Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 517.957

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, ЛОКАЛЬНО БЛИЗКИХ К ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. II

А. П. Копылов

Аннотация: Настоящая работа является второй и завершающей статьей цикла работ автора, посвященных тематике, которая представлена в их названии. Первая статья опубликована в «Сибирском математическом журнале» (см. Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 861–879).

В данной статье получена равномерная оценка q-норм, $q \geq 2$, сингулярных интегральных операторов $\overline{P}$, которые естественно возникают при дифференцировании интегральных представлений отображений пространств Соболева W_q^1, построенных на основе фундаментальных решений операторов, сопряженных эллиптическим линейным дифференциальным операторам первого порядка с постоянными коэффициентами (см. теорему 1 статьи).

Кроме того, рассмотрен ряд утверждений, дополняющих и в ряде важных случаев усиливающих основной результат цикла — теорему о W_q^l-регулярности, $l = 1, 2, \ldots$, решений изучаемых в нем систем дифференциальных уравнений (т. е. теорему 1 первой статьи). Библиогр. 6.

Данная статья представляет собой вторую и завершающую часть цикла наших работ, посвященных исследованию W_q^l-регулярности решений (вообще говоря) нелинейной системы уравнений в частных производных

$$\begin{gathered}
\mathfrak{L}_j(x; f(x); f'(x); \ldots; f^{(l)}(x)) \\
= V_j(x; f(x); f'(x); \ldots; f^{(l)}(x)) + T_j(x; f(x); f'(x); \ldots; f^{(l-1)}(x)) = 0, \\
T_j(x; v^0; v^1; \ldots; v^{l-1}) = \mathfrak{L}_j(x; v^0; v^1; \ldots; v^{l-1}; 0), \quad j = 1, \ldots, k, \\
f : U \to \mathbb{R}^m, \quad U \text{ — открытое множество в } \mathbb{R}^n,
\end{gathered} \tag{1}$$

l-го порядка такой, что для почти всех $x \in U$ отображение $T(x; \cdot) = (T_1(x; \cdot), \ldots, T_k(x; \cdot))$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left|T\left(x; v'_{l-1}\right) - T\left(x; v''_{l-1}\right)\right| \leq E(x)\left|v'_{l-1} - v''_{l-1}\right|,$$

где E — вещественная функция, локально суммируемая в U в степени $q_0 > n$. В [1] мы доказали теорему, гласящую о том, что если оператор $V = (V_1, \ldots, V_k)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Международной Ассоциации INTAS (коды проектов 99–01–00517 и IR–97–0170) и государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (код проекта 96–15–96291).

© 2000 Копылов А. П.

локально достаточно близок к эллиптическим линейным дифференциальным операторам с постоянными коэффициентами, то каждое решение $f : U \to \mathbb{R}^m$ системы (1), принадлежащее пространству Соболева[1)] $W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$, где $q > n$, является также и ее $W^l_{q_0,\mathrm{loc}}$-решением. При этом отображение $\mathfrak{L}$ не предполагается априори непрерывным ($\mathfrak{L}$ удовлетворяет условиям (i)–(iv) статьи [1] и мыслится как «лучший» представитель класса вектор-функций, эквивалентных $\mathfrak{L}$ с точки зрения теории интеграла).

Замечание. По поводу точных постановки задачи и формулировки упомянутой теоремы мы отсылаем читателя к статье [1].

В доказательстве теоремы 1 работы [1] мы использовали следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует положительная функция* $X = X_{n,m,k} :]1, +\infty[\to]0, +\infty[$ *такая, что*

$$\Upsilon_q(D) \le qX(t), \quad 2 \le q < +\infty,\ 1 < t < +\infty, \tag{2}$$

для каждого эллиптического линейного дифференциального оператора

$$D = (D_1, \dots, D_k) = \sum_{s=1}^{n} a_s \partial_s$$

первого порядка, где ∂_s *— символ частной производной по* s*-му переменному и* $a_s = \left(a_s^{j\varkappa}\right)_{\substack{j=1,\dots,k \\ \varkappa=1,\dots,m}}$ *— вещественная* $k \times m$*-матрица, удовлетворяющего условиям*

$$\left|a_s^{j\varkappa}\right| \le t, \tag{3}$$

$j = 1, \dots, k$, $\varkappa = 1, \dots, m$, $s = 1, \dots, n$, *и*

$$\inf_{\substack{\zeta \in \mathbb{R}^n,\, v \in \mathbb{R}^m, \\ |\zeta|=1,\, |v|=1}} \left| \sum_{s=1}^{m} \zeta_s a_s v \right| \ge 1/t \tag{4}$$

($t > 1$).

Здесь

$$\Upsilon_q(D) = \Upsilon_q^{n,k}(D) = \sup_{h \in L_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k),\, \|h\|_q = 1} \|\overline{P}h\|_q$$

($\|h\|_q = \left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h(y)|^q dy\right\}^{1/q} = \left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{j=1}^k |h_j(y)|^2\right]^{q/2} dy\right\}^{1/q}$) — q-норма сингулярного интегрального оператора $\overline{P} = (\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_n)$,

$$(\overline{P}_j h)(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} H_D(y - x) \right\}^T h(y)dy - \left[\int\limits_{|y|=1} y_j \{H_D(y)\}^T ds \right] h(x), \tag{5}$$

$j = 1, \dots, n$, где $\{\cdot\}^T$ — операция транспонирования матриц, первый из интегралов справа строится для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ в смысле главного значения по Коши и $H_D = DU$, причем U, в свою очередь, — (матричнозначное) фундаментальное решение эллиптического линейного дифференциального оператора $L = D^*D$ второго порядка с постоянными коэффициентами (D^* — формально

[1)] Пространство $W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$ состоит из отображений $f = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ таких, что каждая из функций-компонент $f_\varkappa$, $\varkappa = 1, \dots, m$, обладает обобщенными по Соболеву частными производными [2] порядка l, локально суммируемыми в U в степени q.

сопряженный к D оператор), которое при $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ определяется на основе символа[2)] σ_L оператора L формулами:

$$U(y) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{4(2\pi)^{n-1}} \Delta^{(n-1)/2} \int\limits_{|\zeta|=1} |\langle y, \zeta\rangle| \sigma_L^{-1}(\zeta) ds_\zeta, \tag{6}$$

если n нечетно, и

$$U(y) = \frac{(-1)^{n/2}}{2(2\pi)^n} \Delta^{n/2} \int\limits_{|\zeta|=1} |\langle y, \zeta\rangle|^2 \ln |\langle y, \zeta\rangle| \sigma_L^{-1}(\zeta) ds_\zeta, \tag{7}$$

если n четно. В (6) и (7) Δ^ν — «итерированный лапласиан», интегралы (равно как и второй из интегралов справа в (5)) вычисляются по единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ относительно поверхностной меры и $\sigma_L^{-1} : \zeta \mapsto [\sigma_L(\zeta)]^{-1}$ — отображение, ставящее в соответствие точке ζ матрицу $[\sigma_L(\zeta)]^{-1}$, обратную матрице $\sigma_L(\zeta)$. Заметим, что в силу определения отображения σ_L^{-1} оно связано с символом σ_D оператора D соотношением

$$\sigma_L^{-1}(\zeta) = [-\{\sigma_D(\zeta)\}^T \sigma_D(\zeta)]^{-1}. \tag{8}$$

В настоящей работе мы излагаем доказательство теоремы 1, а также рассматриваем ряд утверждений, тесно примыкающих к теореме 1 статьи [1].

Доказательство теоремы 1. Предположим сначала, что n — четное число, и, рассматривая эллиптический линейный дифференциальный оператор D первого порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющий условиям (3) и (4) теоремы, и используя формулы (5)–(8), построим на его основе сингулярный интегральный оператор $\overline{P}$, оценивание q-нормы которого является целью доказательства.

Дифференцируя под знаком интеграла в (7) и совершая замену переменных посредством линейного ортогонального преобразования $h^x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$h^x(\zeta) = \zeta + 2\frac{\langle \zeta, e_1\rangle}{|x|} x - \frac{\langle \zeta, x + |x| e_1\rangle}{|x|(|x| + x_1)}(x + |x| e_1), \quad \zeta \in \mathbb{R}^n \tag{9}$$

($e_1, \dots, e_n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, $\langle z^1, z^2\rangle = \sum\limits_{s=1}^n z_s^1 z_s^2$, $z^j = (z_1^j, \dots, z_n^j) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$), переводящего вектор e_1 в вектор $x/|x|$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_1 \neq -|x|$, мы приходим к следующим соотношениям (для таких x):

$$U(x) = \frac{(-1)^{n/2}}{2(2\pi)^n} \Delta^{n/2-1} \int\limits_{|\zeta|=1} \{2\ln|\langle x, \zeta\rangle| + 3\} \sigma_L^{-1}(\zeta) ds_\zeta = \frac{(-1)^{n/2}}{2(2\pi)^n} \Delta^{n/2-1} \Bigg\{ 2(\ln|x|)$$
$$\times \int\limits_{|\zeta|=1} \sigma_L^{-1}(\zeta) ds_\zeta + 2 \int\limits_{|\zeta|=1} (\ln|\zeta_1|) \sigma_L^{-1}(h^x(\zeta)) ds_\zeta + 3 \int\limits_{|\zeta|=1} \sigma_L^{-1}(\zeta) ds_\zeta \Bigg\}. \tag{10}$$

В том случае, когда $n \geq 4$, U, учитывая (10), можно представить еще и так:

$$U(x) = \frac{(-1)^{n/2}}{2(2\pi)^n} \Bigg\{ (-1)^{n/2} 2^{n-3}(n-2)[(n/2-2)!]^2 \frac{1}{|x|^{n-2}} \int\limits_{|\zeta|=1} \sigma_L^{-1}(\zeta) ds_\zeta$$
$$+ 2 \int\limits_{|\zeta|=1} (\ln|\zeta_1|) \Delta_x^{n/2-1} \big[\sigma_L^{-1}(h^x(\zeta))\big] ds_\zeta \Bigg\} \tag{11}$$

[2)] Относительно этого понятия см., например, [1, 3].

