Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 519.25

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ОТНОШЕНИЙ ПРОИЗВОДНЫХ МНОГОМЕРНОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ЗАВИСИМЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

В. А. Васильев, Г. М. Кошкин

Аннотация: Исследуются свойства непараметрических оценок отношений производных многомерной плотности распределения элементов случайной последовательности $\{\varepsilon_n\}$, согласованной с некоторым неубывающим потоком σ-алгебр $\{\mathscr{F}_n\}$. Предполагается, что величины ε_n одинаково распределены и наблюдаются с аддитивными зависимыми шумами $g_{\lambda,n-1}$, согласованными с $\{\mathscr{F}_{n-1}\}$. Здесь $\lambda \in \mathscr{A}$ — вектор, имеющий смысл мешающего параметра, $\mathscr{A}$ — множество допустимых значений λ. Найдена главная часть асимптотической среднеквадратической ошибки исследуемых оценок с улучшенной скоростью сходимости, которая при асимптотически ослабевающей зависимости шумов $g_{\lambda,n}$ совпадает с главной частью среднеквадратической ошибки оценок, построенных по независимым величинам $\{\varepsilon_n\}$, когда $g_{\lambda,n} \equiv 0$. Установлены сходимость с вероятностью единица, равномерная в $\mathscr{A}$ асимптотическая нормальность и сходимость в метрике L_m, $m \geq 2$, рассматриваемых оценок производных плотности и их отношений. Учет шумов $g_{\lambda,n}$ в модели наблюдений позволяет решить задачу оценивания отношений производных плотности распределения возмущений линейных стохастических регрессионных процессов с неизвестными параметрами. Библиогр. 51.

1. Введение

Одной из актуальных задач математической статистики является проблема восстановления многомерных плотностей распределений и их производных по зависимым выборкам. Начало таким исследованиям положено в работах [1–4]. Ядерные оценки плотностей распределений для одномерных марковских процессов изучались в [1–3]. Для слабозависимых процессов, в том числе удовлетворяющих различным условиям перемешивания, свойства ядерных оценок (в частности, их среднеквадратические ошибки) исследовались многими авторами (см., например, [4–12]). В ряде работ условия зависимости формулировались в терминах плотностей распределений [4, 13–15] или в их комбинации с условиями перемешивания [6, 7, 10]. Более подробную библиографию можно найти в [16, 17].

Следует также отметить работы [18–20], посвященные проблемам сильной состоятельности ядерных оценок при различных условиях перемешивания, и статьи [21–23], где представлены специфические виды зависимости выборки в задаче восстановления плотности распределения возмущений процесса авторегрессии с помощью ядерных оценок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 98–01–00296, 98–01–00297 и 98–07–03194).

Из недавних работ по этой тематике можно выделить следующие: в [24] для процессов перемешивания получено точное асимптотическое выражение среднеквадратической ошибки ядерной оценки плотности; в [25] показано, что в некоторых случаях наличие зависимости не сказывается на значении асимптотической дисперсии.

Наряду с восстановлением плотности распределения представляет интерес проблема оценивания частных производных многомерной плотности и их отношений, знание которых необходимо при решении ряда статистических задач таких, как

— восстановление функционала фишеровской информации плотности распределения f [26], являющегося симметричной $s \times s$-матрицей с элементами

$$I_{rq} = \int \frac{\partial f}{\partial x_r} \frac{\partial f}{\partial x_q} \frac{dx}{f(x)}, \quad r, q = \overline{1, s};$$

— оптимальное байесовское оценивание параметра θ экспоненциального распределения,

$$\theta = \left(\frac{\partial f(t)}{\partial t_1} \Bigg/ \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t_1^2}, \dots, \frac{\partial f(t)}{\partial t_s} \Bigg/ \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t_s^2} \right),$$

когда априорное распределение неизвестно [27];

— нахождение точек экстремума и проверка достаточных условий максимума и минимума многомодальных плотностей распределений (ср. [28]);

— построение алгоритма оптимального управления многомерным процессом авторегрессии [29];

— восстановление логарифмической производной плотности распределения, необходимой для оценивания кривой регрессии [30] и при проверке близких гипотез [31].

Рассмотренные задачи представляют особый интерес в случае зависимых наблюдений: например, логарифмическая плотность распределения используется при формировании оптимальных алгоритмов нелинейной фильтрации [32] и адаптивного управления [29] случайных процессов.

При оценивании отношений производных плотности используются, как правило, статистики подстановки [33], т. е. отношения каких-либо оценок для них, например ядерных оценок. Исследование свойств таких оценок сопряжено с известными трудностями, связанными с нахождением мажорантных последовательностей [34, с. 388]. В некоторых случаях, например при восстановлении логарифмической производной плотности распределения, можно использовать усеченные оценки, для которых найдено точное асимптотическое выражение их среднеквадратического отклонения [35].

В настоящей работе решается задача восстановления частных производных плотности и их отношений по наблюдениям с аддитивным зависимым шумом. При этом используются устойчивые оценки типа оценок из [36]. Найдена главная часть среднеквадратического отклонения оценок отношений с улучшенной скоростью сходимости, которая, как и в случае независимых наблюдений, имеет скорость сходимости среднеквадратического отклонения оценки старшей производной плотности распределения. Кроме того, установлена скорость сходимости оценок производных плотности и их отношений в метрике L_m, $m \geq 2$.

2. Постановка задачи

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ выделен неубывающий поток σ-подалгебр $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ и задана $\{\mathscr{F}_n\}$-согласованная последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\geq 1}$ одинаково распределенных случайных векторов $\varepsilon_n = (\varepsilon_{n1}, \ldots, \varepsilon_{ns})'$ с плотностью распределения $f(t)$, не зависящих от $\{\mathscr{F}_{n-1}\}$ для всех $n \geq 1$; штрих обозначает транспонирование.

Рассмотрим задачу оценивания отношения $T(t)$ частных производных плотности распределения $f(t)$ последовательности ε:

$$T(t) = \frac{f_a^{(\alpha)}(t)}{f_b^{(\beta)}(t)} = \frac{\partial^{(\alpha)} f(t)}{\partial t^{\alpha}} \Big/ \frac{\partial^{(\beta)} f(t)}{\partial t^{\beta}}, \quad f_0^{(0)}(t) = f(t), \tag{1}$$

$\partial t^{\alpha} = \partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_s^{\alpha_s}$, $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ — фиксированные векторы, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = \alpha$, $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_s = \beta$, по наблюдениям

$$\varepsilon_n + g_{\lambda,n-1}, \quad n \geq 1, \tag{2}$$

где $g_{\lambda} = \{g_{\lambda,n},\, n \geq 1\}$ — последовательность согласованных с $\{\mathscr{F}_n\}$ ненаблюдаемых и, возможно, зависимых между собой случайных векторов размерности s, векторный параметр $\lambda \in \mathscr{A}$ неизвестен и является мешающим, $\mathscr{A}$ — множество допустимых значений λ. Такая ситуация возникает, например, в случае, когда величины ε_n представляют собой остатки в схеме общей регрессии

$$x_n = A(n-1, x)\lambda + \varepsilon_n \tag{3}$$

с неизвестным векторным параметром λ, $A(n, x)$ — неупреждающие функции наблюдаемого процесса x_n, а оценки производных плотности распределения в (1) естественным образом строятся по приближениям остатков

$$\hat{\varepsilon}_n = x_n - A(n-1, x)\lambda(n-1) = \varepsilon_n + A(n-1, x)(\lambda - \lambda(n-1)), \tag{4}$$

где $\lambda(n)$ — последовательность некоторых оценок λ. Заметим, что для детерминированных последовательностей матриц задача восстановления функции распределения независимых величин в модели (3) по наблюдениям (4) рассматривалась в [37], а та же задача для процесса авторегрессии — в работах [23, 38]. В [39] показана возможность использования оценок распределений [38] при проверке гипотез критериями Колмогорова и ω^2. В [23] также получены ядерные оценки плотности распределения и ее производных для возмущений устойчивой авторегрессии с неасимптотическими свойствами. Другим примером использования модели (3) служит задача восстановления логарифмической производной плотности распределения шумов управляемого процесса авторегрессии, знание которой необходимо при формировании оптимального управления [29].

В качестве оценки отношения $T(t)$ по наблюдениям $\varepsilon_n + g_{\lambda,n-1}$ можно взять отношение статистик $\hat{f}_a^{(\alpha)}(t)$ и $\hat{f}_b^{(\beta)}(t)$ вида

$$\hat{f}_a^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{N h_N^{s+\alpha}} \sum_{n=1}^{N} K_a^{(\alpha)} \left(\frac{t - \varepsilon_n - g_{\lambda,n-1}}{h_N} \right), \tag{5}$$

где $K(z)$ — ядерная функция, $h = \{h_N\}_{N\geq 1}$ — некоторая последовательность положительных чисел. Оценки типа (5) плотности $f(t)$ по наблюдениям (2) рассмотрены в работе [40], согласно которой для оценок

$$T_N(t) = \hat{f}_a^{(\alpha)}(t)/\hat{f}_b^{(\beta)}(t) \tag{6}$$

отношения $T(t)$ можно установить свойства асимптотической нормальности и сходимости с вероятностью единица. Однако нахождение среднеквадратических ошибок оценок (6) вызывает затруднение в связи с возможной близостью знаменателя $\hat{f}_b^{(\beta)}$ к нулю. Поэтому по аналогии с [36] при восстановлении отношения $T(t)$ воспользуемся оценкой

$$\widetilde{T}_N(t) = \frac{T_N(t)}{(1+\delta_N|T_N(t)|^q)^\rho}, \tag{7}$$

где $\delta = \{\delta_N\}_{N\geq 1}$ — вспомогательная последовательность положительных чисел, постоянные ρ и q удовлетворяют соотношениям $\rho q \geq 1$, $\rho > 0$, $q > 0$.

