*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2000. Том 41, № 2*

*УДК 512:519.4*

# О ПОЗИТИВНЫХ И КРИТИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КОЛЕЦ

**Ю. М. Важенин, В. Ю. Попов**

**Аннотация:** Доказано совпадение позитивных теорий полиоднородного многообразия колец, класса всех конечных колец из него и свободного в нем кольца счетного ранга. Дано описание критических теорий классов всех конечных йордановых и лиевых колец. Библиогр. 27.

Пусть $\mathbb{K}$ — некоторый класс алгебраических систем сигнатуры $\sigma$, $\mathscr{P}$ — позитивный $\sigma$-язык, $\mathscr{P}\mathbb{K}$ — позитивная теория класса $\mathbb{K}$. Изучению теории $\mathscr{P}\mathbb{K}$ и ее подтеорий для различных классов $\mathbb{K}$ посвящен целый ряд работ. Так, в [1] доказана разрешимость позитивной теории свободной полугруппы счетного ранга. В работе [2] отмечена разрешимость элементарных теорий полугрупп, свободных в конечно-базируемых многообразиях полугрупп, удовлетворяющих перестановочному тождеству, откуда непосредственно вытекает разрешимость позитивных теорий соответствующих многообразий. В обзоре Л. А. Бокутя [3] поставлен вопрос о разрешимости позитивной теории свободных ассоциативных (лиевых) алгебр (конечного ранга, бесконечного ранга, с единицей, без единицы). Г. С. Маканин в [4] доказал разрешимость проблемы совместности систем уравнений в свободной полугруппе, т. е. разрешимость $\exists\wedge$-теории этой полугруппы. Для свободных ассоциативных (лиевых) колец проблема совместности систем уравнений, как показал в [5] В. А. Романьков, неразрешима. В работах [6–11] доказана неразрешимость проблемы совместности систем уравнений для ряда других свободных колец. В указанном выше обзоре [3] поставлен вопрос о разрешимости проблемы совместности систем уравнений в свободных ассоциативных (лиевых) алгебрах над алгебраически замкнутым полем.

Цель настоящей заметки — установить совпадение позитивных теорий некоторых важных классов колец и на основании этих результатов получить новую информацию о разрешимости теорий.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное многообразие колец, заданное полиоднородными тождествами [12]. Обозначим через $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$ класс всех конечных колец из многообразия $\mathfrak{X}$. Пусть $F\mathfrak{X}$ — кольцо счетного ранга, свободное в многообразии $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{N}_k$ — многообразие всех $k$-нильпотентных колец характеристики $k$, $F_l$ — кольцо ранга $l$, свободное в многообразии $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{N}_k$. В дальнейшем свободные образующие колец мы будем обозначать элементами множества $\{e_1, \dots, e_p, \dots\}$.

**Теорема 1.** *Позитивные теории кольца $F\mathfrak{X}$, многообразия $\mathfrak{X}$ и класса $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{F}$ совпадают.*

Пусть $\mathfrak{Y}$ — произвольное многообразие полугрупп, групп, колец или алгебр над полем, $F\mathfrak{Y}$ — полугруппа (группа, кольцо, алгебра) счетного ранга, свободная в многообразии $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y} \cap F$ — класс всех свободных полугрупп (групп, колец, алгебр) из многообразия $\mathfrak{Y}$. Обозначим через $L$ множество предложений вида

$$\forall \vec{x}(f_1(\vec{x}) = g_1(\vec{x}) \wedge \cdots \wedge f_m(\vec{x}) = g_m(\vec{x}) \rightarrow f_0(\vec{x}) = g_0(\vec{x})).$$

**Теорема 2.** *Позитивные теории и $L$-теории алгебраической системы $F\mathfrak{Y}$ и класса $\mathfrak{Y} \cap F$ совпадают.*

Из этой теоремы непосредственно вытекает, что разрешимость проблемы равенства для классов свободных ассоциативных (лиевых) алгебр (групп) (см. соответствующий вопрос в [3]) равносильна разрешимости соответствующего фрагмента универсальной теории свободной счетно-порожденной ассоциативной (лиевой) алгебры (группы). Кроме того, в силу [13] из нее следует разрешимость проблемы равенства в классе всех свободных групп, а ввиду [14] разрешимы позитивная теория и проблема равенства в классе полугрупп, свободных в произвольном многообразии полугрупп, заданном перестановочным тождеством.