($x_1 \neq -|x|$), где Δ_x — оператор Лапласа по переменному x.

Применяя математическую индукцию, не составляет труда доказать, что (при $n \geq 4$ и $x \neq -|x|e_1$) имеет место равенство[3)]

$$\Delta_x^{n/2-1}\big[\sigma_L^{-1}(h^x(\zeta))\big] = \frac{1}{|x|^{n-2}} \sum_{1\leq|p|\leq n-2} \partial^p \sigma_L^{-1}(h^x(\zeta)) \sum_{|q|=|p|} \frac{\zeta^q \mathscr{P}_{p,q}(X)}{(1+X_1)^{2n-4}}, \tag{12}$$

$X = \frac{x}{|x|}$, в котором $\mathscr{P}_{p,q}$ — многочлены, $\deg \mathscr{P}_{p,q} \leq 2n-4$, причем от отображения σ_L^{-1} эти многочлены не зависят (а определяются только лишь отображениями h^x из (9) и правилами дифференцирования композиции). Тем самым в силу (11) и (12)

$$U(x) = \frac{(-1)^{n/2}}{2(2\pi)^n|x|^{n-2}}\bigg\{(-1)^{n/2}2^{n-3}(n-2)[(n/2-2)!]^2 \int\limits_{|\zeta|=1} \sigma_L^{-1}(\zeta)ds_\zeta$$

$$+ 2\int\limits_{|\zeta|=1} (\ln|\zeta_1|) \sum_{1\leq|p|\leq n-2} \partial^p \sigma_L^{-1}(h^{x,1}(\zeta)) \sum_{|q|=|p|} \frac{\zeta^q \mathscr{P}_{p,q}(X)}{(1+X_1)^{2n-4}} ds_\zeta\bigg\}, \tag{13}$$

$n \geq 4$, $x_1 \neq -|x|$ ($X_1 \neq -1$), $h^{x,1} = h^x$. Заметим, что второму из интегралов в (13) можно придать еще и такой вид:

$$\int\limits_{|\zeta|=1} (\ln|\zeta_2|) \sum_{1\leq|p|\leq n-2} \partial^p \sigma_L^{-1}(h^{x,2}(\zeta)) \sum_{|q|=|p|} \frac{\zeta^q \mathring{\mathscr{P}}_{p,q}(X)}{(1+X_2)^{2n-4}} ds_\zeta, \tag{14}$$

если $x_2 \neq -|x|$. Здесь

$$h^{x,2}(\zeta) = \zeta + 2\frac{\langle\zeta, e_2\rangle}{|x|}x - \frac{\langle\zeta, x+|x|e_2\rangle}{|x|(|x|+x_2)}(x+|x|e_2), \quad \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

Далее нам потребуется следующее (C^∞-гладкое) разбиение единицы $\{\tilde\Lambda_1, \tilde\Lambda_2\}$ для единичной сферы $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$, подчиненное открытому покрытию $\{S\setminus\{-e_1\}, S\setminus\{-e_2\}\}$ этой сферы:

$$\tilde\Lambda_1(x) = \Lambda_1(x), \quad \tilde\Lambda_2(x) = \Lambda_2(x)[1-\Lambda_1(x)], \quad x \in S, \tag{15}$$

где

$$\Lambda_1(x) = a^{-1}r^{1-n}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_r\bigg(\frac{2x_2}{x_1+1} - y_1, \ldots, \frac{2x_n}{x_1+1} - y_{n-1}\bigg)\chi_r(y_1,\ldots,y_{n-1})dy_1\ldots dy_{n-1},$$

$$\Lambda_2(x) = a^{-1}r^{1-n}$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_r\bigg(\frac{2x_1}{x_2+1} - y_1, \frac{2x_3}{x_2+1} - y_2, \ldots, \frac{2x_n}{x_2+1} - y_{n-1}\bigg)\chi_r(y_1,\ldots,y_{n-1})dy_1\ldots dy_{n-1},$$

$\Lambda_s(-e_s) = 0$, $s = 1, 2$, причем $r = 2(\sqrt{2}+1)$, $a = \int\limits_{|y|<1} e^{\frac{|y|^2}{|y|^2-1}} dy_1\ldots dy_{n-1}$, $\omega_r(y) =$ $\omega_r(y_1,\ldots,y_{n-1}) = e^{\frac{|y|^2}{|y|^2-r^2}}$, если $|y| = \Big\{\sum\limits_{s=1}^{n-1} y_s^2\Big\}^{1/2} < r$, и $\omega_r(y) = 0$, если $|y| \geq r$,

[3)] Суммирование в (12) осуществляется по множеству мультииндексов p, q таких, что $1 \leq |p| \leq n-2$ и $|q| = |p|$.

и χ_r — характеристическая функция шара $B(0,2r)$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ ($\chi_r(x)=1$ при $x\in B(0,2r)$ и $\chi_r(x)=0$ при $x\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus B(0,2r)$). Обращаем внимание читателя на то, что

$$\operatorname{supp}\Lambda_\varkappa\subset\left\{x\in S\mid 1+x_\varkappa\geq\frac{8}{4+9r^2}=\frac{2}{1+9(\sqrt{2}+1)^2}\right\},\quad \varkappa=1,2. \tag{16}$$

Используя соотношения (10) (при $n=2$), (13) и (14) (при $n\geq 4$) и разбиение единицы (15) для сферы S, мы приходим к представлениям

$$\begin{aligned}H(x)=H_D(x)=DU(x)=\sum_{s=1}^n\sigma_D(e_s)\partial_sU(x)=\frac{(-1)^{n/2}}{2(2\pi)^n|x|^{n-1}}\Bigg\{c_n\sigma_D(X)\\ \times\int\limits_{|\zeta|=1}\sigma_L^{-1}(\zeta)ds_\zeta+2\sum_{\varkappa=1}^2\int\limits_{|\zeta|=1}(\ln|\zeta_\varkappa|)\sum_{1\leq|p|\leq n-1}\sum_{s=1}^n\sigma_D(e_s)\partial^p\sigma_L^{-1}(h^{x,\varkappa}(\zeta))\\ \times\sum_{|q|=|p|}\zeta^q\tilde{\Lambda}_\varkappa(X)\frac{\mathscr{P}^\varkappa_{p,q,s}(X)}{(1+X_\varkappa)^{2n-2}}ds_\zeta\Bigg\}\end{aligned} \tag{17}$$

и

$$\begin{aligned}\partial_jH(x)=\frac{(-1)^{n/2}}{2(2\pi)^n|x|^n}\Bigg\{-nc_n\left[X_j\sigma_D(X)-\frac{1}{n}\sigma_D(e_j)\right]\int\limits_{|\zeta|=1}\sigma_L^{-1}(\zeta)ds_\zeta\\ +2\sum_{\varkappa=1}^2\int\limits_{|\zeta|=1}(\ln|\zeta_\varkappa|)\sum_{1\leq|p|\leq n}\sum_{s=1}^n\sigma_D(e_s)\partial^p\sigma_L^{-1}(h^{x,\varkappa}(\zeta))\\ \times\sum_{|q|=|p|}\zeta^q\tilde{\Lambda}_\varkappa(X)\frac{\mathscr{P}^{j,\varkappa}_{p,q,s}(X)}{(1+X_\varkappa)^{2n}}ds_\zeta\Bigg\},\end{aligned} \tag{18}$$

если $x\neq 0$. Здесь $c_n=(-1)^{n/2+1}2^{n-3}(n-2)^2(n/2-2)!$ в случае, когда $n\geq 4$, $c_2=2$ и $\mathscr{P}^\varkappa_{p,q,s}$ и $\mathscr{P}^{j,\varkappa}_{p,q,s}$ — многочлены, которые (как и многочлены $\mathscr{P}_{p,q}$ в (13)) от σ_L^{-1} не зависят.

Учитывая теперь равенство $\partial_s\sigma_L^{-1}(\zeta)=-\sigma_L^{-1}(\zeta)\partial_s\sigma_L(\zeta)\sigma_L^{-1}(\zeta)$ и то обстоятельство, что $\partial^q\sigma_L(\zeta)=0$, если $|q|\geq 3$, и применяя математическую индукцию, мы убеждаемся в истинности соотношения

$$\begin{aligned}&\partial^p\sigma_L^{-1}(\zeta)=[(\partial_1)^{p_1}\circ\dots\circ(\partial_n)^{p_n}]\sigma_L^{-1}(\zeta)\\ &=\sigma_L^{-1}(\zeta)\sum_{\substack{(p^1,\dots,p^\nu),\,\nu\leq|p|,\\ 1\leq|p^\lambda|\leq 2,\,p^\lambda_s\leq\min\{p_s,2\},\\ p^1_s+\dots+p^\nu_s=p_s,\\ \lambda=1,\dots,\nu,\,s=1,\dots,n}}(-1)^{\left\{\sum\limits_{|p^\lambda|=1}|p^\lambda|\right\}}\prod_{\lambda=1}^\nu\left\{[\partial^{p^\lambda}\sigma_L(\zeta)]\sigma_L^{-1}(\zeta)\right\},\end{aligned} \tag{19}$$

где суммирование распространяется на все упорядоченные наборы $(p^1,\dots,p^\nu)$, $\nu\leq|p|$, мультииндексов $p^\lambda=\left(p^\lambda_1,\dots,p^\lambda_n\right)$ таких, что $1\leq|p^\lambda|\leq 2$, $p^\lambda_s\leq\min\{p_s,2\}$, $p^1_s+\dots+p^\nu_s=p_s$ ($\lambda=1,\dots,\nu$; $s=1,\dots,n$).