В данной работе получено точное асимптотическое выражение среднеквадратических ошибок оценок (5) и (7) с улучшенной скоростью сходимости $N^{\nu/(s+2(\alpha+\nu))}$ и $N^{\nu/(s+2(\varpi+\nu))}$, $\varpi = \max(\alpha,\beta)$ соответственно, причем главные части среднеквадратического отклонения оценок для зависимых и независимых наблюдений совпадают при $N\to\infty$. Здесь ν — величина, определяемая максимальным порядком дифференцируемости плотности распределения $f(t)$.

Аналогичные результаты, имеющие самостоятельное значение, получены также для оценок отношений частных производных плотности распределения шумов многомерных процессов стохастической регрессии, в том числе и для авторегрессии. В этом случае при построении величин $\hat{\varepsilon}_n$ (4) используются последовательные оценки наименьших квадратов с контролируемой среднеквадратической ошибкой.

3. Асимптотические свойства $\hat{f}_a^{(\alpha)}(t)$

В этом пункте изучаются основные асимптотические свойства оценок производных плотности распределения $f(t)$ по зависимым наблюдениям (2).

Далее при отсутствии индекса $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ в обозначениях $f_a^{(\alpha)}$ и $\hat{f}_a^{(\alpha)}$ подразумевается, что набор компонент $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ не фиксирован.

Определение 1. (i) Плотность распределения $f(t)$ принадлежит $\mathscr{N}_1(n)$, если функция $f(t)$ непрерывна вместе с частными производными до порядка $n+\nu$ включительно на $\mathbb{R}^s$, $n\geq 0$, $\nu\geq 2$, причем все производные порядка $n+\nu$ удовлетворяют условию Липшица с постоянными $\mathscr{L}\geq 0$ и $0<\gamma\leq 1$ для всех $y\in\mathbb{R}^s$

$$|\rho(t,y)| \leq \mathscr{L}\|t-y\|^\gamma, \tag{8}$$

где $\rho(t,y) = f^{(n+\nu)}(t) - f^{(n+\nu)}(y)$, $\|z\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{s} z_i^2$;

(ii) плотность распределения $f(t)$ принадлежит $\mathscr{N}_2(n)$, если $f(t)\in\mathscr{N}_1(n)$ и $\sup\limits_t f(t)\leq C$.

Множество монотонно убывающих последовательностей $h = \{h_N\}_{N\geq 1}$ положительных чисел таких, что

$$\lim_{N\to\infty}(h_N + (Nh_N^{s+2\alpha})^{-1}) = 0,$$

обозначим через $\mathscr{H}_1(\alpha)$ и для некоторого целого $\nu \geq 2$ положим

$$\mathscr{H}_2(\alpha) = \mathscr{H}_1(\alpha) \cap \Big\{ h : \sum_{N \geq 1} (N h_N^{s+2\alpha})^{-2} < \infty \Big\},$$

$$\mathscr{H}_3(\alpha) = \mathscr{H}_1(\alpha) \cap \big\{ h : \lim_{N \to \infty} N h_N^{s+2(\alpha+\nu)} = 0 \big\}.$$

Определение 2. Финитная функция $K(u)$ принадлежит $\mathscr{B}(\alpha)$, если она непрерывно дифференцируема до порядка α включительно; $K(u) \in \mathscr{B}^+(\alpha)$, если $K(u) \in \mathscr{B}(\alpha)$ и $\int K(u) du = 1$.

Определение 3. Для некоторого четного $\nu \geq 2$ ядро $K(u)$ принадлежит $\Sigma_\nu(\alpha)$, если

$$K(u) \in \mathscr{B}^+(\alpha), \quad K(u) = K(-u), \quad \int \|u\|^\nu |K(u)| \, du < \infty,$$

$$\int u_i^j K(u) \, du = 0, \quad \int u_i^\nu K(u) \, du \neq 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, \nu - 1}.$$

Определение 4. (a) Семейство последовательностей $g(\mathscr{A}) = \{g_\lambda, \lambda \in \mathscr{A}\}$, принадлежит G_1, если $g_{\lambda,n} \to 0$ п. н. при $n \to \infty$;

(b) $g(\mathscr{A})$ принадлежит $G_2(m_1, m_2, \alpha)$, если $g(\mathscr{A}) \in G_1$ и при $N \to \infty$

$$\sup_{\mathscr{A}} \langle M_\lambda \|g_{\lambda,N-1}\|^{2m_1} \rangle = o(1/(N h_N^{s+2\alpha})^{m_1}),$$

$$\sup_{\mathscr{A}} \langle M_\lambda \|g_{\lambda,N-1}\|^{2m_1 m_2} \rangle = o\big(1/\big(N h_N^{s+2\alpha}\big)^{m_1}\big).$$

Здесь и далее

$$\sup_{\mathscr{A}} = \sup_{\lambda \in \mathscr{A}}, \quad \langle g_N \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g_n.$$

Обозначим

$$S_{a,b}^\alpha(\hat{f}) = M_\lambda\big(\hat{f}_a^{(\alpha)} - f_a^{(\alpha)}\big)\big(\hat{f}_b^{(\alpha)} - f_b^{(\alpha)}\big), \quad u^{2m}\big(\hat{f}_a^{(\alpha)}\big) = M_\lambda\big(\hat{f}_a^{(\alpha)} - f_a^{(\alpha)}\big)^{2m},$$

$$\omega_{a,b}^\alpha(t) = \omega_a^\alpha(t) \omega_b^\alpha(t),$$

$$\omega_a^\alpha(t) = \frac{1}{\nu!} \sum_{i=1}^{s} f_{a+b_i(\nu)}^{(\alpha+\nu)}(t) \int u_i^\nu K(u) \, du, \quad b_i(\nu) = \nu(\delta_{i1}, \ldots, \delta_{is})',$$

$$L_{a,b}^\alpha = \int K_a^{(\alpha)}(u) K_b^{(\alpha)}(u) \, du, \quad v_N^2(\alpha) = h_N^{2\nu} + \big(N h_N^{s+2\alpha}\big)^{-1},$$

$N \geq 1$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Следующая теорема отражает основные свойства оценок (5).

Теорема 1. (i) *Если* $f(t) \in \mathscr{N}_1(\alpha)$, $K(u) \in \Sigma_\nu(\alpha)$, $h \in \mathscr{H}_1(\alpha)$, $g(\mathscr{A}) \in G_2(1, \nu_\alpha, \alpha)$, $\nu_\alpha = \max(\nu + 1, (\alpha + \nu + 1)/2)$, $\nu \geq 2$, *то при* $N \to \infty$

$$\sup_{\mathscr{A}} \left| S_{a,b}^\alpha(\hat{f}) - \frac{L_{a,b}^\alpha f(t)}{N h_N^{s+2\alpha}} - \omega_{a,b}^\alpha(t) h_N^{2\nu} \right| = o\big(v_N^2(\alpha)\big);$$

для смещения b_N *оценки* $\hat{f}_a^{(\alpha)}(t)$ *при* $g(\mathscr{A}) \in G_2(1, \nu+1, \alpha)$ *имеем*

$$\sup_{\mathscr{A}} \bigl| b_N - \omega_a^\alpha(t) h_N^\nu \bigr| = o(v_N(\alpha));$$

(ii) *если* $f(t) \in \mathscr{N}_2(\alpha)$, $K(u) \in \mathscr{B}^+(\alpha)$, $g(\mathscr{A}) \in G_1$ *и* $h \in \mathscr{H}_2(\alpha)$, *то при всех* $\lambda \in \mathscr{A}$ *и* $N \to \infty$

$$\bigl| \hat{f}_a^{(\alpha)}(t) - f_a^{(\alpha)}(t) \bigr| = o(1) \text{ п. н.};$$

(iii) *если* $f(t) \in \mathscr{N}_2(\alpha)$, $K(u) \in \Sigma_\nu(\alpha)$, $h \in \mathscr{H}_3(\alpha)$ *и* $g(\mathscr{A}) \in G_2(1, \nu_\alpha, \alpha)$, *то*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\Theta} \bigl| P_\lambda \bigl\{ \sqrt{N h_N^{s+2\alpha}} \bigl(\hat{f}_a^{(\alpha)}(t) - f_a^{(\alpha)}(t) \bigr) \le z \bigr\} - \Phi\bigl(z / \sqrt{L_{a,a}^\alpha f(t)} \bigr) \bigr| = 0,$$

где $\Theta = \{\theta = (\lambda, t, z),\ \lambda \in \mathscr{A},\ t \in \mathbb{R}^s,\ z \in \mathbb{R}^1\}$, $\Phi(x)$ — *стандартное гауссовское распределение;*

(iv) *если* $f(t) \in \mathscr{N}_2(\alpha)$, $K(u) \in \Sigma_\nu(\alpha)$, $g(\mathscr{A}) \in G_2(m, \nu+1, \alpha)$, $m \ge 1$, $h \in \mathscr{H}_1(\alpha)$, *то*

$$\sup_{\mathscr{A}} u^{2m}\bigl(\hat{f}_a^{(\alpha)}\bigr) = O\bigl(v_N^{2m}(\alpha)\bigr), \quad N \to \infty.$$

Доказательство теоремы 1 вынесено в приложение.