Из неразрешимости проблемы равенства в многообразии йордановых колец [15] с учетом результата [11] вытекает, что критическими теориями (см. [16]) многообразия йордановых колец являются лишь теории типов $\forall\exists$ и $\forall\neg\vee$. Следующая теорема устанавливает аналогичный факт для классов конечных йордановых и лиевых колец и дает, в частности, отрицательный ответ на вопрос из [3] о разрешимости проблемы равенства для класса конечных йордановых колец.

**Теорема 3.** *Теории типов $\forall\exists$, $\forall\neg\vee$, и только они, являются критическими теориями класса всех конечных йордановых колец и класса всех конечных колец Ли.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathfrak{D}$ — фильтр Фреше над множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$, т. е. множество всех коконечных подмножеств множества $\mathbb{N}$ (см. [17]). Обозначим через $\mathscr{K}_1 \rightleftharpoons \Pi_{\mathfrak{D}} F_k$ фильтрованное произведение колец $F_k$ по фильтру $\mathfrak{D}$. Элементы кольца $\mathscr{K}_1$ мы будем обозначать через $(a_1, \ldots, a_p, \ldots)_{\mathfrak{D}}$. Если для любых $i$ и $j$, за исключением разве лишь конечного числа, выполняется равенство $a_i = a_j$, то $(a)_{\mathfrak{D}} \rightleftharpoons (a_1, \ldots, a_p, \ldots)_{\mathfrak{D}}$. Пусть $\mathscr{K}_2$ — подкольцо кольца $\mathscr{K}_1$, порожденное множеством элементов $\{(e_i)_{\mathfrak{D}} \mid e_i \in \{e_1, \ldots, e_p, \ldots\}\}$. Произвольный элемент кольца $\mathscr{K}_1$ можно представить в виде суммы одночленов $u_1 + \cdots + u_s + v_1 + \cdots + v_t$, где для любых $i \in \{1, \ldots, s\}$ и $j \in \{1, \ldots, t\}$ имеем $u_i \in \mathscr{K}_2, v_j \in \mathscr{K}_1 \backslash \mathscr{K}_2$. Рассмотрим отображение кольца $\mathscr{K}_1$ на кольцо $\mathscr{K}_2$, заданное следующим образом: $u_1 + \cdots + u_s + v_1 + \cdots + v_t \rightarrow u_1 + \cdots + u_s$. Очевидно, что данное отображение — гомоморфизм. В силу того, что многообразие $\mathfrak{X}$ задано полиоднородными тождествами, кольцо $\mathscr{K}_2$ изоморфно кольцу $F\mathfrak{X}$. Легко понять, что для любого $k$ кольцо $F_k$ конечно. Следовательно, кольцо $F\mathfrak{X}$ является гомоморфным образом фильтрованного произведения колец из класса $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$. Нетрудно убедиться, что аналогичные рассуждения справедливы и для многообразий алгебр над полем, если в качестве $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$ взять класс всех конечномерных алгебр из $\mathfrak{X}$, а в качестве $\mathfrak{N}_k$ — многообразие всех $k$-нильпотентных алгебр над тем же полем.