Отправляясь от соотношений (19), оценим (операторную) норму $\left\|\partial^p\sigma_L^{-1}(\zeta)\right\|$ матрицы $\partial^p\sigma_L^{-1}(\zeta)$, $p\in\mathbb{N}^n$. С этой целью заметим сначала, что в силу (8)

$$\|\partial_s\sigma_L(\zeta)\|=\|-\{\sigma_D(e_s)\}^T\sigma_D(\zeta)-\{\sigma_D(\zeta)\}^T\sigma_D(e_s)\|\leq 2\|\sigma_D(e_s)\|\cdot\|\sigma_D(\zeta)\|$$

и

$$\|\partial_{js}\sigma_L(\zeta)\| = \| - \{\sigma_D(e_s)\}^T\sigma_D(e_j) - \{\sigma_D(e_j)\}^T\sigma_D(e_s)\| \leq 2\|\sigma_D(e_j)\| \cdot \|\sigma_D(e_s)\|.$$

Принимая во внимание еще и то, что

$$\|\sigma_D(\zeta)\| = \left\|\sum_{s=1}^n \zeta_s\sigma_D(e_s)\right\| \leq \sum_{s=1}^n |\zeta_s|\|\sigma_D(e_s)\| \leq |\zeta|\left[\sum_{s=1}^n \|\sigma_D(e_s)\|^2\right]^{1/2}$$
$$\leq \left[\sum_{s=1}^n\sum_{\gamma=1}^k\sum_{\delta=1}^m \left(a_s^{\gamma\delta}\right)^2\right]^{1/2} \leq (nmkt^2)^{1/2}, \quad (20)$$

если $|\zeta| = 1$ ($a_s^{\gamma\delta}$ — коэффициенты оператора D, причем в силу (3) $\left|a_s^{\gamma\delta}\right| \leq t$), имеем

$$\|\partial^{p^\lambda}\sigma_L(\zeta)\| \leq 2nmkt^2, \quad |p^\lambda| \leq 2. \quad (21)$$

С другой стороны, если $|\zeta| = 1$, то из (4) вытекает, что

$$\left\|\sigma_L^{-1}(\zeta)\right\| = \{\min_{v\in\mathbb{R}^m,\,|v|=1} |\sigma_L(\zeta)v|\}^{-1} = \{\min_{|v|=1} |\sigma_D(\zeta)v|\}^{-2}$$
$$\leq \{\min_{v\in\mathbb{R}^m,\,\zeta\in\mathbb{R}^n,\,|v|=1,\,|\zeta|=1} |\sigma_D(\zeta)v|\}^{-2} \leq t^2. \quad (22)$$

Таким образом, в силу соотношений (19), (21) и (22)

$$\left\|\partial^p\sigma_L^{-1}(\zeta)\right\| \leq \left\|\sigma_L^{-1}(\zeta)\right\| \sum_{\nu=0}^{[|p|/2]} \frac{|p|!(|p|-\nu)!}{(2\nu)!(|p|-2\nu)!}\left\{2nmkt^2\left\|\sigma_L^{-1}(\zeta)\right\|\right\}^{|p|-\nu}$$
$$\leq t^2 \sum_{\nu=0}^{[|p|/2]} \frac{|p|!(|p|-\nu)!}{(2\nu)!(|p|-2\nu)!}(2nmkt^4)^{|p|-\nu} = t^2 g_{|p|}(t), \quad (23)$$

$|\zeta| = 1$ ($[|p|/2]$ — наибольшее из целых чисел μ таких, что $\mu \leq |p|/2$).

Соотношения (16), (20), (22) и (23) (вместе с соотношениями (17)) позволяют нам оценить норму матрицы $\{H(x)\}^T$, $|x| = 1$, следующим образом:

$$\|\{H(x)\}^T\| = \|H(x)\| \leq \frac{(nmkt^6)^{1/2}}{2(2\pi)^n} \max_{|x|=1}\left\{nv_n|c_n| + 2\beta_n\gamma_n \sum_{1\leq|p|\leq n-1} g_{|p|}(t)\right.$$
$$\left.\times \sum_{|q|=|p|}\sum_{\varkappa=1}^2\left[\sum_{s=1}^n\left|\mathscr{P}_{p,q,s}^{\varkappa}(x)\right|^2\right]^{1/2}\right\} = C^0(t) = C^0_{n,m,k}(t). \quad (24)$$

Здесь v_n — объем n-мерного единичного шара, $\beta_n = \pi(n-1)v_{n-1}\ln 2$ и $\gamma_n = \{[1 + 9(\sqrt{2}+1)^2]/2\}^{2n-2}$, причем при выводе соотношений (24) мы учли, что

$$\left|\int_{|\zeta|=1} \ln|\zeta_\varkappa|\,ds\right| \leq (n-1)v_{n-1}\left|\int_0^\pi \ln|\cos\theta|\,d\theta\right| = \beta_n.$$

В силу (24) для второго из слагаемых справа в (5) имеем

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left[\int_{|y|=1} y_j\{H(y)\}^T ds\right]h(x)\right|^{q_0} dx\right\}^{1/q_0} \leq \left\{\int_{|y|=1} \|H(y)\|\,ds\right\}\|h\|_{q_0,\mathbb{R}^n}$$
$$\leq C^0(t)nv_n\|h\|_{q_0,\mathbb{R}^n}. \quad (25)$$

Обратимся теперь к изучению первого слагаемого в правой части соотношений (5). С этой целью запишем его в следующем виде:

$$(P_jh)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega_j(x-y)}{|x-y|^n}h(y)\,dy,$$

где $\Omega_j(y)=\left(\Omega_j^{\mu\theta}(y)\right)_{\substack{\mu=1,\dots,m\\ \theta=1,\dots,k}}=-|y|^n[\partial_jH(y)]^T$, а $\partial_jH(y)$, в свою очередь, представлено соотношением (18). При этом для производных $\partial_i\Omega_j(y)$ имеет место представление того же типа, что и представления (13), (17) и (18) для U, H и ∂_jH:

$$[\partial_i\Omega_j(y)]^T=\frac{(-1)^{n/2}}{2(2\pi)^n|y|}\Biggl\{nc_n\biggl[\biggl(\partial_iy_j-2\frac{y_iy_j}{|y|^2}\biggr)\sigma_D\biggl(\frac{y}{|y|}\biggr)+\frac{y_j}{|y|}\sigma_D(e_i)\biggr]$$

$$\times\int\limits_{|\zeta|=1}\sigma_L^{-1}(\zeta)\,ds_\zeta-2\sum_{\varkappa=1}^{2}\int\limits_{|\zeta|=1}(\ln|\zeta_\varkappa|)\sum_{1\le|p|\le n+1}\sum_{s=1}^{n}\sigma_D(e_s)\partial^p\sigma_L^{-1}(h^{y,\varkappa}(\zeta))$$

$$\times\sum_{|q|=|p|}\zeta^q\tilde{\Lambda}_\varkappa\biggl(\frac{y}{|y|}\biggr)\frac{\mathscr{P}^{i,j,\varkappa}_{p,q,s}\bigl(\frac{y}{|y|}\bigr)}{\bigl(1+\frac{y_\varkappa}{|y|}\bigr)^{2n+2}}\,ds_\zeta\Biggr\},\qquad(26)$$

в котором $\mathscr{P}^{i,j,\varkappa}_{p,q,s}$ — многочлены, не зависящие от σ_L^{-1} и, следовательно, от оператора D. Тем самым из (18) и (26) в силу вышеизложенного вытекает, что при $y\in S$

$$\|\Omega_j(y)\|\le\frac{(nmkt^6)^{1/2}}{2(2\pi)^n}\max_{1\le j\le n}\max_{|y|=1}\Biggl\{n(n+1)v_n|c_n|\qquad(27)$$

$$+2\beta_n\gamma_{n+1}\sum_{1\le|p|\le n}g_{|p|}(t)\sum_{|q|=|p|}\sum_{\varkappa=1}^{2}\Biggl[\sum_{s=1}^{n}\bigl|\mathscr{P}^{j,\varkappa}_{p,q,s}(y)\bigr|^2\Biggr]^{1/2}\Biggr\}=C^1(t)=C^1_{n,m,k}(t)$$

и

$$\|\partial_i\Omega_j(y)\|\le\frac{(nmkt^6)^{1/2}}{(2\pi)^n}\max_{1\le i,j\le n}\max_{|y|=1}\Biggl\{n^2v_n|c_n|\qquad(28)$$

$$+\beta_n\gamma_{n+2}\sum_{1\le|p|\le n+1}g_{|p|}(t)\sum_{|q|=|p|}\sum_{\varkappa=1}^{2}\Biggl[\sum_{s=1}^{n}\bigl|\mathscr{P}^{i,j,\varkappa}_{p,q,s}(y)\bigr|^2\Biggr]^{1/2}\Biggr\}=C^2(t)=C^2_{n,m,k}(t).$$

Следуя далее рассуждениям из § 4.2 в [4, гл. II], не составляет труда показать, что при $y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$

$$\int\limits_{|x|\ge2|y|}\biggl\|\frac{\Omega_j(x-y)}{|x-y|^n}-\frac{\Omega_j(x)}{|x|^n}\biggr\|\,dx$$

$$\le nv_n\Biggl\{\pi n^{1/2}\frac{2^{n-1}-1}{n-1}C^2(t)+\Biggl(\ln2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k-1}{k}\Biggr)C^1(t)\Biggr\}=B(t)=B.\qquad(29)$$

В самом деле,

$$\int\limits_{|x|\ge2|y|}\biggl\|\frac{\Omega_j(x-y)}{|x-y|^n}-\frac{\Omega_j(x)}{|x|^n}\biggr\|\,dx$$

$$\le\int\limits_{|x|\ge2|y|}\frac{\|\Omega_j(x-y)-\Omega_j(x)\|}{|x-y|^n}dx+\int\limits_{|x|\ge2|y|}\|\Omega_j(x)\|\biggl|\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|x|^n}\biggr|\,dx.\qquad(30)$$