Замечание 1. Первое утверждение теоремы 1 показывает, в частности, что наличие зависимого шума g_λ со свойствами G_2 в наблюдениях не изменяет асимптотического значения главной части среднеквадратической ошибки оценок $\hat{f}_a^{(\alpha)}(t)$, оптимизация которой по h_N приводит к улучшенной скорости сходимости $N^{\nu/(s+2(\alpha+\nu))}$ оценок. Второе и третье утверждения теоремы 1 позволяют установить сходимость с вероятностью 1 и равномерную асимптотическую нормальность оценок T_N, а при определенных условиях на последовательность δ — и оценок $\widetilde{T}_N$.

4. Оценивание $T(t)$

Известно [34–36], что оценки подстановки типа $T_N(t)$ отношения $T(t)$ неустойчивы при использовании знакопеременных ядер для восстановления производных плотности распределения вследствие возможной близости к нулю знаменателя $\hat{f}_a^{(\alpha)}(x)$. В результате оказываются неприменимыми теоремы о среднеквадратических отклонениях оценок сложных функций, имеющих особенности и требующих нахождения мажорантных последовательностей [33, 41, 42]. Один из способов решения этой проблемы дает использование кусочно-гладкой аппроксимации вида (7).

Обозначим через $\hat{\phi} = \{\phi_N\}_{N\ge1}$ последовательность оценок аргумента ϕ функции $H(\phi)$: $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^1$, $p \ge 1$, $T(m,k) = \{q > 0 : q > k/\max(1, (k-1)/2)$, если k нечетно; $q > 2k/(k-1)$, если k четно$\}$, $\widetilde{H}(\phi_N) = H(\phi_N)/(1 + \delta_N |H(\phi_N)|^q)^\rho$, и сформулируем теорему о свойствах оценки $\widetilde{H}(\phi_N)$, которая является следствием 4 работы [43].

Теорема 2. *Пусть*

1) *для некоторого* $m \ge 2$

$$M\|\phi_N - \phi\|^{2m} = O(d_N^{-m}), \quad d_N \uparrow \infty,$$

2) функция $H(z)$ принадлежит $W_p(\phi)$, т. е. $H(z)$ и все ее частные производные до второго порядка включительно непрерывны и ограничены в некоторой окрестности точки ϕ,

3) $\delta_N = Cd_N^{-1}$, $0 < C < \infty$,

4) $H(\phi) \neq 0$ *или q натуральное четное.*

Тогда при $q \in T(m,k)$ для всех $1 \le k \le m$ имеет место неравенство

$$M[\widetilde{H}(\phi_N) - H(\phi)]^k = M[\nabla H(\phi)(\phi_N - \phi)]^k + O\bigl(d_N^{-\frac{k+1}{2}}\bigr),$$

где $\nabla H(\phi) = \bigl(\frac{\partial H}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \phi_p}\bigr)$.

Применение теорем 1, 2 к задаче оценивания $T(t)$ приводит к следующему результату. Положим $\chi(x \le a) = (1, x \le a; 0, x > a)$,

$$\widetilde{L}_{a,b}^{\alpha,\beta} = f\bigl(f_b^{(\beta)}\bigr)^{-2}\bigl[L_{a,a}^{\alpha}\chi(\alpha \ge \beta) - 2TL_{a,b}^{\alpha}\chi(\alpha = \beta) + T^2 L_{b,b}^{\beta}\chi(\alpha \le \beta)\bigr],$$

$$\widetilde{\omega}_{a,b}^{\alpha,\beta} = \bigl(f_b^{(\beta)}\bigr)^{-2}\bigl[\omega_a^{\alpha}\chi(\alpha \ge \beta) - T\omega_b^{\beta}\chi(\alpha \le \beta)\bigr]^2, \quad \varpi = \max(\alpha, \beta).$$

Теорема 3. *Пусть $f(t) \in \mathscr{N}_2(\varpi)$, $\nu \ge 2$, $g(\mathscr{A}) \in G_2(m, \nu_\varpi, \varpi)$ для некоторого $m \ge 1$, $h \in \mathscr{H}_1(\varpi)$. Тогда для оценок $\widetilde{T}_N$, определенных в (7), для любых $(q,k) \in T_1(m)$, $\delta_N = O\bigl(v_N^2(\varpi)\bigr)$, $N \to \infty$, справедливы соотношения*

$$\sup_{\mathscr{A}} M_\lambda|\widetilde{T}_N(t) - T(t)|^k = O\bigl(v_N^k(\varpi)\bigr); \tag{9}$$

главная часть среднеквадратического отклонения оценки $\widetilde{T}_N$ определяется равенством

$$\sup_{\mathscr{A}}\left|M_\lambda[\widetilde{T}_N(t) - T(t)]^2 - \frac{f(t)\widetilde{L}_{a,b}^{\alpha,\beta}}{Nh_N^{s+2\varpi}} - \widetilde{\omega}_{a,b}^{\alpha,\beta}h_N^{2\nu}\right| = o\bigl(v_N^2(\varpi)\bigr). \tag{10}$$

Отметим, что равномерная по $\lambda \in \mathscr{A}$ сходимость остаточных членов в (9) и (10) получается вследствие независимости функции $f(\cdot)$ от параметра λ. При этом скорость сходимости среднеквадратического отклонения оценки $\widetilde{T}_N$ отношения T определяется скоростью сходимости среднеквадратического отклонения оценки старшей производной плотности f в определении T.

В следующих пунктах полученные результаты применяются для конкретных моделей зависимости.

5. Оценивание отношений производных плотности распределения шумов линейных регрессионных процессов

Рассмотрим многомерный случайный процесс $x_n = (x_{n1}, \dots, x_{ns})'$, удовлетворяющий системе уравнений

$$x_n = A_o(n-1) + A_1(n-1)\lambda + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)'$ — вектор неизвестных параметров, $\lambda \in \mathscr{A}$, $\mathscr{A}$ — ограниченное множество в $\mathbb{R}^p$, $A_i(n)$ — наблюдаемые $\mathscr{F}_n$-измеримые матричные функции, возможно, зависящие от наблюдений $x_1, \dots, x_n$. Предположим, что размерность p параметра λ не превосходит размерности s процесса x, а шумы ε_n образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с плотностью распределения $f(t)$, удовлетворяющей определению 1. Задача состоит в построении улучшенных по скорости сходимости оценок частных производных плотности $f(t)$ и их отношений.

Пусть $\lambda(n)$ — некоторые оценки параметра λ процесса (11). Для восстановления плотности $f(t)$ определим оценки величин ε_n по формуле

$$\hat{\varepsilon}_n = x_n - A_0(n-1) - A_1(n-1)\lambda(n-1) = \varepsilon_n + g_{\lambda,n-1}, \tag{12}$$

$$g_{\lambda,n} = A_1(n)\Delta(n), \quad \Delta(n) = \lambda - \lambda(n).$$

Оценки вида (12) могут использоваться при решении многих статистических задач [23, 37–40]. При определении $\hat{\varepsilon}_n$ в (12) возьмем последовательные оценки параметра λ, предложенные в работе [44]: для $i = \overline{1,p}$ положим

$$\lambda_i(n) = \mathrm{proj}_{\overline{\mathscr{A}}}\lambda_i^*(k-1), \quad \tau_i(k-1) \le n < \tau_i(k), \tag{13}$$

где

$$\lambda_i^*(k) = k^{-\varphi}\sum_{j=1}^{\tau_i(k)} \alpha_i(j)c_i(j-1)(A^+(j-1)(x_j - A_0(j-1)))_i,$$

$$\tau_i(k) = \inf\left\{t \ge 1 : \sum_{j=1}^{t} c_i(j-1) \ge k^{\varphi}\right\}, \quad \lambda_i^*(0) = 0, \quad \tau_i(0) = 0;$$

$$c_i(j) = \begin{cases} 1/([A_1'(j)A_1(j)]^{-1})_{ii}, & \mathrm{rank}\, A_1(j) \ge p, \\ 0, & \mathrm{rank}\, A_1(j) < p; \end{cases} \quad \alpha_i(j) = \begin{cases} 1, & j < \tau_i(k), \\ \alpha_{i,k}, & j = \tau_i(k), \end{cases}$$

$$\alpha_{i,k} = \left(k^{\varphi} - \sum_{j=1}^{\tau_i(k)-1} c_i(j-1)\right)\Big/c_i(\tau_i(k)-1); \quad A^+(j) = [A_1'(j)A_1(j)]^{-1}A_1'(j),$$

$\overline{\mathscr{A}}$ — замыкание множества $\mathscr{A}$, $(a)_i$ обозначает i-ю компоненту вектора a, $(A)_{ij}$ — элемент матрицы A. Отметим, что $0 < a_i(j) \le 1$ для всех i и j.

Величины $\lambda_i^*(k)$ представляют собой взвешенные оценки наименьших квадратов, вычисленные в случайные моменты времени $\tau_i(k)$, и имеют заданную величину среднеквадратического отклонения для всех $k \ge 1$ [44]. Единственное отличие оценок $\lambda_i^*(k)$ от предложенных в [44] состоит в конкретном выборе параметра $H = k^{\varphi}$ в определении моментов остановки $\tau_i(k)$.

