Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.947

ПОЛНОТА СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ — САМАРСКОГО

Б. А. Алиев, И. В. Алиев

Аннотация: Исследуется полнота системы собственных и присоединенных (корневых) функций краевых задач для эллиптических уравнений в прямоугольнике $[0,1] \times [0,l]$ с интегральными краевыми условиями типа Бицадзе — Самарского. В работе такие задачи сводятся к многоточечной краевой задаче для эллиптических дифференциально-операторных уравнений с оператором в краевых условиях в соответствующих пространствах и исследуются методом дифференциально-операторных уравнений. Библиогр. 17.

В работе А. В. Бицадзе и А. А. Самарского [1] доказаны существование и единственность классического решения эллиптического уравнения второго порядка в прямоугольнике с нелокальными краевыми условиями, точнее краевыми условиями, связывающими значения искомой функции на куске Γ_1 границы Γ со значениями на этом же, но сдвинутом внутрь области куске, причем на $\Gamma \backslash \Gamma_1$ задавались условия Дирихле. В дальнейшем в работе А. Л. Скубачевского [2] доказана нётеровость эллиптических уравнений порядка $2n$ с краевыми условиями типа Бицадзе — Самарского.

Полнота корневых функций эллиптической задачи Бицадзе — Самарского в n-мерном случае изучена в работе Е. П. Ерошенкова и Т. Ш. Кальменова [3].

В данной работе исследуется полнота системы собственных и присоединенных (корневых) функций краевых задач для эллиптических уравнений в прямоугольнике $\Omega = [0,1] \times [0,l]$ с более общими краевыми условиями. Мы сводим такие задачи к краевой задаче для эллиптических дифференциально-операторных уравнений с оператором в краевых условиях в соответствующих пространствах и исследуем методом дифференциально-операторных уравнений.

Разрешимость, а также некоторые спектральные вопросы краевой задачи для дифференциально-операторных уравнений второго порядка в случае, когда коэффициенты краевых условий — линейные операторы, изучены в работах В. А. Ильина и В. С. Филиппова [4], В. И. Горбачука и М. Л. Горбачука [5], В. А. Михайлеца [6], Б. А. Алиева [7], С. Я. Якубова и Б. А. Алиева [8, 9] и др.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Через $\mathscr{L}_p((0,1);H)$ обозначим банахово пространство функций $x \to u(x) : (0,1) \to H$, сильно измеримых и суммируемых в p-й степени, с нормой

$$\|u\|^p_{\mathscr{L}_p((0,1);H)} = \int_0^1 \|u(x)\|^p_H dx < \infty, \quad p \in (1,\infty).$$

Пусть H, H_1 — гильбертовы пространства. Через $B(H, H_1)$, $\sigma_\infty(H, H_1)$ обозначим соответственно класс ограниченных и вполне непрерывных операторов, действующих из H в H_1, $B(H, H) = B(H)$, $\sigma_\infty(H, H) = \sigma_\infty(H)$. Пусть $A \in \sigma_\infty(H, H_1)$. Тогда $A^* \in \sigma_\infty(H_1, H)$. Значит, оператор $T = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ принадлежит $\sigma_\infty(H)$ и неотрицателен.

Собственные числа оператора T называются *S-числами* оператора A, т. е. $S_j(A, H, H_1) = \lambda_j(T)$, $j = 1 \div \infty$, где нумерация производится по невозрастанию.

Через $\sigma_q(H, H_1)$, $q > 0$, обозначим множество операторов A, действующих вполне непрерывно из H в H_1, для которых $\sum\limits_{j=1}^{\infty} S_j^q(A, H, H_1) < \infty$. Оператор вложения одного пространства в другое обозначим через J.

Определение 1. Линейный замкнутый оператор A называется *сильно позитивным в* H, если область определения $D(A)$ плотна в H, при некотором $\delta \in (0, \pi)$ все точки из угла $|\arg \lambda| > \delta$ принадлежат резольвентному множеству и резольвента удовлетворяет оценке

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\|_{B(H)} \le C(1 + |\lambda|)^{-1},$$

I — единичный оператор в H.

Отметим, что из сильной позитивности оператора A следует сильная позитивность оператора A^α, $\alpha \in (0, 1)$. Пусть A — сильно позитивный оператор в H. Так как A^{-1} ограничен в H, то

$$H(A^n) = \{u : u \in D(A^n), \|u\|_{H(A^n)} = \|A^n u\|_H,\ n \in N\}$$

— гильбертово пространство, норма которого эквивалентна норме графика оператора A^n. Пусть A — сильно позитивный оператор в H. Тогда в силу [10, с. 298] оператор $-A$ является производящим оператором аналитической при $t > 0$ полугруппы e^{-tA} и эта полугруппа экспоненциально убывает, т. е. существуют два числа $C > 0$, $\sigma_0 > 0$ такие, что $\|e^{-tA}\|_{B(H)} \le Ce^{-\sigma_0 t}$, $0 \le t < +\infty$. По теореме Като [11, с. 145] оператор $-A^{\frac{1}{2}}$ порождает аналитическую полугруппу при $t > 0$, убывающую на бесконечности.

Определение 2. Пусть A — сильно позитивный оператор в H. Тогда

$$H_\theta \equiv (H, H(A^n))_{\theta,p} = \Bigg\{ u : u \in H,\ \|u\|_{(H, H(A^n))_{\theta,p}} = \int\limits_0^{+\infty} t^{n(1-\theta)p-1} \|A^n e^{-tA} u\|_H^p dt < +\infty,\ p > 1,\ 0 < \theta < 1,\ n \in N \Bigg\},$$

H_θ является интерполяционным пространством между $H(A^n)$ и H (см. [12, с. 109]).