Для оценки первого из интегралов в правой части неравенства (30) рассмотрим точки y_1^0 и y_2^0 единичной сферы $S = S(0,1) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| = 1\}$ и соединим их кратчайшей непрерывной кривой $\gamma \subset S$ (γ — меньшая из двух дуг окружности, которая представляет собой пересечение двумерной плоскости $\tau = \{\mu y_1^0 + \nu y_2^0 \in \mathbb{R}^n \mid \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$ и сферы S). Используя затем натуральные уравнения $y = \rho(l) = (\rho_1(l), \dots, \rho_n(l))$, $l \in [l_1, l_2]$, $\rho(l_\varkappa) = y_\varkappa^0$, $\varkappa = 1, 2$, кривой γ, мы в силу (28) приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \|\Omega_j(y_2^0) - \Omega_j(y_1^0)\| &= \|\Omega_j(\rho(l_2)) - \Omega_j(\rho(l_1))\| \\ &\le \left\{\max_{l_1 \le l \le l_2} \left\| \sum_{s=1}^n \partial_s \Omega_j(\rho(l)) \rho_s'(l) \right\| \right\} |l_2 - l_1| \\ &\le \left\{\max_{l_1 \le l \le l_2} \left[\sum_{s=1}^n \|\partial_s \Omega_j(\rho(l))\|^2 \right]^{1/2} \right\} |l_2 - l_1| \le \frac{\pi}{2} n^{1/2} C^2(t) |y_2^0 - y_1^0|. \end{aligned} \tag{31}$$

Учитывая (31), соотношения

$$\begin{aligned} \left| \frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x}{|x|} \right| &= \left| \frac{x-y}{|x-y|} + \frac{y-x}{|x|} - \frac{y}{|x|} \right| \\ &\le \left| \frac{|x| - |x-y|}{|x-y||x|} (x-y) \right| + \frac{|y|}{|x|} = \frac{||x| - |x-y||}{|x|} + \frac{|y|}{|x|} \le 2 \frac{|y|}{|x|} \end{aligned}$$

и положительную однородность нулевой степени отображения Ω_j, имеем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{|x| \ge 2|y|} \frac{\|\Omega_j(x-y) - \Omega_j(x)\|}{|x-y|^n} \, dx \\ &= \int\limits_{|x| \ge 2|y|} |x-y|^{-n} \left\| \Omega_j\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) - \Omega_j\left(\frac{x}{|x|}\right) \right\| dx \\ &\le \frac{\pi}{2} n^{1/2} C^2(t) \int\limits_{|x| \ge 2|y|} |x-y|^{-n} \left| \frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x}{|x|} \right| dx \\ &\le \pi n^{1/2} C^2(t) \int\limits_{|x| \ge 2|y|} \frac{|y| \, dx}{|x|(|x| - |y|)^n} = \pi n^{1/2} C^2(t) \int\limits_{|x| \ge 1} \frac{2^{n-1} \, dx}{|x|(2|x| - 1)^n} \\ &= \pi n^{3/2} \frac{2^{n-1} - 1}{n-1} v_n C^2(t). \end{aligned} \tag{32}$$

Обращаясь ко второму интегралу справа в (30) и принимая во внимание соотношения (27) и то, что при $|x| \ge 2|y| > 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n} \right| &= \left| \frac{|x|^n - |x-y|^n}{|x|^n |x-y|^n} \right| = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{||x| - |x-y||}{|x|^{k+1} (|x| - |y|)^{n-k}} \\ &\le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|y|}{|x|^{k+1} (|x| - |y|)^{n-k}}, \end{aligned}$$

мы получаем следующую оценку:

$$\int\limits_{|x|\geq 2|y|} \|\Omega_j(x)\| \left| \frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n} \right| dx \leq C^1(t) \int\limits_{|x|\geq 2|y|} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|y|}{|x|^{k+1}(|x|-|y|)^{n-k}}\, dx$$

$$= C^1(t) \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{|x|\geq 1} \frac{2^{n-k-1}\, dx}{|x|^{k+1}(2|x|-1)^{n-k}} = nv_n \left\{ \ln 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k-1}{k} \right\} C^1(t). \quad (33)$$

Соотношения (30), (32) и (33) и приводят нас в итоге к оценке (29).

Учитывая теперь неравенства (27) и (29) и свойство «сокращения»

$$\int\limits_S \Omega_j(x)\, ds = 0,$$

мы видим, что для каждого ядра $K_j^{\mu\nu}$, $K_j^{\mu\nu}(x) = \Omega_j^{\mu\nu}(x)/|x|^n$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, выполнены условия, подобные условиям теоремы 2 из [4, гл. II, § 3.2], с постоянной B из соотношений (29). Повторяя теперь рассуждения из доказательства этой теоремы, приведенного в [4], и осуществляя указанные в нем вычисления явно, мы приходим в итоге к следующей ситуации. Интегральный оператор $T_\varepsilon = \left(T_j^{\mu\nu}\right)_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$,

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} \frac{\Omega_j^{\mu\nu}(y)}{|y|^n} f(x-y) dy, \quad (34)$$

удовлетворяет условиям теоремы 5 из § 4.2 монографии [4, гл. I], где в рассматриваемом сейчас случае $r = 2$,

$$A_1 = (1+4^n)B^2 \left[1 + nv_n \left(4\pi + \ln \frac{27}{4} \right) \right]^2 + 2^n \left[n^{n/2} + 4B \left(1 + nv_n \ln \frac{9}{4} \right) \right] \quad (35)$$

и

$$A_2 = \frac{B}{2} \left[1 + nv_n \left(4\pi + \ln \frac{27}{4} \right) \right] \quad (36)$$

(B — постоянная из (29)), а также условию

$$\|T_\varepsilon(f)\|_2 \leq A_2 \|f\|_2, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}). \quad (37)$$

Для пояснения последних высказываний докажем прежде всего следущее утверждение, представлящее собой уточненный вариант леммы параграфа 3.3 в [4, гл. II].

Лемма 1. *Пусть ядро K удовлетворяет условиям теоремы* 2 *из* [4, *гл.* II, § 3.2], *т. е. следующим условиям:*

$$\begin{cases} |K(x)| \leq B|x|^{-n}, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ \int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B, & y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \end{cases} \quad (38)$$

$(0 \leq B < +\infty)$, *и*

$$\int\limits_{R_1 \leq |x| \leq R_2} K(x)\, dx = 0, \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty, \quad (39)$$

и пусть

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} K(x) & \textit{при } |x| \geq \varepsilon, \\ 0 & \textit{при } |x| < \varepsilon \end{cases} \tag{40}$$

— «усеченное» ядро. Тогда это ядро принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^n)$ и также удовлетворяет условиям (39) и (38), где роль постоянной B играет в данном случае постоянная

$$B_1 = B\biggl(1 + nv_n \ln\frac{9}{4}\biggr).$$

Кроме того, для преобразования Фурье

$$\widehat{K_\varepsilon}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle y,x\rangle} K_\varepsilon(y)\,dy$$

ядра K_ε имеет место оценка

$$\sup_y |\widehat{K_\varepsilon}(y)| \leq \frac{B}{2}\biggl\{1 + nv_n\biggl(4\pi + \ln\frac{27}{4}\biggr)\biggr\} = B_2.$$

Доказательство леммы 1 сводится к доказательству того частного ее случая, когда $\varepsilon = 1$ (см. [4]).

Итак, рассмотрим ядро K_1. Условие (39), первое из условий (38) и условие принадлежности пространству $L_2(\mathbb{R}^n)$ выполняются для K_1 с очевидностью. Докажем второе из условий (38). С этой целью представим интеграл

$$I(y) = \int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K_1(x-y) - K_1(x)|\,dx, \quad y \neq 0,$$

в виде суммы трех интегралов

$$I(y) = \sum_{s=1}^{3} I^s(y) = \sum_{s=1}^{3}\int\limits_{A_s} |K_1(x-y) - K_1(x)|\,dx,$$

где $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| \geq 1,\ |x| \geq 1,\ |x| \geq 2|y|\}$, $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| \geq 1,\ |x| < 1,\ |x| \geq 2|y|\}$ и $A_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < 1,\ |x| \geq 1,\ |x| \geq 2|y|\}$. Учитывая, что

$$I^1(y) = \int\limits_{A_1} |K(x-y) - K(x)|\,dx \leq \int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\,dx \leq B,$$

$$I^2(y) = \int\limits_{A_2} |K(x-y)|\,dx \leq B \int\limits_{\substack{|x-y|\geq 1,\\ |x|<1}} \frac{dx}{|x-y|^n} = B \int\limits_{\substack{|x|\geq 1,\\ |x-y|<1}} \frac{dx}{|x|^n}$$
$$\leq B \int\limits_{1\leq|x|\leq\frac{3}{2}} \frac{dx}{|x|^n} = nv_n B \ln\frac{3}{2} = \widetilde{B},$$

если $0 < |y| \leq 1/2$, и $I^2(y) = 0$, если $|y| > 1/2$, и, наконец,

$$I^3(y) = \int\limits_{A_3} |K(x)|\,dx \leq B \int\limits_{\substack{|x-y|<1,\\ |x|\geq 2|y|}} \frac{dx}{|x|^n} \leq B \int\limits_{2|y|\leq|x|\leq 1+|y|} \frac{dx}{|x|^n} \leq \widetilde{B}$$

при $1/2 \le |y| < 1$ и

$$I^3(y) = \int\limits_{A_3} |K(x)|\,dx \le B \int\limits_{\substack{|x-y|<1,\\ |x|\ge 1}} \frac{dx}{|x|^n} \le B \int\limits_{1\le|x|\le 1+|y|} \frac{dx}{|x|^n} \le \widetilde{B}$$

при $0 < |y| < 1/2$, а при $|y| \ge 1$ $I^3(y) = 0$, мы приходим к искомой оценке интеграла $I(y)$.