Обозначим $\|x\|_m = \left(\sum\limits_i |x_i|^m\right)^{1/m}$, $\varepsilon(n) = (\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n')'$, $m_\varepsilon(\theta) = M\|\varepsilon_1\|^{\theta}$, $\Delta^*(k) = \lambda - \lambda^*(k)$, $\lambda^*(k) = (\lambda_1^*(k), \ldots, \lambda_p^*(k))'$.

Утверждения теорем 1 и 3 для модели наблюдений (11) будут справедливы, если для семейства последовательностей $g(\mathscr{A})$, определенных в (12), выполнены условия G_2.

Лемма. *Пусть последовательности g_λ, $\lambda \in \mathscr{A}$, определены в* (11)–(13) *и*
(i) $m_\varepsilon(2(m_1m_2+1)) < \infty$, $\sup\limits_{\mathscr{A},n} M_\lambda\|c(n)\|/n < \infty$;
(ii) *для всех $n \ge 0$ таких, что* $\mathrm{rank}\, A_1(n) \ge p$, *имеют место неравенства*

$$\max_{j=\overline{1,s}}\left[A_1'(n)A_1(n)\right]_{jj}\left(\left[A_1'(n)A_1(n)\right]^{-1}\right)_{jj} \le C; \tag{14}$$

(iii) *для некоторых постоянных* $\mu_i(\lambda)$ *таких, что* $\inf\limits_{\mathscr{A}} \mu_i(\lambda) > 0$,

$$\sup_{\mathscr{A}} \sum_{t\ge 1} P_\lambda \left\{ \left| \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{t} (c_i(n-1) - \mu_i) \right| \ge \eta \right\} < \infty, \tag{15}$$

где $0 < \eta < \mu_i$, $i = \overline{1,p}$;

(iv) *для всех* $n \ge 0$ *выполнена оценка*

$$\sup_{\mathscr{A}} \|A_1(n)\| \le C \|\varepsilon(n)\|_{2(m+1)} \tag{16}$$

и в определении (13) $\varphi > m + 1$.

Тогда $g(\mathscr{A}) \in G_2(m_1, m_2, \alpha)$, $m_1 \ge 1$, $m_1 m_2 \ge 2$ *при* $h \in \mathscr{H}_1(\alpha)$, *причем*

$$\sup_{\mathscr{A}} \sum_{n=1}^{N} M_\lambda \|g_{\lambda,n-1}\|^{2m} = \begin{cases} O(\ln N), & m = 1, \\ O(1), & m > 1. \end{cases} \tag{17}$$

Доказательство леммы вынесено в приложение.

Замечание 2. Условие (15) требуется согласно [45] для доказательства предельных соотношений

$$\sup_{\mathscr{A}} M_\lambda \tau_i(k) = O(k^\varphi), \quad i = \overline{1,p},\ k \to \infty, \tag{18}$$

и выполняется, например, для многомерных устойчивых процессов авторегрессии [46]. Однако, как будет показано в п. 6, свойства (18) моментов $\tau_i(k)$ могут иметь место и при более слабых предположениях, чем (15).

6. Примеры

В данном пункте теоремы 1 и 3 используются для оценивания отношений производных плотности распределения шумов авторегрессионных процессов, знание которых необходимо, например, для формирования оптимального управления при квадратичном критерии [29].

6.1. Авторегрессия первого порядка. Пусть x_n — скалярный устойчивый процесс авторегрессии первого порядка

$$x_n = \lambda x_{n-1} + \varepsilon_n, \quad -\infty < x_0 < \infty, \quad n \ge 1, \tag{19}$$

с неизвестным параметром $\lambda : |\lambda| < 1$; $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью распределения $f(t)$, удовлетворяющей определению 1. Процесс (19) является процессом типа (11) с $A_0(n) = 0$, $A_1(n) = x_n$, $s = p = 1$, и согласно (12)

$$\hat{\varepsilon}_n = x_n - x_{n-1}\lambda(n-1) = \varepsilon_n + g_{\lambda,n-1}, \tag{20}$$

$g_{\lambda,n} = x_n \Delta(n)$, $\Delta(n) = \lambda - \lambda(n)$. Здесь оценки $\lambda(n)$ параметра λ определяются в соответствии с (13) по формулам

$$\lambda(n) = \mathrm{proj}_{[-1,1]} \lambda^*(k-1), \quad \tau(k-1) \le n < \tau(k), \quad n \ge 1,\ k \ge 1, \tag{21}$$

$$\lambda^*(k) = k^{-\varphi} \sum_{n=1}^{\tau(k)} \alpha(n) x_n x_{n-1}, \quad \lambda^*(0) = 0,$$

$$\tau(k) = \inf\left\{ t \geq 1 : \sum_{n=1}^{t} x_{n-1}^2 \geq k^{\varphi} \right\}, \quad \tau(0) = 0, \ \varphi > 0,$$

$$\alpha(n) = \begin{cases} 1, & n < \tau(k), \\ \alpha_k, & n = \tau(k), \end{cases} \quad \alpha_k = \frac{1}{x_{\tau(k)-1}^2} \left(k^{\varphi} - \sum_{n=1}^{\tau(k)-1} x_{n-1}^2 \right).$$

Для некоторого $0 < r < 1$ положим $\mathscr{A} = \{\lambda\colon |\lambda| \leq r\}$. Заметим, что равенство (18) непосредственно следует из неравенства (3.16) работы [47]. Для последовательности g_λ, определенной в (20), все условия леммы, кроме (15), нетрудно проверить, используя решение уравнения (19). Поэтому утверждения леммы справедливы и можно сформулировать теорему о свойствах оценок производных плотности распределения шумов процесса (19).

Теорема 4. *Для оценок* (5), *построенных по наблюдениям* (20), *выполняются утверждения* (i)–(iv) *теоремы* 1, *если соответственно*

(i) $f(t)$ *принадлежит* $\mathscr{N}_1(\alpha)$, h *принадлежит* $\mathscr{H}_1(\alpha)$, *и существуют моменты*

$$m_{x_0}(2\nu_\alpha) < \infty, \quad m_\varepsilon(2\nu_\alpha) < \infty; \tag{22}$$

(ii) $f(t) \in \mathscr{N}_2(\alpha)$, $h \in \mathscr{H}_2(\alpha)$, $m_{x_0}(4) < \infty$, $m_\varepsilon(4) < \infty$;

(iii) $f(t)$ *принадлежит* $\mathscr{N}_2(\alpha)$, h *принадлежит* $\mathscr{H}_3(\alpha)$, *и выполнены условия* (22);

(iv) $f(t) \in \mathscr{N}_2(\alpha)$, $h \in \mathscr{H}_1(\alpha)$, $m_{x_0}(2m\nu_\alpha) < \infty$, $m_\varepsilon(2m\nu_\alpha) < \infty$.

Если $f(t) \in \mathscr{N}_2(\varpi)$, $h \in \mathscr{H}_1(\varpi)$, $q > 4$, для некоторого $m \geq 1$ существуют моменты $m_{x_0}(2m\nu_\varpi) < \infty$ и $m_\varepsilon(2m\nu_\varpi) < \infty$, то для оценок (7) справедливо утверждение теоремы 3.

6.2. Авторегрессия второго порядка. Пусть процесс $x = \{x_n = (x_{n1}, x_{n2})'\}$ удовлетворяет равенствам

$$x_{n1} = \lambda_1 x_{(n-1)1} + \lambda_2 x_{(n-1)2} + \varepsilon_{n1}, \quad x_{n2} = \lambda_2 x_{(n-1)1} - \lambda_1 x_{(n-1)2} + \varepsilon_{n2}, \quad n \geq 1.$$

Предположим, что процесс авторегрессии x устойчив, т. е. $\|\lambda\| < 1$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)'$, шумы $\varepsilon_n = (\varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2})'$ образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, не зависят от x_0, $Mx_0 = M\varepsilon_1 = 0$, $M\varepsilon_n \varepsilon_n' > 0$, параметр λ неизвестен.

Согласно (11) и (13) имеем

$$A_0(n) = 0, \quad A_1(n) = \begin{bmatrix} x_{n1} & x_{n2} \\ -x_{n2} & x_{n1} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$A'_1(n) A_1(n) = \|x_n\|^2 I, \quad c_i(n) = \|x_n\|^2, \quad A^+(n) = A'_1(n)/\|x_n\|^2,$$

$$\lambda(n) = \operatorname{proj}_{[\|\lambda\| \leq 1]} \lambda^*(k-1), \quad \tau(k-1) \leq n < \tau(k), \quad n \geq 1, \ k \geq 1,$$

$$\lambda^*(k) = k^{-\varphi} \sum_{n=1}^{\tau(k)} \alpha(n) A'_1(n-1) x_n, \quad \lambda^*(0) = 0,$$

$$\tau(k) = \inf\left\{t \geq 1 : \sum_{n=1}^{t} \|x_{n-1}\|^2 \geq k^{\varphi}\right\}, \quad \tau(0) = 1,\ \varphi > 0,$$

$$\alpha(n) = \begin{cases} 1, & n < \tau(k), \\ \alpha_k, & n = \tau(k), \end{cases} \quad \alpha_k = \frac{1}{x^2_{\tau(k)-1}}\left(k^{\varphi} - \sum_{n=1}^{\tau(k)-1} \|x_{n-1}\|^2\right).$$

Оценки $\lambda^*(k)$ могут быть записаны в векторной форме, поскольку длительности $\tau_i(k)$ оценивания обеих компонент $\lambda_i(k)$ совпадают.