Заметим, что произвольное предложение устойчиво относительно фильтрованных произведений тогда и только тогда, когда оно эквивалентно хорновскому предложению [18]. Произвольное предложение устойчиво относительно гомоморфизмов тогда и только тогда, когда оно эквивалентно позитивному или тождественно ложному предложению [19]. Отсюда в силу изложенного выше непосредственно вытекает, что произвольное позитивное предложение, истинное на классе $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{F}$, истинно и на $F\mathfrak{X}$. Произвольное позитивное предложение, истинное на $F\mathfrak{X}$, истинно и на $\mathfrak{X}$, а значит, и на $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{F}$ [20]. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathfrak{Y}$ — произвольное многообразие колец, $\mathfrak{Y}\cap F \rightleftharpoons \{F_i \mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{F_\omega\}\cup\{F_\tau\}$ — класс всех относительно свободных колец многообразия $\mathfrak{Y}$, где $F_\omega$ — кольцо счетного ранга, $F_\tau$ — такое кольцо, что $|F_\tau|>|F_\omega|$, $F_l$ — кольцо ранга $l$. Обозначим через $\mathscr{K}_1$ прямое произведение $\Pi F_l$ колец $F_l$, $l\in\mathbb{N}$, а через $\mathscr{K}_2$ — подкольцо кольца $\mathscr{K}_1$, порожденное множеством $\{(\underbrace{e_1,\dots,e_1}_{l},e_l,\dots,e_l,\dots)\mid l\in\mathbb{N}\}$. Очевидно, что $\mathscr{K}_2$ — подпрямое произведение множества колец $\mathfrak{Y}\cap F$. Кроме того, как нетрудно убедиться, кольцо $\mathscr{K}_2$ изоморфно кольцу $F_\omega$. В [21] доказано, что произвольное предложение, устойчивое относительно взятия подпрямых произведений, имеет вид

$$\forall\vec{x}(\psi\to\xi),$$

где $\psi$ — позитивная, а $\xi$ — атомарная формулы. Отсюда вытекает, в частности, что произвольное позитивное предложение и предложение вида

$$\varphi\rightleftharpoons\forall\vec{x}\,(f_1(\vec{x})=g_1(\vec{x})\wedge\dots\wedge f_m(\vec{x})=g_m(\vec{x})\to f_0(\vec{x})=g_0(\vec{x}))$$

устойчивы относительно взятия подпрямых произведений. Следовательно, произвольное предложение вида $\varphi$, истинное на классе $\mathfrak{Y}\cap F$, будет истинно и на $F_\omega$. Заметим, что произвольное кольцо $F_l$ является подкольцом кольца $F_\omega$. Отсюда в силу [20, 22, 23] вытекает, что произвольное предложение вида $\varphi$, истинное на $F_\omega$, истинно и на классе $\mathfrak{Y}\cap F$. Заметим, кроме того, что проведенные рассуждения сохраняют силу и в том случае, когда в качестве $\mathfrak{Y}$ берется произвольное многообразие полугрупп, групп или алгебр над полем. Теорема 2 доказана.

Прежде чем приступить к доказательству последней теоремы, напомним необходимые определения из работ [10, 16]. *Схемно-альтернативной иерархией языков фиксированной сигнатуры* $\gamma$ называется упорядоченное по включению семейство $SA$ всевозможных множеств $C_1\dots C_n\neg^r\wedge^t\vee^s$ и $\overline{\omega}\neg^r\wedge^t\vee^s$ $\gamma$-формул логики первого порядка, рассматриваемых в предваренной нормальной форме и определяемых равенствами

$$C_1\dots C_n\neg^r\wedge^t\vee^s=\Big\{Q_1\vec{x}\dots Q_v\vec{y}\bigvee_{i=1}^{d+1}\bigwedge_{j=1}^{c(i)+1}\neg^{m(i,j)}\chi_{ij}\mid (v<n\vee(v=n\wedge Q_1=C_1))$$

$$\wedge\operatorname{sgn}\sum m(i,j)\le r\wedge\operatorname{sgn}\sum c(i)\le t\wedge\operatorname{sgn}d\le s\Big\},$$

$$\overline{\omega}\neg^r\wedge^t\vee^s=\bigcup_{n\in\omega}C_1\dots C_n\neg^r\wedge^t\vee^s,$$

где $C_1,\dots,C_n,Q_1,\dots,Q_v\in\{\forall,\exists\}$, $C_i\ne C_{i+1}$, $Q_j\ne Q_{j+1}$; $r,t,s,m(i,j)\in\{0,1\}$; $w^1=w$, $w^0$ — пустой символ; $\vec{x}=x_1\dots x_p,\dots,\vec{y}=y_1\dots y_q$; $\chi_{ij}$ — атомарная $\gamma$-формула; $\operatorname{sgn}u$ — знак числа $u$. Таким образом, язык $C_1\dots C_n\neg^r\wedge^t\vee^s$ состоит из тех и только тех $\gamma$-формул $\varphi$, блочная схема кванторной приставки которых является (возможно, пустым) подсловом слова $C_1\dots C_n$, а в бескванторной части $\varphi$ любая из связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$ может присутствовать лишь при условии $r=1$, $t=1$, $s=1$ соответственно. Например, язык $\forall\exists$ составляют все $\gamma$-формулы вида $\chi$, $\forall\vec{x}\chi$, $\exists\vec{x}\chi$, $\forall\vec{x}\exists\vec{y}\chi$, где $\chi$ — атомарная $\gamma$-формула; язык $\forall\neg\vee$ состоит из всех