Далее, оценивая преобразование Фурье $\widehat{K_1}$ усеченного ядра K_1 и придерживаясь при этом плана, выбранного для этой цели в доказательстве леммы из [4, гл. II, § 3.3], а также используя обозначения, принятые в [4], мы приходим к соотношениям

$$|I_1| = \left|\int\limits_{|x|\le\frac{1}{|y|}} e^{2\pi i\langle x,y\rangle} K_1(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{|x|\le\frac{1}{|y|}} [e^{2\pi i\langle x,y\rangle} - 1] K_1(x)\,dx\right|$$
$$\le \int\limits_{|x|\le\frac{1}{|y|}} 2\pi|y||x||K_1(x)|\,dx \le \int\limits_{|x|\le\frac{1}{|y|}} \frac{2\pi B|y|\,dx}{|x|^{n-1}} = 2\pi n v_n B \quad (41)$$

и

$$|I_2| = \left|\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\frac{1}{|y|}\le|x|\le R} e^{2\pi i\langle x,y\rangle} K_1(x)\,dx\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\Gamma + \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\frac{1}{|y|}\le|x|\le R} [K_1(x) + K_1(x-z)] e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\Gamma + \int\limits_{\frac{1}{|y|}\le|x|} [K_1(x) + K_1(x-z)] e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\Gamma + \int\limits_{\frac{1}{|y|}\le|x|} K_1(x) e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx - \int\limits_{\frac{1}{|y|}\le|x+z|} K_1(x) e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\Gamma + \int\limits_{\substack{\frac{1}{|y|}\le|x|,\\ |x+z|<\frac{1}{|y|}}} K_1(x) e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx - \int\limits_{\substack{\frac{1}{|y|}\le|x+z|,\\ |x|<\frac{1}{|y|}}} K_1(x) e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx\right|$$
$$\le \frac{1}{2}\left\{|\Gamma| + \left|\int\limits_{\substack{\frac{1}{|y|}\le|x|,\\ |x+z|<\frac{1}{|y|}}} K_1(x) e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx\right| + \left|\int\limits_{\substack{\frac{1}{|y|}\le|x+z|,\\ |x|<\frac{1}{|y|}}} K_1(x) e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx\right|\right\}$$
$$\le \frac{1}{2}\left\{\int\limits_{2|z|\le|x|} |K_1(x-z) - K_1(x)|\,dx + \int\limits_{\frac{1}{|y|}\le|x|\le\frac{3}{2|y|}} \frac{B\,dx}{|x|^n} + \int\limits_{\frac{1}{2|y|}\le|x|<\frac{1}{|y|}} \frac{B\,dx}{|x|^n}\right\}$$
$$\le \frac{1}{2}\{B_1 + B n v_n \ln 3\} = \frac{B}{2}\left\{1 + n v_n \ln\frac{27}{4}\right\}. \quad (42)$$

Здесь $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{s=1}^{n}x_sy_s$ — скалярное произведение векторов x и y, $z=\frac{y}{2|y|^2}$ и

$$\Gamma=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\frac{1}{|y|}\le|x|\le R}[K_1(x)-K_1(x-z)]e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx.$$

Соотношения (41) и (42) позволяют нам заключить, что

$$|\widehat{K_1}(y)|\le|I_1|+|I_2|\le\frac{B}{2}\left\{1+nv_n\left(4\pi+\ln\frac{27}{4}\right)\right\},\quad y\ne0.$$

Лемма 1 доказана.

Замечание. Учитывая, что в силу (27), (29) для ядра $K_j^{\mu\nu}(x)=\Omega_j^{\mu\nu}(x)/|x|^n$ из (34) имеют место оценки

$$|K_j^{\mu\nu}(x)|\le\frac{C^1(t)}{|x|^n},\quad x\ne0,$$

и

$$\int\limits_{|x|\ge2|y|}|K_j^{\mu\nu}(x-y)-K_j^{\mu\nu}(x)|\,dx\le B(t),\quad y\ne0,$$

где $C^1(t)$ и $B(t)$ — постоянные из соотношений (27) и (29) соответственно, и используя рассуждения из доказательства леммы 1, можно показать, что утверждения этой леммы для ядра $(K_j^{\mu\nu})_\varepsilon$ выполняются с

$$B_1=B_1(t)=B(t)+nv_nC^1(t)\ln\frac{9}{4}\tag{43}$$

и

$$B_2=B_2(t)=\frac{1}{2}\left\{B(t)+nv_n\left(4\pi+\ln\frac{27}{4}\right)C^1(t)\right\}.\tag{44}$$

Лемма 2. *Пусть $K\in L_2(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что преобразование Фурье $\widehat{K}$ функции K удовлетворяет условиям*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n}|\widehat{K}(x)|\le B_2\quad(<+\infty)$$

и

$$\int\limits_{|x|\ge2|y|}|K(x-y)-K(x)|\,dx\le B_1\quad(<+\infty),\quad y\ne0.$$

Тогда оператор

$$T(f)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(x-y)f(y)\,dy$$

каждой функции $f\in L_2(\mathbb{R}^n)$ ставит в соответствие функцию того же пространства и при этом выполняется неравенство

$$\|T(f)\|_2\le B_2\|f\|_2.\tag{45}$$

Далее, для каждого числа $\alpha>0$ и каждой функции $f\in L_1(\mathbb{R}^n)+L_2(\mathbb{R}^n)$ ($L_1(\mathbb{R}^n)+L_2(\mathbb{R}^n)$ — арифметическая сумма пространств $L_1(\mathbb{R}^n)$ и $L_2(\mathbb{R}^n)$) имеют место соотношения

$$\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^n\mid|T(f)(x)|>\alpha\}\le\frac{1}{\alpha}[4(1+4^n)(B_2)^2+2^n(4B_1+n^{n/2})]\|f\|_1,\ f\in L_1(\mathbb{R}^n),\tag{46}$$

и

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^n \mid |T(f)(x)| > \alpha\} \le \left(\frac{B_2}{\alpha}\|f\|_2\right)^2, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^n), \tag{47}$$

где $\operatorname{mes}(E) = \operatorname{mes}_n(E)$ — *мера Лебега множества* $E \subset \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Первое из утверждений леммы, включая неравенство (45), а также неравенство (47), доказываются в точности так, как это осуществлено в § 2.3 монографии [4, гл. II].

Приступая к доказательству неравенства (46), мы, подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1 из § 2.2 в [4, гл. II], воспользуемся следствием теоремы 4 из [4, гл. I, § 3.4]. В силу этого следствия для каждого числа $\alpha > 0$ существует дизъюнктное разложение $\mathbb{R}^n = F \sqcup \Omega$ пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что Ω есть объединение $\bigcup\limits_{\nu} Q_\nu$ замкнутых кубов Q_ν, ребра которых параллельны координатным осям, а внутренности $\operatorname{int}(Q_\nu)$ попарно не пересекаются, причем выполнены следующие условия:

(i) $|f(x)| \le \alpha$ почти всюду на F,

(ii) $\operatorname{mes}(\Omega) \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_1$,

(iii) $\frac{1}{\operatorname{mes}(Q_\nu)} \int\limits_{Q_\nu} |f(x)|\,dx \le 2^n\alpha$ для каждого куба Q_ν.

Как и в [4, гл. II, § 2], пусть

$$g(x) = \begin{cases} |f(x)|, & \text{если } x \in F, \\ \frac{1}{\operatorname{mes}(Q_\nu)} \int\limits_{Q_\nu} |f(x)|\,dx, & \text{если } x \in \operatorname{int}(Q_\nu), \end{cases}$$

и

$$b(x) = |f(x)| - g(x).$$

Для каждого куба Q_ν рассмотрим куб Q_ν^*, представляющий собой растяжение куба Q_ν относительно его центра y_ν в $2n^{1/2}$ раз, и затем построим множества $\Omega^* = \bigcup\limits_{\nu} Q_\nu^*$ и $F^* = \mathbb{R}^n \setminus \Omega^*$. В силу свойства (ii) разложения $\mathbb{R}^n = F \sqcup \Omega$ имеем

$$\operatorname{mes}(Q^*) \le \sum_{\nu} \operatorname{mes}(Q_\nu^*) = \sum_{\nu} 2^n n^{n/2} \operatorname{mes}(Q_\nu) = 2^n n^{n/2} \operatorname{mes}(\Omega) \le \frac{2^n n^{n/2}}{\alpha}\|f\|_1. \tag{48}$$

Далее, следуя рассуждениям из доказательства следствия теоремы 1 в [4, гл. II, § 3.1] и используя свойства (ii) и (iii) упомянутого разложения, мы приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \int\limits_{F^*} |T(b)(x)|\,dx &\le B_1 \sum_{\nu} \int\limits_{Q_\nu} |b(y)|\,dy = B_1 \sum_{\nu} \int\limits_{Q_\nu} |f(y) - g(y)|\,dy \\ &= B_1 \sum_{\nu} \int\limits_{Q_\nu} \left| f(y) - \frac{1}{\operatorname{mes}(Q_\nu)} \int\limits_{Q_\nu} |f(x)|\,dx \right| dy \le B_1 \sum_{\nu} \left\{ \int\limits_{Q_\nu} |f(y)|\,dy \right. \\ &\left. + \int\limits_{Q_\nu} \left[\frac{1}{\operatorname{mes}(Q_\nu)} \int\limits_{Q_\nu} |f(x)|\,dx \right] dy \right\} \le B_1 \sum_{\nu} \{2^n\alpha \operatorname{mes}(Q_\nu) \\ &+ 2^n\alpha \operatorname{mes}(Q_\nu)\} = 2^{n+1} B_1 \alpha \operatorname{mes}(\Omega) \le 2^{n+1} B_1 \|f\|_1. \end{aligned}$$

Но тогда из свойств интеграла Лебега вытекает, что

$$\operatorname{mes}\{x \in F^* \mid |T(b)(x)| > \alpha/2\} \le \frac{2}{\alpha}\|T(b)\|_{1,F^*} \le \frac{2^{n+2}B_1}{\alpha}\|f\|_1.$$