Для некоторого $0 < r < 1$ положим $\mathscr{A} = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) : \|\lambda\| \leq r\}$ и покажем, что для процесса x справедливы утверждения леммы.

Соотношения (14) очевидны, при этом $C = 1$. Запишем уравнения для x в виде

$$x_n = Ax_{n-1} + \varepsilon_n, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

решение которого определяется формулой

$$x_n = \sum_{t=0}^{n} A^t \varepsilon_{n-t}, \quad \varepsilon_0 = x_0,\ n \geq 0. \tag{25}$$

Отметим, что для процесса (24) при любом $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} \|x_k\|^2 \geq \tilde{c} \sum_{k=1}^{n} \|\varepsilon_k\|^2, \quad \tilde{c} = \left\{\sqrt{\sqrt{2}/2 + 1} - 1\right\}^2, \tag{26}$$

которое устанавливается, как в лемме 1 работы [47], с использованием равенств

$$\|x_n\|^2 = \|\lambda\|^2 \|x_{n-1}\|^2 + 2x'_{n-1} A \varepsilon_n + \|\varepsilon_n\|^2, \quad n \geq 1.$$

Неравенства (26) обеспечивают, в частности, конечность с вероятностью 1 моментов остановки $\tau(k)$, $k \geq 1$. Далее, при $m_\varepsilon(2) < \infty$ с помощью (25) находим

$$M_\lambda \|c(n)\| \leq 2M_\lambda \left[\sum_{t=0}^{n} \|\lambda\|^t \|\varepsilon_{n-t}\|\right]^2 \leq \frac{2m_\varepsilon(2)}{(1 - \|\lambda\|)^2} < \infty, \quad n \geq 0. \tag{27}$$

Здесь использованы свойство устойчивости матрицы A ($\|\lambda\| < 1$) и равенства $\|A^t\| = \sqrt{2}\|\lambda\|^t$, $t \geq 1$. В соответствии с (27)

$$\sup_{\mathscr{A}, n} M_\lambda \|c(n)\|/n \leq 2m_\varepsilon(2)/(1 - r)^2,$$

и по неравенству Гёльдера

$$\sup_{\mathscr{A}} \|A_1(n)\| = \sqrt{2} \sup_{\mathscr{A}} \|x_n\| \leq 2 \sup_{\mathscr{A}} \sum_{t=0}^{n} \|\lambda\|^t \|\varepsilon_{n-t}\| \leq \frac{2}{1 - r} \|\varepsilon(n)\|_{2(m+1)},$$

откуда вытекает (16).

Соотношение (18) для моментов $\tau(k)$ следует из неравенств

$$\tau(k) \leq \tau_0(\tilde{c}^{-1} k), \quad k \geq 1, \quad \tau_0(H) = \inf\left\{k \geq 1 : \sum_{j=1}^{k} \|\varepsilon_j\|^2 \geq H\right\},$$

вытекающих из (26) и леммы 9 работы [47], согласно которой существует универсальная константа $m_0 < \infty$ такая, что

$$\sup_{H \geq H_0} M\tau_0(H)/H \leq m_0$$

для любого $H_0 > 0$.

Таким образом, для устойчивого процесса x справедливы утверждения теоремы 4, в формулировке которой необходимо учесть двумерность аргумента плотности f и параметра λ.

Замечание 3. Модель (11) позволяет решать статистические задачи и для более сложных динамических систем, параметры которых могут быть восстановлены с заданной точностью (см., например, [48]).

7. Заключение

В работе получены оценки (5) и (7) производных плотности распределения порядка α и отношений $T(t)$ по зависимым наблюдениям с улучшенной скоростью сходимости, соответственно $N^{\nu/(s+2(\alpha+\nu))}$ и $N^{\nu/(s+2(\varpi+\nu))}$, главные части среднеквадратического отклонения которых отвечают случаю независимых наблюдений. При высокой степени гладкости плотности распределения (больших ν) скорость сходимости этих оценок приближается к скорости сходимости $N^{1/2}$ параметрических оценок плотности. Установлена сходимость с вероятностью единица и равномерная асимптотическая нормальность оценок производных плотности распределения (5) и их отношений (7).

Результаты применены для динамических систем, в частности, для оценивания отношений производных плотности распределения шумов процессов авторегрессии первого и второго порядков. Другие примеры процессов, для которых решаются подобные задачи, можно найти в работе [49].

Утверждения теорем 1 и 2 позволяют оценивать не только отношения производных плотности распределения, но и более общие функции $H(\cdot) \in W_p(\phi)$ от производных плотности различных порядков в метрике L_m, $m \geq 2$.

8. Приложение

Доказательство теоремы 1. Установим первое утверждение п. (i) теоремы 1 для случая $a = b$, поскольку в общем случае доказательство принципиально не отличается от доказательства в этом случае. Обозначим

$$r_N = \frac{1}{N h_N^{s+\alpha}} \sum_{n=1}^{N} \int K_a^{(\alpha)} \left(\frac{t - u - g_{n-1}}{h_N} \right) f(u)\, du. \tag{П.1}$$

Представим среднеквадратическое отклонение оценки (5) в виде

$$u^2(\hat{f}_a^{(\alpha)}) = \sigma_N^2 + \theta_N^2 + a_N, \quad \sigma_N^2 = M_\lambda \big(\hat{f}_a^{(\alpha)} - r_N\big)^2,$$

$$\theta_N^2 = M_\lambda \big(r_N - f_a^{(\alpha)}\big)^2, \quad a_N = 2M_\lambda \big(\hat{f}_a^{(\alpha)} - r_N\big)\big(r_N - f_a^{(\alpha)}\big),$$

при этом смещение оценки $\hat{f}_a^{(\alpha)}$ равно $b_N = M_\lambda r_N - f_a^{(\alpha)}$.

Заметим, что при $g_\lambda \equiv 0$ величины a_N равны 0, а σ_N^2 и θ_N^2 представляют собой соответственно дисперсию и квадрат смещения оценки $\hat{f}_a^{(\alpha)}$.

Покажем, что при $N \to \infty$

$$\sup_{\mathscr{A}} \left| \sigma_N^2 - \frac{L_{a,a}^{\alpha} f(t)}{N h_N^{s+2\alpha}} \right| = o\left(\frac{1}{N h_N^{s+2\alpha}} \right). \tag{П.2}$$

Обозначим

$$\xi_n = K_a^{(\alpha)}\left(\frac{t - \varepsilon_n - g_{n-1}}{h_N} \right) - \int K_a^{(\alpha)}\left(\frac{t - u - g_{n-1}}{h_N} \right) f(u)\, du. \tag{П.3}$$

Здесь и далее отсутствие индекса N у функций, зависящих от N, будет означать, что в рассуждениях, использующих эти обозначения (исключая предельные по N соотношения), N фиксировано. Отметим, что

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{h_N^{2(s+\alpha)}} M_\lambda(\langle \xi_N \rangle)^2 = \frac{1}{N h_N^{2(s+\alpha)}} \langle M_\lambda \xi_N^2 \rangle. \tag{П.4}$$

В дальнейшем под $\sum\limits_{\eta(k)}$ будем подразумевать суммирование по всем $\vartheta \in \eta(k)$, для вектора $x = (x_1, \dots, x_s)'$ положим $x^k = x_1^{\eta_1} \cdots x_s^{\eta_s}$, $\eta_1 + \ldots + \eta_s = k$ и $|k|! = \eta_1! \cdots \eta_s!$; $\tilde g_n(z) = g_n + h_N z$.

По определению ξ_n имеем

$$M_\lambda \xi_n^2 = h_N^s M_\lambda\big(I_n - h_N^s J_n^2\big), \tag{П.5}$$

$$I_n = \int \big(K_a^{(\alpha)}(z)\big)^2 f(t - \tilde g_{n-1}(z))\, dz, \ J_n = \int K_a^{(\alpha)}(z) f(t - \tilde g_{n-1}(z))\, dz.$$

В интеграле I_n разложим функцию f в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \langle M_\lambda I_N \rangle = L_{a,a}^{\alpha} f(t) &+ \sum_{k=1}^{\alpha+\nu} \frac{(-1)^k}{|k|!} \sum_{\eta(k)} f_\vartheta^{(k)}(t) \int \big(K_a^{(\alpha)}(z)\big)^2 \big\langle M_\lambda \tilde g_{N-1}^k(z) \big\rangle\, dz \\ &+ \frac{(-1)^{\alpha+\nu}}{|\alpha+\nu|!} \sum_{\eta(\alpha+\nu)} \int \big(K_a^{(\alpha)}(z)\big)^2 \big\langle M_\lambda \rho(\zeta, t) \tilde g_{N-1}^{\alpha+\nu}(z) \big\rangle\, dz. \end{aligned} \tag{П.6}$$

Здесь $\zeta = t - \theta \tilde g_{n-1}(z)$, $0 < \theta < 1$.

