. Narváez-Macarro – « Local duality Theorem », ce volume.

[L-N] L. Narváez-Macarro & A. Rojas León – « Continous division of linear differential operators and faithful flatness of $\mathscr{D}_X^\infty$ over $\mathscr{D}_X$ », ce volume.

[SKK] M. Sato, M. Kashiwara & T. Kawai – « Microfunctions and pseudo-differential equations », in *Hyperfunctions and pseudo-differential equations, Proc. Conf. Katata, (1971)*, Lect. Notes in Math., vol. 287, Springer-Verlag, 1973, p. 265–529.

[S] J.-P. Serre – « Géométrie algébrique et géométrie analytique », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **6** (1956), p. 1–42.

[V] J.-L. Verdier – « Classe d'homologie associée à un cycle », in *Séminaire de l'École Normale supérieure (1974-75)*, Astérisque, vol. 36-37, Société Mathématique de France, 1976, p. 101–151.

[W] A. Weil – « Number of solutions of equations over finite fields », *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), p. 497–508.

Liste des notations

Index

Z. Mebkhout, UFR de Mathématiques, Université de Paris 7, 175 rue du Chevaleret, F-75013 Paris
E-mail : mebkhout@math.jussieu.fr