$\gamma$-формул вида $\psi$, $\forall\vec{x}\psi$, где $\psi$ не содержит кванторов и конъюнкции. Иерархия языков $SA$ определяет иерархию $SA\mathscr{K}$ теорий данного класса алгебраических систем сигнатуры $\gamma$, которая определяется равенством

$$SA\mathscr{K} = \langle\{L\mathscr{K} \mid L \in SA\}; \subseteq\rangle,$$

где $L\mathscr{K}$ — $L$-теория класса $\mathscr{K}$. Теория $L\mathscr{K}$ называется *критической*, если она является минимальной в $SA\mathscr{K}$ неразрешимой теорией. Легко понять, используя устройство $SA$ как частично упорядоченного множества, что описание критических теорий класса $\mathscr{K}$ автоматически дает описание всех в рамках $SA$ разрешимых теорий $\mathscr{K}$, поскольку теория $L\mathscr{K} \in SA\mathscr{K}$ разрешима тогда и только тогда, когда она не включает ни одной критической теории.

Доказательство теоремы 3. Для доказательства нам потребуется иной вид конечно-определенного йорданова кольца, нежели приведенный в работе [15]. Пусть $\mathscr{A}$ — ассоциативное кольцо, порожденное множеством $\{e_1, e_2\}$ и заданное нижеследующей конечной системой определяющих соотношений. Пусть $a = e_1e_2e_1$, $b = e_1e_2^2e_1$, $A = e_1e_2^3e_1$, $B = e_1e_2^4e_1$, $q_i = e_1e_2^{5+i}e_1$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$. Обозначим через $M$ двухленточную машину Минского, вычисляющую частичную характеристическую функцию некоторого фиксированного множества натуральных чисел $P$. Произвольной команде $q_i\delta_1\delta_2 \to q_j\varepsilon_1\varepsilon_2$ машины $M$ в зависимости от конкретных значений $\delta_1$ и $\delta_2$ поставим в соответствие соотношение согласно следующей таблице:

| $\delta_1$ | $\delta_2$ | Соотношения |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $ABq_iBA = ABa^{\epsilon_1}b^{\epsilon_2}q_jb^{\epsilon_2}a^{\epsilon_1}BA$ |
| 1 | 0 | $Abq_ibA = Aa^{\epsilon_1}b^{1+\epsilon_2}q_jb^{1+\epsilon_2}a^{\epsilon_1}A$ |
| 0 | 1 | $Baq_iaB = Ba^{1+\epsilon_1}b^{\epsilon_2}q_jb^{\epsilon_2}a^{1+\epsilon_1}B$ |
| 0 | 0 | $abq_iba = a^{1+\epsilon_1}b^{1+\epsilon_2}q_jb^{1+\epsilon_2}a^{1+\epsilon_1}$ |

К построенным соотношениям добавим еще соотношения $ab+ba = 0$, $aB+Ba = 0$, $bA + Ab = 0$, $AB + BA = 0$. Стандартными методами (см., например, [24]) можно убедиться, что в кольце $\mathscr{A}$ соотношение

$$ABa^{2^n}q_1a^{2^n}BA = ABaq_0aBA$$

выполняется тогда и только тогда, когда $n \in P$. Если в качестве $P$ взять рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество натуральных чисел, то в кольце $\mathscr{A}$ в силу изложенного выше будет неразрешима проблема равенства слов. Заметим, что все определяющие соотношения кольца $\mathscr{A}$ и соотношения