Найдем оценки сверху всех слагаемых, кроме первого, в правой части (П.6). По c_r-неравенству и определению $\tilde g^k(z)$ имеем

$$\big|\tilde g_{n-1}^k(z)\big| \le C\big(\|g_{n-1}\|^k + h_N^k \|z\|^k\big). \tag{П.7}$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера и соотношение

$$x^p y^{1-p} \le x + y, \quad 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le p \le 1,$$

для $k = \overline{1, \alpha+\nu}$ получаем

$$\begin{aligned} \big|\big\langle M_\lambda \tilde g_{N-1}^k(z) \big\rangle\big| &\le \big(\big\langle M_\lambda \big|\tilde g_{N-1}^{\alpha+\nu+1}(z)\big| \big\rangle\big)^{\frac{k}{\alpha+\nu+1}} \\ &\le C\big[(\langle M_\lambda \|g_{N-1}\|^{\alpha+\nu+1} \rangle)^{\frac{k}{\alpha+\nu+1}} + h_N^k \|z\|^k\big]. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в правой части (П.6) оценивается величиной

$$\mathscr{L}\big(\big\langle M_\lambda \|\tilde g_{N-1}\|^\gamma \big|\tilde g_{N-1}^{\alpha+\nu}(z)\big|\big\rangle\big) \le C[\langle M_\lambda \|g_{N-1}\|^{\alpha+\nu+\gamma}\rangle + (h_N\|z\|)^{\alpha+\nu+\gamma}]$$
$$\le C[(\langle M_\lambda \|g_{N-1}\|^{\alpha+\nu+1}\rangle)^{\frac{\alpha+\nu+\gamma}{\alpha+\nu+1}} + h_N\|z\|)^{\alpha+\nu+\gamma}]. \quad (\text{П.8})$$

Из (П.6)–(П.8), условий $\Sigma_\nu(\alpha)$, $\mathscr{H}_1(\alpha)$ и $G_2(1,\nu_\alpha,\alpha)$ следует равенство

$$\sup_{\mathscr{A}}\big|\langle M_\lambda I_N\rangle - L^\alpha_{a,a} f(t)\big| = o(1). \quad (\text{П.9})$$

Преобразуем интеграл J_n, применив α раз формулу интегрирования по частям и формулу Тейлора для $f_a^{(\alpha)}$:

$$J_n = h_N^\alpha \int K(z) f_a^{(\alpha)}(t - \tilde g_{n-1}(z))\,dz$$
$$= h_N^\alpha \Bigg[\sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^k}{|k|!} \sum_{\eta(k)} f_{a+\vartheta}^{(\alpha+k)}(t) \int K(z)\tilde g^k_{n-1}(z)\,dz$$
$$+ \frac{1}{|\nu|!}\sum_{\eta(\nu)} \int K(z)\rho(\zeta_a, x)\tilde g^\nu_{n-1}(z)\,dz\Bigg], \quad (\text{П.10})$$

$$\zeta_a = t - \theta_a \tilde g_{n-1}(z), \quad 0 < \theta_a < 1.$$

Согласно неравенствам (П.7) и свойствам $G_2(1,\nu_\alpha,\alpha)$ при $N\to\infty$ имеем

$$\sup_{\mathscr{A}}\big\langle M_\lambda J_N^2\big\rangle = o\big(h_N^{-s}\big).$$

Отсюда и из (П.4), (П.5) и (П.9) следует соотношение (П.2).

Покажем, что при $N\to\infty$ справедливо равенство

$$\sup_{\mathscr{A}}\big|\theta_N^2 - \omega^2_{\alpha,\nu}(t) h_N^{2\nu}\big| = o\big(v_N^2(\alpha)\big). \quad (\text{П.11})$$

По определению r_N (П.1), условию теоремы и (П.10) имеем

$$r_N - f_a^{(\alpha)}(t) = h_N^{-\alpha}\langle J_N\rangle - f_a^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{(-1)^k}{|k|!} \sum_{\eta(k)} f_{a+\vartheta}^{(\alpha+k)}(t) \int K(z)\big\langle\tilde g^k_{N-1}(z)\big\rangle\,dz$$
$$+ \frac{1}{|\nu|!}\sum_{\eta(\nu)} \int K(z)\big\langle\rho(\zeta_a, x)\tilde g^\nu_{N-1}(z)\big\rangle\,dz.$$

Заметим, что

$$\int z_1^{\eta_1}\cdots z_s^{\eta_s} K(z)\,dz = 0$$

при $K(u)\in\Sigma_\nu(\alpha)$ и $0<\eta_1+\ldots+\eta_s = k<\nu$, $\eta_i<\nu$, $i=\overline{1,s}$. Поэтому

$$r_N - f_a^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{(-1)^k}{|k|!} \sum_{\eta(k)} f_{a+\vartheta}^{(\alpha+k)}(t)\big\langle g^k_{N-1}\big\rangle$$
$$+ \frac{1}{|\nu|!}\sum_{\eta(\nu)} \int K(z)\big\langle\rho(\zeta_a, t)\tilde g^\nu_{N-1}(z)\big\rangle\,dz + h_N^\nu \omega_{\alpha,\nu}(t). \quad (\text{П.12})$$

Используя неравенство Коши — Буняковского и равномерные по $\lambda \in \mathscr{A}$ условия $G_2(1, \nu_\alpha, \alpha)$, для $k = \overline{1, \nu}$ находим

$$M_\lambda \big[\langle g^k_{N-1}\rangle\big]^2 \le C\big\langle M_\lambda g^{2k}_{N-1}\big\rangle$$
$$\le C(\langle M_\lambda \|g_{N-1}\|^2\rangle + \langle M_\lambda \|g_{N-1}\|^{2\nu_\alpha}\rangle) = o\big(\big(Nh_N^{s+2\alpha}\big)^{-1}\big)$$

и согласно (8) имеем

$$M_\lambda \big[\langle \rho(\zeta_a, t)\tilde{g}^\nu_{N-1}(z)\rangle\big]^2 \le \mathscr{L}^2 \big\langle M_\lambda \rho^2(\zeta_a, t)\tilde{g}^{2\nu}_{N-1}(z)\big\rangle$$
$$\le C(\langle M_\lambda \|g_{N-1}\|^{2\nu_\alpha}\rangle + (h_N\|z\|)^{2(\nu+\gamma)}) = o\big(\big(Nh_N^{s+2\alpha}\big)^{-1}\big) + \|z\|^{2(\nu+\gamma)} o\big(h_N^{2\nu}\big).$$

Отсюда, оценивая вторые моменты всех слагаемых правой части (П.12), получаем равенство (П.11).

Аналогично (П.2) и (П.11) можно показать, что в условиях $G_2(1, \nu_\alpha, \alpha)$ и $\mathscr{N}_1(\alpha)$ при $N \to \infty$ имеет место равенство

$$\sup_{\mathscr{A}} |a_N| = o\big(v_N^2(\alpha)\big). \tag{П.13}$$

Из (П.2), (П.11) и (П.13) следует первое соотношение утверждения (i) теоремы 1 при $a = b$.

Подобно (П.11) устанавливается второе соотношение первого утверждения теоремы 1 для смещения b_N. При этом используются равенство (П.12), условия $G_2(1, \nu + 1, \alpha)$ и неравенства

$$M_\lambda \big|\langle g^k_{N-1}\rangle\big| \le C[(\langle M_\lambda \|g_{N-1}\|^2\rangle)^{1/2}\chi(k=1) + \langle M_\lambda \|g_{N-1}\|^2\rangle$$
$$+ \langle M_\lambda \|g_{N-1}\|^{2(\nu+1)}\rangle] = o\big(1/\sqrt{Nh_N^{s+2\alpha}}\big) + o\big(\big(Nh_N^{s+2\alpha}\big)^{-1}\big), \quad k = \overline{1, \nu};$$

$$M_\lambda \big|\langle \rho(\zeta_a, t)\tilde{g}^\nu_{N-1}(z)\rangle\big| \le \mathscr{L}\langle M_\lambda \|g_{N-1}\|^\gamma \tilde{g}^\nu_{N-1}(z)\rangle \le C\langle M_\lambda \|g_{N-1}\|^2\rangle$$
$$+ \langle M_\lambda \|g_{N-1}\|^{2(\nu+1)}\rangle + (h_N\|z\|)^{\nu+\gamma} = o\big(\big(Nh_N^{s+2\alpha}\big)^{-1}\big) + \|z\|^{\nu+\gamma} o\big(h_N^{2\nu}\big).$$

Для доказательства сильной состоятельности оценок $f_a^{(\alpha)}$ заметим, что согласно (П.12) и (8) для всех $\lambda \in \mathscr{A}$ при $h \in \mathscr{H}_2(\alpha)$ и $g(\mathscr{A}) \in G_1$ имеем $\big|r_N - f_a^{(\alpha)}(t)\big| = o(1)$ п. н. Таким образом, для доказательства второго утверждения теоремы 1 достаточно показать сходимость с вероятностью единица к нулю разности $\hat{f}_a^{(\alpha)}(t) - r_N = h_N^{-(s+\alpha)}\langle \xi_N\rangle$.

Процесс $\{\xi_n,\, n \ge 1\}$ образует ограниченную мартингал-разность, причем с учетом $K(u) \in \mathscr{B}^+$

$$M_\lambda \xi_n = 0, \quad M_\lambda |\xi_n^i| \le Ch_N^s, \quad i = \overline{2, 4},$$

что позволяет получить оценку

$$M_\lambda \big(\hat{f}_a^{(\alpha)}(t) - r_N\big)^4 \le C/\big(Nh_N^{s+2\alpha}\big)^2.$$

Отсюда в силу леммы Бореля — Кантелли и условий $\mathscr{H}_2(\alpha)$ следует утверждение (ii) теоремы 1.