Следовательно, с учетом (48) мы можем заключить, что

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^n \mid |T(b)(x)| > \alpha/2\} = \operatorname{mes}\{x \in F^* \mid |T(b)(x)| > \alpha/2\}$$
$$+ \operatorname{mes}\{x \in \Omega^* \mid |T(b)(x)| > \alpha/2\} \leq \frac{2^{n+2}B_1}{\alpha}\|f\|_1 + \operatorname{mes}(\Omega^*)$$
$$\leq \frac{2^n}{\alpha}(4B_1 + n^{n/2})\|f\|_1. \quad (49)$$

В то же время в силу свойств разложения $\mathbb{R}^n = F \sqcup \Omega$

$$(\|g\|_2)^2 = \int\limits_F |g(x)|^2\,dx + \int\limits_\Omega |g(x)|^2\,dx \leq \alpha \int\limits_F |f(x)|\,dx + \sum_\nu \int\limits_{Q_\nu} |g(x)|^2\,dx$$
$$\leq \alpha\|f\|_1 + \sum_\nu (2^n\alpha)^2 \operatorname{mes}(Q_\nu) \leq \alpha\|f\|_1 + (2^n\alpha)^2 \operatorname{mes}(\Omega) \leq (1+4^n)\alpha\|f\|_1.$$

Тем самым, полагая в (47) $f = g$ и рассматривая в качестве α постоянную $\alpha/2$, мы получаем следующее неравенство:

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^n \mid |T(g)(x)| > \alpha/2\} \leq \frac{4(1+4^n)(B_2)^2}{\alpha}\|f\|_1. \quad (50)$$

Наконец, принимая во внимание (49) и (50) и то, что $T(f) = T(g) + T(b)$, приходим к неравенствам

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^n \mid |T(f)(x)| > \alpha\} \leq \operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^n \mid |T(g)(x)| > \alpha/2\}$$
$$+ \operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^n \mid |T(b)(x)| > \alpha/2\} \leq \frac{1}{\alpha}[4(1+4^n)(B_2)^2 + 2^n(4B_1 + n^{n/2})]\|f\|_1.$$

Лемма 2 доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы 1, применим сначала лемму 1 в том случае, когда

$$K(x) = \Omega_j^{\mu\nu}(x)/|x|^n,$$

где $\Omega_j(x) = \big(\Omega_j^{\mu\nu}(x)\big)_{\substack{\mu=1,\dots,m\\ \nu=1,\dots,k}} = -|x|^n[\partial_j H(x)]^T$, причем H, в свою очередь, взято из формулировки теоремы (см. (5)), а затем — лемму 2, полагая, что рассматриваемое в ней ядро — это «усеченное» ядро K_ε. В итоге мы как раз и окажемся в отмеченной перед обсуждением лемм 1 и 2 ситуации[4]. Принимая во внимание это обстоятельство и теорему 5 из [4, гл. I, § 4.2], мы можем заключить теперь, что для каждого $p \in]1,2[$

$$\|T_\varepsilon(f)\|_p \leq A_p\|f\|_p, \quad (51)$$

если $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, причем из доказательства теоремы 5 в [4, гл. I, § 4.2] вытекает, что в качестве A_p можно принять величину

$$A_p = \left\{p\left[\frac{2A_1}{p-1} + \frac{(2A_2)^2}{2-p}\right]\right\}^{1/p}, \quad (52)$$

где A_1 и A_2 определяются равенствами (35) и (36). Но тогда соотношение (51) выполняется и для $p > 2$ (см. § 2.5 в [4, гл. II]), причем роль A_p играет сейчас

[4]Обращаем внимание читателя на то, что замечание к лемме 1 позволяет уточнить постоянные A_1 и A_2 в соотношениях (35)–(37). Для этого достаточно рассмотреть в неравенствах (45)–(47) в качестве T оператор T_ε, а в качестве постоянных B_1 и B_2 величины, введенные равенствами (43) и (44).

величина $A_{p/(p-1)}$, определяемая равенством (52) (с заменой в нем величины p на $\frac{p}{p-1}$), т. е.

$$A_p = \left\{2p\left[A_1 + \frac{2(A_2)^2}{p-2}\right]\right\}^{1-1/p}, \quad p > 2. \tag{53}$$

Последнее обстоятельство позволяет заключить, что оператор T_ε удовлетворяет условиям теоремы 5 из [4, гл. I, § 4.2] (в частности) при $r = 3$. Повторяя рассуждения, использованные нами в случае $r = 2$, легко убеждаемся в том, что T_ε удовлетворяет условию (51) для каждого $p \in [3/2, +\infty[$, в котором в качестве A_p можно взять сейчас величину

$$\overline{A}_p = \left\{2p\left[A_1 + \frac{4(A_3)^3}{2p-3}\right]\right\}^{1-1/p},$$

где A_1 и A_3 определяются соотношениями (35) и (53) (при $p = 3$) соответственно. Тем самым, если $p \geq 2$ и величина A_2 определяется равенством (36), то

$$\begin{aligned}\overline{A}_p &= \left\{2p[A_1 + 144\frac{\left(A_1 + 2(A_2)^2\right)^2}{2p-3}\right]\right\}^{1-1/p} \\ &\leq 2A_1 p\left\{\left[1 + \frac{144(A_1 + 2(A_2)^2)^2}{A_1(2p-3)}\right]^{\frac{A_1(2p-3)}{144(A_1+2(A_2)^2)^2}}\right\}^{\frac{144(p-1)(A_1+2(A_2)^2)^2}{A_1 p(2p-3)}} \\ &\leq 2A_1 p \exp\left\{\frac{72}{A_1}\left[A_1 + 2(A_2)^2\right]^2\right\}.\end{aligned} \tag{54}$$

Обращаясь, наконец, к теореме 4 из [4, гл. II, § 4.5], мы с ее помощью заключаем, что оператор T_ε обладает предельным оператором T в смысле сходимости почти всюду: если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, то

$$T(f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon(f)(x) \tag{55}$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Далее, из этой же теоремы вытекает существование для каждого $p \in]1, +\infty[$ числа $\widetilde{A}_p \in [0, +\infty[$ такого, что

$$\|T^*(f)\|_p \leq \widetilde{A}_p \|f\|_p, \quad f \in L_p(\mathbb{R}^n),$$

где

$$T^*(f)(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |T_\varepsilon(f)(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тем самым если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, то функция

$$x \mapsto [T^*(f)(x)]^p, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

служит суммируемой мажорантой для семейства $\{|T_\varepsilon(f)|^p\}_{\varepsilon>0}$ функций

$$|T_\varepsilon(f)|^p(x) = |T_\varepsilon(f)(x)|^p, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$\varepsilon > 0$. Следовательно, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла при $2 \leq p < +\infty$ неравенство (51) с $A_p = \overline{A}_p$, где $\overline{A}_p$ определяется соотношениями (54), справедливо не только для «усеченного» оператора T_ε, но также и для сингулярного интегрального оператора T вида (55).

Это замечание и соотношения (25) завершают доказательство теоремы 1 в случае четных n, поскольку они позволяют утверждать, что (в этом случае) неравенство (2) становится верным, если положить в нем

$$X(t) = 2(nm)^{1/2} k A_1 \exp\left\{\frac{72}{A_1}\left[A_1 + 2(A_2)^2\right]^2\right\} + \frac{1}{2} n v_n C^0(t).$$

В случае же нечетных n доказательство теоремы 1 осуществляется почти дословным повторением предыдущих рассуждений, поэтому мы его опускаем.

Замечание. Лемма 2 работы [1] вытекает из теоремы 1 настоящей статьи в силу свойства однородности степени -1 функции $\Upsilon_q : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ ($\Upsilon_q(cD) = |c|^{-1}\Upsilon_q(D)$, где $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $D \in \mathscr{O}$, причем $\mathscr{O} = \mathscr{O}^{n,m,k}$ — множество всех эллиптических линейных дифференциальных операторов первого порядка с постоянными коэффициентами) и в силу соотношений

$$\Lambda(D^0) = \min_{\zeta\in\mathbb{R}^n, v\in\mathbb{R}^{mn^{l-1}},\, |\zeta|=1,\, |v|=1} |\sigma_{D^0}(\zeta)v| \le \left\{ \sum_{j=1}^{k}\sum_{\varkappa=1}^{m}\sum_{|p|=l} \left|a_p^{j\varkappa}\right|^2 + 2(k_0-k) \right\}^{1/2}$$

$$\le \left\{ km\frac{(n+l-1)!}{l!(n-1)!}t^2 + 2m\sum_{u=2}^{\min\{l,n\}} \frac{n!(l-1)!}{u!(n-u)!(u-2)!(l-u)!} \right\}^{1/2}, \qquad (56)$$

которые выполняются для каждого оператора D^0, присоединенного (в терминологии работы [5], см. также равенства (28) в [1]) к эллиптическому линейному дифференциальному оператору D l-го порядка с постоянными коэффициентами из множества $\mathscr{O}_t^{n,m,k,l}$, определяемого соотношением (7) в статье [1]. Следует отметить, что в соотношениях (56) использованы обозначения из [1], а вывод самих этих соотношений опирается на неравенства (20) данной работы (в применении к символу $\sigma_{D^0}(\zeta)$ оператора D^0).

Возвращаясь снова к обсуждению теоремы 1 статьи [1], заметим, что в ходе ее доказательства мы получили также следующий (несколько более общий) результат.

Теорема 2. *Утверждение теоремы* 1 *из* [1] *останется верным, если условие* $f \in W^l$ *в ней заменить условием* $f \in C^{l-1} \cap W^l_{2,\mathrm{loc}}$.

В свою очередь, в случае, когда система (1) (см. также систему (1)–(2) в [1]) имеет первый порядок ($l = 1$), из теоремы 3.4.1″ монографии [3, гл. 3, § 3.4] и леммы 2 статьи [1] вытекает следующая теорема, которая при $l = 1$ представляет собой усиление теоремы 1 из [1] и которую естественно рассматривать в одном ряду с теоремами 3.4.1–3.4.1″ из [3, гл. 3, § 3.4], причем как утверждение наиболее совершенной формы среди результатов этого ряда.