$$ABa^{2^n}q_1a^{2^n}BA = ABaq_0aBA$$

можно представить в виде $f(e_1, e_2) = 0$, где $f(e_1, e_2)$ — многочлен, симметричный относительно инволюции (см. [25, с. 39]). Следовательно, в силу теоремы Кона (см. [25, с. 76, теорема 3]) элементы свободного ассоциативного кольца ранга 2, соответствующие многочленам $f(e_1, e_2)$, будут йордановыми многочленами. На основании результатов [26] несложно убедиться в том, что йордановы представления определяющих соотношений кольца $\mathscr{A}$ задают конечно-определенное полуспециальное йорданово кольцо $\mathscr{B}$ с неразрешимой проблемой равенства. Пусть $\mathscr{B}_n$ — йорданово кольцо, заданное всеми определяющими соотношениями кольца $\mathscr{B}$ и, кроме того, соотношениями вида $w = {q_0}^n$, где $w$ — слово, длина которого больше $n$ и которое не представимо в кольце $\mathscr{B}$ в виде линейной комбинации слов, включающей слова, длина которых не превосходит $n$. Тогда легко проверить, что кольцо $\mathscr{B}$ изоморфно подалгебре фильтрованного произведения по фильтру Фреше колец $\mathscr{B}_n$.

Пусть $\psi$ — конъюнкция определяющих соотношений кольца $\mathscr{B}$, $\xi$ — равенство

$$ABa^{2^n}q_1a^{2^n}BA = ABaq_0aBA.$$

Рассмотрим предложение

$$\varphi \rightleftharpoons \forall e_1 e_2(\psi \to \xi)$$

и покажем, что это предложение истинно на классе конечных йордановых колец тогда и только тогда, когда оно истинно в многообразии всех йордановых колец. Допустим, что предложение $\varphi$ истинно в многообразии всех йордановых колец. Тогда очевидно, что оно истинно в классе конечных йордановых колец. Пусть теперь предложение $\varphi$ истинно в классе конечных йордановых колец. Тогда оно истинно и в множестве колец вида $\mathscr{B}_n$. Отсюда в силу [18] вытекает, что $\varphi$ истинно на фильтрованном произведении этих колец. Последнее ввиду [22, 23] влечет истинность предложения $\varphi$ на кольце $\mathscr{B}$, что равносильно истинности предложения $\varphi$ в многообразии йордановых колец. Следовательно, универсальная теория класса всех конечных йордановых колец неразрешима.

В работе [27] доказана неразрешимость универсальной теории класса конечных лиевых колец. Из теоремы 1 в силу результатов [6, 11, 15] следуют неразрешимость $\forall\exists$-теории и разрешимость $\exists\forall\wedge\vee$-теории классов конечных лиевых и йордановых колец. Поэтому для завершения доказательства теоремы нам достаточно показать, что разрешимы теории типов $\exists\neg\wedge\vee$, $\exists\forall\neg\wedge$. Произвольное предложение языка $\exists\neg\wedge\vee$ равносильно дизъюнкции предложений языка $\exists\neg\wedge$. Произвольное предложение языка $\exists\neg\wedge$ либо является предложением языка $\exists\forall\wedge\vee$, либо ложно на нулевом наборе, и произвольное предложение языка $\exists\forall\neg\wedge$ либо является предложением языка $\exists\forall\wedge\vee$, либо ложно на нулевом наборе. Следовательно, теории типов $\exists\neg\wedge\vee$ и $\exists\forall\neg\wedge$ разрешимы. Теорема 3 доказана.

Из теоремы 1 и результатов работы [11] вытекает, что для любого над-коммутативно-ассоциативного многообразия колец, заданного полиоднородными тождествами, теория типа $\forall\exists$ будет критической теорией класса всех конечных колец из этого многообразия. Заметим, что не всякое над-коммутативно-ассоциативное многообразие колец может быть задано полиоднородными тождествами. Например, многообразие $var\{(xy)(zx)-((xy)z)x+(xy)z-x(yz)=0\}$ является над-коммутативно-ассоциативным многообразием колец. Однако оно не может быть задано полиоднородными тождествами.

В заключение отметим открытый вопрос, связанный с полученными здесь результатами и теоремой 1 из работы [11].