Свойство асимптотической нормальности оценок $\hat{f}_a^{(\alpha)}(t)$ является следствием, во-первых, равномерной по всем $\tilde{\varepsilon} > 0$ сходимости

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\Theta} P_\theta\bigl(\sqrt{Nh_N^{s+2\alpha}}\bigl|r_N - f_a^{(\alpha)}(t)\bigr| > \tilde{\varepsilon}\bigr) = 0,$$

которую можно показать, используя (П.12) и неравенство Чебышева; и, во-вторых, равномерной асимптотической нормальности разности

$$\sqrt{Nh_N^{s+2\alpha}}\bigl(\hat{f}_a^{(\alpha)}(t) - r_N\bigr) = \frac{1}{\sqrt{Nh_N^s}} \sum_{n=1}^{N} \xi_n = \sum_{n=1}^{N} \tilde{\xi}_{N,n},$$

которая следует из теоремы 2 работы [50] для квадратично интегрируемого мартингала $\{M_{t,N},\, t \geq 1\}$, где

$$M_{t,N} = \sum_{n=1}^{tN} \tilde{\xi}_{N,n},$$

N фиксировано.

Докажем последнее утверждение теоремы. Согласно c_r-неравенству

$$u^{2m}\bigl(\hat{f}_a^{(\alpha)}\bigr) \leq C\bigl(\sigma_N^{2m} + \theta_N^{2m}\bigr), \tag{П.14}$$

$$\sigma_N^{2m} = M_\lambda\bigl(\hat{f}_a^{(\alpha)} - r_N\bigr)^{2m}, \quad \theta_N^{2m} = M_\lambda\bigl(r_N - f_a^{(\alpha)}\bigr)^{2m}.$$

По неравенству Буркхольдера [51] для мартингала $N\langle\xi_N\rangle$ имеем

$$\sigma_N^{2m} = \frac{1}{\bigl(Nh_N^{s+\alpha}\bigr)^{2m}} M_\lambda(N\langle\xi_N\rangle)^{2m} \leq \frac{C}{\bigl(Nh_N^{2(s+\alpha)}\bigr)^m} M_\lambda(\langle\xi_N^2\rangle)^m.$$

Отсюда по определению ξ_N (П.3) и свойствам $\mathscr{N}_2(\alpha)$ и $\Sigma_\nu(\alpha)$ получаем

$$\sup_{\mathscr{A}} \sigma_N^{2m} \leq \frac{C}{\bigl(Nh_N^{s+2\alpha}\bigr)^m}. \tag{П.15}$$

Далее, согласно (П.12) и свойствам $G_2(m, \alpha+\nu, \alpha)$ при $N \to \infty$ имеем

$$\sup_{\mathscr{A}} \theta_N^2 = O\bigl(h_N^{2m\nu}\bigr) + o\left(\frac{1}{\bigl(Nh_N^{s+2\alpha}\bigr)^m}\right). \tag{П.16}$$

Из соотношений (П.14)–(П.16) следует (iv). Теорема 1 доказана.

Доказательство леммы. Введем вспомогательные моменты

$$\sigma_j(N) = \inf\{k \geq 1 : \tau_j(k) \geq N\}, \quad j = \overline{1,p},\ N \geq 1.$$

По определению (13) моментов $\tau_j(k)$ для $j = \overline{1,p}$ имеем оценку

$$\sum_{n=\tau_j(k-1)+1}^{\tau_j(k)-1} c_j^m(n-1) \leq \left(\sum_{n=\tau_j(k-1)+1}^{\tau_j(k)-1} c_j(n-1)\right)^m \leq (k^\varphi - (k-1)^\varphi)^m \leq Ck^{m(\varphi-1)},$$

откуда ввиду условий (14)

$$B(m) = \sum_{n=1}^{N} M_\lambda \|g_{n-1}\|^{2m} \le C \max_{j=\overline{1,p}} M_\lambda \left(\sum_{k=1}^{\sigma_j(N)} \| \Delta^*(k-1)\|^{2m} \right.$$

$$\left. \sum_{n=\tau_j(k-1)+1}^{\tau_j(k)-1} c_j^m(n-1) + \sum_{k=1}^{\sigma_j(N)} (\Delta_j^*(k-1))^{2m} \|A_1(\tau_j(k)-1)\|^{2m} \right) \le B_1(m) + B_2(m),$$

$$B_1(m) = C \max_{j=\overline{1,p}} M_\lambda \sum_{k=1}^{\sigma_j(N)} k^{m(\varphi-1)} \big(\Delta_j^*(k-1)\big)^{2m},$$

$$B_2(m) = \max_{j=\overline{1,p}} M_\lambda \sum_{k=1}^{\sigma_j(N)} \big(\Delta_j^*(k-1)\big)^{2m} \|A_1(\tau_j(k)-1)\|^{2m}.$$

Определим усеченные моменты остановки $\overline{\sigma}_j(N) = \min\{\sigma_j(N), T\}$, $0 < T < \infty$, и покажем вспомогательные равенства

$$B_{1,j}(m) = M_\lambda \sum_{k=1}^{\bar\sigma_j(N)} k^{m(\varphi-1)} \big(\Delta_j^*(k-1)\big)^{2m} = \begin{cases} O(\ln N), & m = 1, \\ O(1), & m > 1, \end{cases} \tag{П.17}$$

$$B_{2,j}(m) = \sum_{k=1}^{\bar\sigma_j(N)} \big(\Delta_j^*(k-1)\big)^{2m} \|A_1(\tau_j(k)-1)\|^{2m} = O(1), \quad m \ge 1. \tag{П.18}$$

Подобно работам [44–46] можно показать, что в условиях леммы последовательные оценки $\lambda^*(k)$ параметра λ обладают свойствами (18) и

$$\sup_{\mathscr{A}} M_\lambda \|\Delta^*(k)\|^{2(m+1)} = O(k^{-\varphi(m+1)}), \quad k \to \infty. \tag{П.19}$$

Установим (П.17). Согласно (П.19), условию (i) на $c(n)$ и неравенствам Коши — Буняковского и Чебышева находим

$$\begin{aligned}
B_{1,j}(1) &= \sum_{k=1}^{N} k^{\varphi-1} M_\lambda \big(\Delta_j^*(k-1)\big)^2 + M_\lambda \sum_{k=N+1}^{\bar\sigma_j(N)} k^{\varphi-1} \big(\Delta_j^*(k-1)\big)^2 \\
&\le C \ln N + \sum_{k>N} k^{\varphi-1} M_\lambda \big(\Delta_j^*(k-1)\big)^2 \chi(\sigma_j(N) \ge k) \\
&\le C\left(\ln N + \sum_{k>N} \frac{1}{k} P_\lambda^{1/2}(\sigma_j(N) \ge k)\right) \\
&\le C\left(\ln N + \sum_{k>N} \frac{1}{k} P_\lambda^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N} c_j(n-1) > k^\varphi\right)\right) \\
&\le C\left(\ln N + \left(\sum_{n=1}^{N} M_\lambda \|c(n-1)\|\right)^{1/2} \sum_{k\ge N} \frac{1}{k^{1+\varphi/2}}\right) \\
&\le C\left(\ln N + N \sum_{k\ge N} \frac{1}{k^{1+\varphi/2}}\right) \le C\left(\ln N + \sum_{k\ge N} \frac{1}{k^{\varphi/2}}\right) = O(\ln N).
\end{aligned}$$

Далее, для $m > 1$

$$B_{1,j}(m) \le \sum_{k\ge 1} k^{m(\varphi-1)} M_\lambda \bigl(\Delta_j^*(k-1)\bigr)^{2m} \le C \sum_{k\ge 1} k^{-m} = O(1).$$

По неравенству Коши — Буняковского, (П.19) и условию (16) имеем

$$B_{2,j}(1) \le C M_\lambda \sum_{k=1}^{\sigma_j(N)} \bigl(\Delta_j^*(k-1)\bigr)^2 \|\varepsilon(\tau_j(k)-1)\|^2_{2(m+1)}$$
$$\le C \sum_{k\ge 1} k^{-\varphi} \bigl(M_\lambda \|\varepsilon(\tau_j(k)-1)\|^4_{2(m+1)}\bigr)^{1/2} \le C \sum_{k\ge 1} k^{-\varphi} \left(M_\lambda \sum_{n=1}^{\tau_j(k)} \|\varepsilon_n\|^4_{2(m+1)}\right)^{1/2}$$
$$\le C \sum_{k\ge 1} k^{-\varphi} (M_\lambda \tau_j(k))^{1/2} \le C \sum_{k\ge 1} k^{-\varphi/2} = O(1).$$

При оценивании $B_{2,j}(m)$, $m \ge 1$, воспользуемся также неравенством Гёльдера и ограниченностью величин $\Delta_j^*(k)$:

$$B_{2,j}(m) \le C M_\lambda \sum_{k=1}^{\overline{\sigma}_j(N)} \bigl(\Delta_j^*(k-1)\bigr)^{2m} \|\varepsilon(\tau_j(k)-1)\|^{2m}_{2(m+1)}$$
$$\le C \sum_{k\ge 1} \bigl[M_\lambda (\Delta_j^*(k-1))^{2(m+1)}\bigr]^{\frac{1}{m+1}} \bigl[M_\lambda \|\varepsilon(\tau_j(k)-1)\|^{2(m+1)}_{2(m+1)}\bigr]^{\frac{m}{m+1}}$$
$$\le C \sum_{k\ge 1} k^{-\varphi} \left(M_\lambda \sum_{n=1}^{\tau_j(k)} \|\varepsilon_n\|^{2(m+1)}_{2(m+1)}\right)^{\frac{m}{m+1}}$$
$$\le C \sum_{k\ge 1} k^{-\varphi} \left(M_\lambda \tau_j(k)\right)^{\frac{m}{m+1}} \le C \sum_{k\ge 1} k^{-\frac{\varphi}{m+1}} = O(1).$$

Соотношения (П.17) и (П.18) доказаны. Отсюда по теореме Фату получаем равенства (17) и, следовательно, свойства $G_2(m_1, m_2, \alpha)$, поскольку согласно (17) при $m > 1$ по лемме Бореля — Кантелли $g_{\lambda,n} \to 0$ п. н. Лемма доказана.