Теорема 3. *В случае, когда порядок l системы* (1) (*системы* (1)–(2) *в* [1]) *равен* 1, *утверждение теоремы* 2 *остается истинным, если условие* $f \in C \cap W^1_{2,\mathrm{loc}}$ *в ее формулировке заменить условием* $f \in W^1_{2,\mathrm{loc}}$, *а вместо условия линейности отображений β и ω, используемых при измерении отклонения оператора V от эллиптических линейных операторов из $\mathscr{O}_t$* (*см. теорему* 1 *в* [1]), *потребовать, чтобы эти отображения были квазиизометрическими.*

Завершая статью, мы хотим обратить внимание читателя еще на три обстоятельства.

Во-первых, в силу примера, приведенного в замечании 3.4.1 на с. 179 в [3], при $l = 1$ условие $q_0 > n$ в теореме 1 статьи [1] (и тем самым в теоремах 2 и 3 данной работы) естественно рассматривать как точное.

Во-вторых, результаты статей настоящего цикла находятся в тесной связи с теоремой 3 из работы [5], в силу которой имеет место следующее: если линейный дифференциальный оператор[5)]

$$D = (D_1, \dots, D_k) = \sum_{|p|=l} a_p \partial^p \qquad (57)$$

[5)] В (57) и ниже $p = (p_1, \dots, p_n)$ — мультииндекс, $|p|$ — его порядок и ∂^p $(= (\partial_1)^{p_1} \circ \dots \circ (\partial_n)^{p_n})$ — символ частной производной, соответствующей мультииндексу p.

l-го порядка, где $a_p = \left(a_p^{j\varkappa}\right)_{\substack{j=1,\dots,k\\ \varkappa=1,\dots,m}}$ — вещественная $k\times m$-матрица, является эллиптическим ($\operatorname{rank}\sigma_D(\zeta) = \operatorname{rank}\bigl\{\sum\limits_{|p|=l}\zeta^p a_p\bigr\} = \operatorname{rank}\bigl\{\sum\limits_{|p|=l}(\zeta_1)^{p_1}\dots(\zeta_n)^{p_n}a_p\bigr\} = m$ при $\zeta\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$), то степень суммируемости частных производных $\partial^p f$ порядка l ($|p|=l$) W^l-решений $f: U\to\mathbb{R}^m$ дифференциального неравенства

$$|Df(x)| \le \varepsilon\|f^{(l)}(x)\|$$

неограниченно возрастает, когда $\varepsilon\to 0$. Эта связь состоит в том, что последнее утверждение является частным случаем теоремы 1 работы [1].

И в-третьих, теорема 1 статьи [1] — равно как и теоремы 2 и 3 данной работы — верна не только в том случае, когда в качестве отображения $\mathfrak{L} = (\mathfrak{L}_1,\dots,\mathfrak{L}_k)$, на основе которого строится система (1) в [1], мы выбираем «лучший» представитель[6)]

$$\mathfrak{L}_j(w) = \varlimsup_{r\searrow 0}\frac{1}{r^{N_l}v_{N_l}}\int\limits_{B(w,r)}\mathfrak{L}_j(\overline{w})d\overline{w},\quad w\in U_1 = U\times\prod_{\nu=0}^{l}(\mathbb{R}^m)^{n_\nu},\quad j=1,\dots,k, \tag{58}$$

в классе вектор-функций, заданных в U_1 и эквивалентных $\mathfrak{L}$ с точки зрения теории интеграла, но и в случае любого из представителей этого класса, удовлетворяющего условиям (i)–(iv) из [1] (последнее вытекает из избранного нами способа доказательства теоремы 1 в [1]). В то же время случай, когда в качестве $\mathfrak{L}$ рассматривается лучший представитель (58) обсуждаемого класса — а именно так мы и поступали в работе [1], — имеет особый интерес, в частности, и потому, что в этом случае в формулировке теоремы 1 в [1] (и в формулировках теорем 2 и 3 настоящей статьи) можно опустить условие (ii). В самом деле, имеет место

Лемма 3. *Пусть отображение $\mathfrak{L} = (\mathfrak{L}_1,\dots,\mathfrak{L}_k)$ задано на множестве U_1 указанного в (58) типа и обладает вещественными функциями-компонентами $\mathfrak{L}_j$, $j=1,\dots,k$, такими, что для почти всех $x\in U$ (в смысле обычной меры Лебега в $\mathbb{R}^n$) эти функции принимают конечные значения $\mathfrak{L}_j(x;v^0;\dots;v^l)$ всякий раз, когда $(v^0;\dots;v^l)\in\prod\limits_{\nu=0}^{l}(\mathbb{R}^m)^{n_\nu}$. Предположим, что $\mathfrak{L}$ удовлетворяет условиям* (i) *и* (iii) *из работы* [1], *в которых вектор-функции V и T определяются на основе отображения $\mathfrak{L}$ равенствами* (3) *и* (4) *этой работы. Тогда лучший представитель* (58) *в классе отображений, эквивалентных $\mathfrak{L}$ с точки зрения теории интеграла, наследует указанные свойства отображения $\mathfrak{L}$ и приобретает еще свойство* (ii) *из* [1].

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $V = (V_1,\dots,V_k)$, определяемую на основе отображения $\mathfrak{L}$ соотношением (3) статьи [1]:

$$V(x;v_{l-1};v^l) = \mathfrak{L}(x;v_{l-1};v^l) - \mathfrak{L}(x;v_{l-1};0),\quad v_{l-1} = (v^0;v^1;\dots;v^{l-1}),$$

и построим δ-усреднение ($\delta>0$) этой функции по В. А. Стеклову[7)]:

$$V_\delta(w) = \frac{1}{\delta^{N_l}v_{N_l}}\int\limits_{B(w,\delta)}V_j(\overline{w})d\overline{w},$$

[6)] $B(w,r) = \{\overline{w}\in\mathbb{R}^{N_l}\mid|\overline{w}-w|<r\}$ — шар пространства $\mathbb{R}^{N_l}$, $N_l = n+m\sum\limits_{\nu=0}^{l}n_\nu$, $n_\nu = \frac{(n+\nu-1)!}{\nu!(n-1)!}$, $\nu=0,1,\dots,l$, v_{N_l} — объем единичного шара $B(0,1)$, U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

[7)] $\operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^n\setminus U) = \inf\limits_{y\in\mathbb{R}^n\setminus U}|x-y|$ — расстояние от точки x до множества $\mathbb{R}^n\setminus U$.

$$w = (x; v_{l-1}; v^l) \in U_\delta \times \mathbb{R}^{N_l - n}, \quad U_\delta = \{x \in U \mid \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U) > \delta\}$$

($\overline{w} = (\bar{x}; \bar{v}_{l-1}; \bar{v}_l) \in B(w, \delta)$, причем интеграл существует в силу условий леммы). Используя условие (i) из [1], для произвольной точки $w = (x; v_{l-1}; v^l) \in U_1$, $x \in U_\delta$, имеем

$$|V_\delta(w)| \le \{\operatorname*{ess\,sup}_{|\bar{x}-x|\le\delta} \eta(\bar{x})\} \frac{1}{\delta^{N_l} v_{N_l}} \int\limits_{B(w,\delta)} |\bar{v}^l| d\overline{w}. \tag{59}$$

Здесь η — неотрицательная измеримая вещественная функция, локально ограниченная в sup-норме и такая, что для почти всех $x \in U$

$$|V(x; v_{l-1}; v^l)| \le \eta(x)|v^l|,$$

если $(v_{l-1}; v^l) \in \mathbb{R}^{N_l - n}$. Устремляя в (59) δ к нулю, в итоге получаем следующее неравенство:

$$|\varlimsup_{\delta \searrow 0} V_{j\delta}(w)| \le \varlimsup_{\delta \searrow 0} \{\operatorname*{ess\,sup}_{|\bar{x}-x|\le\delta} \eta(x)\}|v^l| = \eta_0(x)|v^l|, \tag{60}$$

$j = 1, \dots, k$, где функция $k^{1/2}\eta_0$ играет по отношению к вектор-функции

$$V^0(w) = (V_1^0(w), \dots, V_k^0(w)) = (\varlimsup_{\delta \searrow 0} V_{1\delta}(w), \dots, \varlimsup_{\delta \searrow 0} V_{k\delta}(w)), \quad w \in U_1, \tag{61}$$

ту же роль, что и функция η по отношению к V (при этом функции V_j^0, $j = 1, \dots, k$, измеримы и неравенства $\eta_0(x) < +\infty$ и $|V^0(x; v_{l-1}; v^l)| \le k^{1/2}\eta_0(x)|v^l|$ выполняются в каждой точке $w \in U_1$).