**Вопрос.** Верно ли, что для любого над-коммутативно-ассоциативного многообразия колец граница разрешимости класса всех конечных колец из этого многообразия принадлежит множеству $\{\{\forall\}, \{\forall\exists, \forall\neg\vee\}, \{\forall\exists, \exists\forall\neg\vee\}\}$, причем реализуются все три случая?

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Важенин Ю. М., Розенблат Б. В.* Разрешимость позитивной теории свободной счетнопорожденной полугруппы // Мат. сб. 1981. Т. 116, № 1. С. 120–127.

**2.** *Розенблат Б. В.* Перестановочные многообразия полугрупп // XVII Всесоюз. алгебраическая конф. 2 часть, Минск, 1983 г.: Тез. докл. Минск: Бел. гос. ун-т, 1983. Р. 195–196.

**3.** *Бокуть Л. А.* Алгоритмические проблемы и теоремы вложения: некоторые открытые вопросы для колец, групп и полугрупп // Известия вузов. Математика. 1982. № 11. С. 3–11.

**4.** *Маканин Г. С.* Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе // Мат. сб. 1978. Т. 103, № 2. С. 147–237.

**5.** *Романьков В. А.* О неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости в свободных нильпотентных группах и свободных кольцах // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 457–471.

**6.** *Важенин Ю. М.* Критические теории некоторых классов неассоциативных колец // Алгебра и логика. 1989. Т. 28, № 4. С. 393–401.

**7.** *Важенин Ю. М., Попов В. Ю.* Критические теории свободных нильпотентных колец некоторых типов // Изв. вузов. Математика. 1991. № 3. С. 74–76.

**8.** *Попов В. Ю.* Разрешимые теории йордановых колец // Тез. X Всесоюз. конф. по математической логике. Алма-Ата, 1990. С. 134.

**9.** *Попов В. Ю.* Разрешимые теории альтернативных колец // Тез. Советско-французского коллоквиума по теории моделей. Караганда, 1990. С. 41.

**10.** *Важенин Ю. М.* Критические теории // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 1. С. 23–31.

**11.** *Попов В. Ю.* Критические теории над-коммутативно-ассоциативных многообразий колец // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1364–1374.

**12.** *Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю.* Алгебра-2. Тождества. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 18. (Итоги науки и техники).

**13.** *Маканин Г. С.* Уравнения в свободной группе // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т. 46, № 6. С. 1199–1273.

**14.** *Замятин А. П., Розенблат Б. В.* Элементарные теории относительно свободных полугрупп с перестановочным тождеством // Исследование алгебраических систем по свойствам их подсистем. Свердловск, 1985. С. 58–69.

**15.** *Умирбаев У. У.* Проблема равенства для йордановых и правоальтернативных алгебр // Некоторые проблемы и задачи анализа и алгебры. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1985. С. 120–127.

**16.** *Важенин Ю. М.* Множества, логика, алгоритмы. Екатеринбург: УрГУ, 1997.

**17.** *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

**18.** *Keisler H. J.* Limit ultraproducts // J. Symb. Logic. 1965. V. 30. P. 212–234.

**19.** *Lyndon R. C.* Properties preserved under homomorphism // Pacific J. Math. 1959. V. 9. P. 143–154.

**20.** *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

**21.** *Lyndon R. C.* Properties preserved in subdirect products // Pacific J. Math. 1959. V. 9. P. 155.

**22.** *Los J.* On the extending of models. I // Fund. Math. 1955. V. 42. P. 38–54.

**23.** *Tarski A.* Contributions to the theory of models. I, II // Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 1954. V. 57. P. 572–588.

**24.** *Kharlampovich O. G., Sapir M. V.* Algorithmic problems in varieties // Internat. J. Algebra Comput. 1995. V. 5, N 4–5. P. 379–602.

**25.** *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.

**26.** *Ширшов А. И.* О специальных $J$-кольцах // Мат. сб. 1956. Т. 38, № 2. С. 149–166.

**27.** *Харлампович О. Г.* Универсальная теория некоторых классов колец Ли // Исследования по алгебраическим системам. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1984. С. 156–164.


*Статья поступила 8 декабря 1998 г.*

*г. Екатеринбург*