Авторы благодарны рецензенту, а также А. А. Боровкову за полезные замечания, которые привели к улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Roussas G. G.* On some properties of nonparametric estimates of probability density functions // Bull. Soc. Math. Grice. 1968. N 1. P. 29–43.
2. *Roussas G. G.* Nonparametric estimation in Markov processes // Ann. Inst. Statist. Math. 1969. V. 21, N 1. P. 73–87.
3. *Rosenblatt M.* Density estimates and Markov sequences // Nonparametric techniques in statistical inference. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970. P. 199–213.
4. *Rosenblatt M.* Curve estimates // Ann. Math. Statist. 1971. V. 42, N 6. P. 1815–1842.
5. *Rosenblatt M.* Markov processes, structure and asymptotic behavior. Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verl., 1971.
6. *Кошкин Г. М., Тарасенко Ф. П.* Об одном критерии согласия для слабозависимой выборки // Мат. статистика и ее приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1976. № 4. С. 29–41.

7. *Кошкин Г. М., Тарасенко Ф. П.* Рекуррентное оценивание плотности вероятностей и линии регрессии по зависимой выборке // Мат. статистика и ее приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1976. № 4. С. 122–138.

8. *Кошкин Г. М.* Об одном подходе к оцениванию переходной функции распределения и моментов для некоторых марковских процессов // Мат. статистика и ее приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1976. № 4. С. 116–121.

9. *Delecroix M.* Central limit theorems for density estimators of a φ-mixing process // Recent developments in statistics. Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1977. P. 409–414.

10. *Masry E.* Probability density estimation from sampled data // IEEE Trans. Inform. Theory. 1983. V. IT–29, N 5. P. 696–709.

11. *Masry E.* Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1986. V. IT–32, N 2. P. 254–267.

12. *Koshkin G. M., Tarasenko F. P.* Nonparametric algorithms for identifying and control of continuous-discrete stochastic objects // 8-th IFAC-IFORS Symposium on identification and system parameter estimation. Beijing: Pergamon Press, 1988. V. 2. P. 882–887.

13. *Castellana J. V., Leadbetter M. R.* On smoothed probability density estimation for stationary processes // Stochastic Process. Appl. 1986. V. 21, N 2. P. 179–193.

14. *Györfi L.* Strong consistent density estimate from ergodic sample // J. Multivariate Anal. 1981. V. 11, N 1. P. 81–84.

15. *Györfi L.* Recent results on nonparametric regression estimate and multiple classification // Problems Control Inform. Theory. 1981. V. 10, N 1. P. 43–52.

16. *Pracasa Rao B. L. S.* Nonparametric functional estimation. Orlando, Florida: Academic Press, 1983.

17. *Györfi L., Hardle W., Sarda P., View P.* Nonparametric curve estimation from time series. New York: Springer-Verl., 1989 (Lecture Notes Statistics; 60).

18. *Masry E.* Nonparametric estimation of conditional probability densities and expectations of stationary processes: strong consistency and rates // Stochastic Process. Appl. 1989. V. 32, N 1. P. 109–127.

19. *Masry E.* Almost sure convergence of recursive density estimators for stationary mixing processes // Statist. Probab. Lett. 1987. V. 5, N 2. P. 249–254.

20. *Masry E., Györfi L.* Strong consistensy and rates for recursive probability density estimators of stationary processes // J. Multivariate Anal. 1987. V. 22, N 1. P. 79–93.

21. *Doukhan P., Ghindes M.* Estimation de la transition de probabilite d'une chain de Markov Doeblin-recurrente. Etude du eas processus autoregressif general d'ordre 1 // Stochastic Process. Appl. 1983. V. 15, N 3. P. 271–293.

22. *Robinson P. M.* Nonparametric estimation from time series residuals // Cahiers Centre études rech. opér. 1986. V. 28, N 1–3. P. 197–202.

23. *Васильев В. А.* Об оценивании распределения возмущений процесса авторегрессии // Мат. статистика и ее приложения. Томск: Изд–во Томск. ун-та, 1986. № 10. С. 9–24.

24. *Masry E.* Multivariate probability density deconvolution for stationary random processes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1991. V. 37, N 4. P. 1105–1115.

25. *Tran L. T.* Kernel density estimation of random fields // J. Multivariate Anal. 1990. V. 34, N 1. P. 37–53.

26. *Singh R. S.* Applications of estimators of a density and its derivatives to certain statistical problems // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 1977. V. 39, N 3. P. 357–363.

27. *Singh R. S.* Nonparametric estimation of mixed partial derivatives of a multivariate density // J. Multivariate Anal. 1976. V. 6, N 1. P. 111–122.

28. *Алексеев В. Г.* Об оценках точек экстремума и перегиба плотности вероятности // Теория случайных процессов. Киев: Наук. думка, 1984. Т. 12. С. 3–5.

29. *Немировский А. С., Цыпкин Я. З.* Об оптимальных алгоритмах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. 1984. № 12. С. 64–77.

30. *Надарая Э. А.* О непараметрических оценках плотности вероятности и регрессии // Теория вероятностей и ее применения. 1965. Т. 10, № 1. С. 199–203.

31. *Кушнир А. Ф.* Асимптотически оптимальные критерии для регрессионной задачи проверки гипотез // Теория вероятностей и ее применения. 1968. Т. 13, № 4. С. 682–700.

32. *Добровидов А. В.* Асимптотически ε-оптимальная непараметрическая процедура нелинейной фильтрации стационарных последовательностей с неизвестными статистическими характеристиками // Автоматика и телемеханика. 1984. № 12. С. 40–49.

33. *Боровков А. А.* Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984.
34. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
35. *Добровидов А. В., Кошкин Г. М.* Непараметрическое оценивание сигналов. М.: Наука, Физматлит, 1997.
36. *Кошкин Г. М.* Устойчивое оценивание отношений случайных функций по экспериментальным данным // Изв. вузов. Физика. 1993. № 10. С. 137–145.
37. *Муганцева Л. А.* Проверка нормальности в схемах одномерной и многомерной регрессии // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, № 3. С. 603–614.
38. *Болдин М. В.* Оценка распределения возмущений в схеме авторегрессии // Теория вероятностей и ее применения. 1982. Т. 27, № 4. С. 805–810.
39. *Болдин М. В.* Проверка гипотез в схемах авторегрессии критериями Колмогорова и ω^2 // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 1. С. 19–22.
40. *Васильев В. А., Кошкин Г. М.* Об оценивании многомерной плотности распределения и ее производных по зависимым наблюдениям // Тез. докл. Междунар. семинара «Предельные теоремы и смежные вопросы». Омск: Омский ун-т, 1995. С. 16–18.
41. *Кошкин Г.М.* Улучшенная неотрицательная ядерная оценка плотности // Теория вероятностей и ее применения. 1988. Т. 33, № 4. С. 817–822.
42. *Кошкин Г. М.* Асимптотические свойства функций от статистик и их применения к непараметрическому оцениванию // Автоматика и телемеханика. 1990. № 3. С. 82–97.
43. *Кошкин Г. М.* Моменты отклонений оценки подстановки и ее кусочно-гладких аппроксимаций // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 601–614.
44. *Воробейчиков С. Э., Конев В. В.* О последовательной идентификации стохастических систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 4. С. 176–182.
45. *Konev V., Lai T. L.* Estimators with prescribed precision in stochastic regression models // Sequential Anal. 1995. V. 14, N 3. P. 179–192.
46. *Konev V. V., Pergamenshicov S. M.* On the duration of sequential estimation of parameters of stochastic processes in discrete time // Stochastics. 1986. V. 18. P. 133–154.
47. *Пергаменщиков С. М.* Асимптотические свойства последовательного плана оценивания параметра авторегрессии первого порядка // Теория вероятностей и ее применения. 1991. Т. 36, № 1. С. 42–53.
48. *Vasiliev V. A., Konev V. V.* On identification of linear dynamic systems in the presence of multiplicative and additive noises in observation // Stochastic Contr.: Proc. / 2-nd IFAC Symp. Vilnius, May 19–23, 1986. Oxford e. a., 1987. P. 87–91.
49. *Koshkin G. M., Vasil'iev V. A.* Nonparametric estimation of derivatives of a multivariate density from dependent observations // Math. Methods Statist. 1998. V. 7, N 4. P. 361–400.
50. *Гринвуд П. Е., Ширяев А. Н.* О равномерной слабой сходимости семимартингалов с применениями к оцениванию параметра в авторегрессионной модели первого порядка // Статистика и управление случайными процессами. М.: Наука, 1989. С. 40–48.
51. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.

Статья поступила 21 января 1997 г.

г. Томск
Томский гос. университет