Пусть теперь U_0 — открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$, $U_0 \subset U$, и отображение $\gamma = (\gamma_{l-1}; \gamma^l) : U_0 \to \mathbb{R}^{N_l - n}$ обладает измеримыми и почти всюду конечными скалярными функциями-компонентами. Рассмотрим вектор-функцию

$$\Gamma^\delta(x) = \left(\Gamma_1^\delta(x), \dots, \Gamma_k^\delta(x)\right) = V_\delta(x; \gamma_{l-1}(x); \gamma^l(x)), \quad x \in (U_0)_\delta.$$

Так как отображение $(w, \delta) \mapsto V_\delta(w)$ непрерывно на множестве

$$\{(w, \delta) = ((x; v_{l-1}; v^l), \delta) \in \mathbb{R}^{N_l + 1} \\ \mid x \in U_0, (v_{l-1}; v^l) \in \mathbb{R}^{N_l - n}, 0 < \delta \le \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U_0)\},$$

то функции Γ_j^δ $(j = 1, \dots, k)$ измеримы, а значения функции $\Gamma_j^0(x) = V_j^0(x; \gamma_{l-1}(x); \gamma^l(x))$ в тех точках $x \in U_0$, в которых компоненты вектор-функции γ конечны, т. е. почти всюду в U_0, можно представить в следующем виде:

$$\Gamma_j^0(x) \\ = \lim_{\substack{s \to +\infty, \\ s \in \mathbb{N}}} [\sup\{V_{j\delta}(x; \gamma_{l-1}(x); \gamma^l(x)) \mid \delta \text{ — рациональное число}, 0 < \delta \le 1/s\}] \tag{62}$$

(в силу соотношений (60) и (61) $-\infty < \Gamma_j^0(x) < +\infty$). Тем самым функции Γ_j^0 также измеримы. Поэтому, полагая в (62) $\gamma(x) = (v_{l-1}(\varphi, x); v^l(\varphi, x))$, где отображение $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : U_0 \to \mathbb{R}^m$ принадлежит классу $W^l_{1,\mathrm{loc}}(U_0, \mathbb{R}^m)$, а $v_{l-1}(\varphi, x) = (v^0(\varphi, x); v^1(\varphi, x); \dots; v^{l-1}(\varphi, x))$, причем $v^0(\varphi, x) = \varphi(x)$ и каждый из символов $v^\nu(\varphi, x)$, $\nu = 1, \dots, l$, обозначает набор всех обобщенных по Соболеву [2] частных производных $\partial_{\mu_1 \dots \mu_\nu} \varphi(x)$ порядка ν отображения φ таких, что $1 \le \mu_1 \le \dots \le \mu_\nu \le n$, и внутри набора производные упорядочены лексикографическим способом (см. [1]), мы приходим к заключению, что отображение V^0 удовлетворяет условию (ii) из [1].

Обратимся к усреднению

$$T_\delta(x;v_{l-1}) = \frac{1}{\delta^{N_l} v_{N_l}} \int\limits_{|\overline{w}|<\delta} T(x+\bar{x};v_{l-1}+\bar{v}_{l-1}) d\overline{w}$$

$$= \frac{v_{mn_l}}{\delta^{N_l} v_{N_l}} \int\limits_{|\bar{x}|<\delta} d\bar{x} \int\limits_{|\bar{v}_{l-1}|^2<\delta^2-|\bar{x}|^2} T(x+\bar{x};v_{l-1}+\bar{v}_{l-1})(\delta^2-|\bar{x}|-|\bar{v}_{l-1}|^2)^{\frac{mn_l}{2}} d\bar{v}_{l-1}$$

отображения $(x;v_{l-1};v^l) \mapsto T(x;v_{l-1}) = \mathfrak{L}(x;v_{l-1};0)$, $\quad (x;v_{l-1};v^l) \in U_1$ (в данных соотношениях и следующих ниже соотношениях (63) символы v_{mn_l}, $v_{N_{l-1}-n}$ и v_n подобно v_{N_l} обозначают объемы единичных шаров в пространствах $\mathbb{R}^{mn_l}$, $\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно). Предполагая, что x — это точка Лебега функции E из условия (iii) статьи [1] (как функции от x), которому отображение T удовлетворяет в силу условий леммы, для любых двух точек v'_{l-1} и v''_{l-1} пространства $\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$ и каждого числа $\delta \in]0, \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U)[$, учитывая упомянутое условие (iii) из [1], имеем

$$\begin{aligned} \big|T_\delta\big(x;v'_{l-1}\big) - T\big(x;v''_{l-1}\big)\big| &\le \frac{v_{mn_l}}{\delta^{N_l} v_{N_l}} \int\limits_{|\bar{x}|<\delta} d\bar{x} \int\limits_{|\bar{v}_{l-1}|^2<\delta^2-|\bar{x}|^2} \big|T\big(x+\bar{x};v'_{l-1}+\bar{v}_{l-1}\big) \\ &\quad - T\big(x+\bar{x};v''_{l-1}+\bar{v}_{l-1}\big)\big|(\delta^2-|\bar{x}|^2-|\bar{v}_{l-1}|^2)^{\frac{mn_l}{2}} d\bar{v}_{l-1} \\ \le \frac{v_{mn_l}}{\delta^{N_l} v_{N_l}} \int\limits_{|\bar{x}|<\delta} E(x+\bar{x})\, d\bar{x} &\int\limits_{|\bar{v}_{l-1}|^2<\delta^2-|\bar{x}|^2} \big|v'_{l-1}-v''_{l-1}\big|(\delta^2-|\bar{x}|^2-|\bar{v}_{l-1}|^2)^{\frac{mn_l}{2}} d\bar{v}_{l-1} \\ \le \frac{v_{mn_l} v_{N_{l-1}-n} v_n}{v_{N_l}} &\left\{E(x) + \frac{1}{\delta^n v_n} \int\limits_{|\bar{x}|<\delta} |E(x+\bar{x})-E(x)| d\bar{x}\right\} |v'_{l-1}-v''_{l-1}|. \end{aligned} \tag{63}$$

Так как второе слагаемое в фигурных скобках в правой части последнего из соотношений (63) стремится к нулю при $\delta \searrow 0$ (x — точка Лебега функции E), то существуют вещественные числа $\delta_* = \delta_*(x) > 0$ и $C \ge 0$ такие, что $\delta_*(x) < \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U)$ и отображения $T_\delta(x;\cdot) : v_{l-1} \mapsto T_\delta(x;v_{l-1})$, $v_{l-1} \in \mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$, при $0 < \delta \le \delta_*$ удовлетворяют условию Липшица в $\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$ с константой Липшица C.

Далее, $T_\delta(w)$ почти во всех точках $w \in U_1$ сходится к $T(w)$, когда $\delta \searrow 0$ (последнее имеет место, например, в тех точках w, которые являются точками Лебега для каждой из функций T_j, $j = 1,\dots,k$, рассматриваемой как функция переменных x, v_{l-1} и v^l). Поэтому существует множество $X \subset U$ такое, что $\operatorname{mes}_n(U \setminus X) = 0$ (mes_n, как и выше, — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$), каждая точка $x \in X$ есть точка Лебега указанной выше функции E, причем семейство $\{T_\delta(x;\cdot)\}_{0<\delta\le\delta_*(x)}$ отображений $T_\delta(x;\cdot) : v_{l-1} \mapsto T_\delta(x;v_{l-1})$ сходится $\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$-почти всюду в пространстве $\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$ к отображению $T(x;\cdot)$. Но тогда, учитывая липшицевость отображений $T_\delta(x;\cdot)$ этого семейства с единой константой Липшица C (см. предыдущий абзац), не составляет труда заключить, что для каждой точки $x \in X$ выполняется следующее: $T_\delta(x;\cdot)$ сходится (к $T(x;\cdot)$) равномерно на каждом компактном подмножестве пространства $\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$. Кроме того, для каждой точки $w = (x;v_{l-1};v^l) \in X \times \mathbb{R}^{N_l-n}$ имеют место соотношения

$$\mathfrak{L}^0_j(w) = \varlimsup_{\delta\searrow 0} \frac{1}{\delta^{N_l} v_{N_l}} \int\limits_{B(w,\delta)} \mathfrak{L}_j(\overline{w}) d\overline{w} = V^0_j(w) + T_j(x;v_{l-1}),$$

$$T_j(x;v_{l-1}) = \mathfrak{L}^0_j(x;v_{l-1};0), \quad j = 1,\dots,k,$$

где отображение $V^0 = (V_1^0, \dots, V_k^0)$ определяется равенствами (61), что и завершает доказательство леммы.

Лемма 3 позволяет придать основному результату статей данного цикла — теореме 1 из [1] следующий вид.

Теорема 4. *Пусть q_0 и t — вещественные числа, причем $q_0 > n$ и $t > 1$. Тогда существует положительное число $\varepsilon(q_0, t)$ такое, что если отображение $\mathfrak{L}$ удовлетворяет условиям леммы 3, где в качестве параметра q_0 (см. условие* (iii) *в* [1]) *выступает сейчас указанное выше число, а лучший представитель $\mathfrak{L}^0$ в классе отображений, эквивалентных $\mathfrak{L}$ с точки зрения теории интеграла* (*см.* (58)), *локально $\varepsilon(q_0, t)$-близок в смысле условия* (iv) *из* [1] *к эллиптическим линейным дифференциальным операторам с постоянными коэффициентами из множества $\mathscr{O}_t^{n,m,k,l}$, определяемого соотношением* (7) *работы* [1], *то каждое W^l-решение системы* (1) *с $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^0$ является также и ее $W^l_{q_0,\mathrm{loc}}$-решением.*

В заключение отметим, что результаты статей цикла анонсированы в [6], и, пользуясь предоставившейся возможностью, укажем также на ряд обнаруженных в статье [1] описок и опечаток.

1. На с. 865 в четвертой строке символ U следует снабдить индексом 1 справа внизу.

2. На с. 865 в первом предложении доказательства теоремы 1 неравенство $q_0 > 1$ должно быть заменено неравенством $q_0 > n$.

3. На с. 866 в первой строке второго абзаца фразу «число $\tau > 0$» следует заменить словами «число τ принадлежит интервалу $]0, 1[$,».

4. На с. 866 в соотношениях (18) знак равенства и следующую за ним круглую скобку нужно поменять местами, а в показателе множителя τ^{l-n/q_0} в их правой части символ l должен быть заменен числом 1. Это замечание следует учитывать и при использовании неравенства (18) (см. соотношения (44), (49) и (62)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копылов А. П.* О регулярности решений систем уравнений с частными производными, локально близких к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами. I // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 861–879.
2. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962.
3. *Копылов А. П.* Устойчивость в C-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.
4. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
5. *Копылов А. П.* Устойчивость в C^l-норме классов решений систем линейных уравнений с частными производными эллиптического типа // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 352–371.
6. *Копылов А. П.* О W_q^l-регулярности решений систем уравнений с частными производными, локально близких к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 1999. Т. 368, № 3. С. 303–306.

Статья поступила 25 мая 1998 г.

г. Новосибирск