Через $W_p^n((0, 1); H(A^n), H) = \{u : A^n u, u^{(n)} \in \mathscr{L}_p((0, 1); H)\}$ обозначим пространство вектор-функций с нормой

$$\|u\|_{W_p^n((0,1); H(A^n), H)} = \|A^n u\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)} + \|u^{(n)}\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)}.$$

Известно [12, с. 46], что если $u \in W_p^n((0, 1); H(A^n), H)$, то

$$u^{(j)}(\cdot) \in (H, H(A^n))_{\frac{n-j-1/p}{n}, p}, \quad j = 0 \div (n - 1).$$

Пусть

$$(Ff)(\sigma) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} f(x)\,dx$$

— преобразование Фурье, а

$$(F^{-1}\varphi)(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} \varphi(\sigma)\,d\sigma$$

— обратное преобразование Фурье, где $f(x)$ и $\varphi(\sigma)$ — функции со значениями в H.

Определение 3. Отображение $\sigma \to T(\sigma) : R \to B(H)$ называют *мультипликатором Фурье типа* (p, q), $1 \le p, q < \infty$, если

$$\|F^{-1}TFf\|_{\mathscr{L}_q(R;H)} \le C\|f\|_{\mathscr{L}_p(R;H)}, \quad f \in \mathscr{L}_p(R; H).$$

Известно [13, с. 346], что если отображение $\sigma \to T(\sigma) : R \to B(H)$ непрерывно дифференцируемо и

$$\|T(\sigma)\| \le C, \quad \|T'(\sigma)\| \le C|\sigma|^{-1}, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

то функция $T(\sigma)$ является мультипликатором Фурье типа (p, p) (теорема Михлина — Шварца).

Лемма 1. *Пусть A — сильно позитивный оператор в H. Тогда для того чтобы функция $u(x)$ являлась решением уравнения*

$$-u''(x) + Au(x) = 0,$$

принадлежащим $W_p^2((0,1); H(A), H)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$u(x) = e^{-xA^{\frac{1}{2}}} g_1 + e^{-(1-x)A^{\frac{1}{2}}} g_2,$$

где $g_1, g_2 \in H_{\frac{2p-1}{2p}}$.

Очевидно, что

$$H_{\frac{2p-1}{2p}} = \left\{ u : u \in H,\ \|u\|^p_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} = \int\limits_0^{+\infty} \|Ae^{-tA^{\frac{1}{2}}} u\|_H^p\,dt < \infty \right\}.$$

Доказательство этой леммы имеется в [14, с. 72].

В пространстве $\mathscr{L}_p((0,1); H)$ рассмотрим следующую краевую задачу:

$$(L - \lambda I)u \equiv -u''(x) + (A - \lambda I)u(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$L_1 u \equiv u(0) + B_1 u(\xi_1) = f_1, \quad L_2 u = u(0) + B_2 u(\xi_2) = f_2, \tag{2}$$

где $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ — произвольные числа.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *A — сильно позитивный оператор в H;*
2) *оператор B_i ограниченно действует из H в H и из $H(A)$ в $H(A)$, $i = 1, 2$;*
3) *$f_i \in H_{\frac{2p-1}{2p}}$, $i = 1, 2$.*

Тогда задача (1), (2) *при достаточно больших* $|\lambda|$, *удовлетворяющих условию* $|\arg\lambda| > \delta$, *имеет единственное решение* $u \in W_p^2((0,1); H(A), H)$.

Доказательство. В силу леммы 1 любое решение уравнения (1), принадлежащее $W_p^2((0,1); H(A), H)$, имеет представление

$$u(x) = e^{-xA_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + e^{-(1-x)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2, \tag{3}$$

где $A_\lambda = A - \lambda I$.

Подставляя (3) в (2), получим следующую систему для определения элементов g_1 и g_2:

$$\begin{aligned} &g_1 + e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2 + B_1\big[e^{-\xi_1 A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + e^{-(1-\xi_1)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2\big] = f_1,\\ &g_2 + e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + B_2\big[e^{-\xi_2 A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + e^{-(1-\xi_2)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2\big] = f_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (4) получим

$$\begin{aligned} g_1 = \big[I + S_1(\lambda) + (I + S_1(\lambda))\big(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_1 e^{-(1-\xi_1)A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\big)(I + S(\lambda))\\ \times \big(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_2 e^{-\xi_2 A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\big)(I + S(\lambda))\big] f_1 + \big[I + S(\lambda) - (I + S_1(\lambda))\\ \times \big(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_1 e^{-(1-\xi_1)A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\big)(I + S(\lambda))\big] = f_2, \end{aligned} \tag{5}$$

$$g_2 = -(I + S(\lambda))\big(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_2 e^{-\xi_2 A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\big)(I + S_1(\lambda)) f_1 + (I + S(\lambda)) f_2, \tag{6}$$

где

$$\big(I + B_1 e^{-\xi_1 A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\big)^{-1} = I + S_1(\lambda),$$

$$\begin{aligned} \big[I + B_2 e^{-(1-\xi_2)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} - \big(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_2 e^{-\xi_2 A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\big)(I + S_1(\lambda))\\ \times \big(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_1 e^{-(1-\xi_1)A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\big)\big]^{-1} = I + S(\lambda). \end{aligned}$$

Известно [15], что если A сильно позитивен, то для полугруппы $e^{-xA_\lambda^{\frac{1}{2}}}$ имеем

$$\big\|e^{-xA_\lambda^{\frac{1}{2}}}\big\| \le Ce^{-\beta\sqrt{|\lambda|}x}, \quad |\arg\lambda| \ge \delta,\ \beta > 0,\ x \ge 0. \tag{7}$$

Так как при достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \ge \delta$ в силу условия 2 и оценки (7)

$$\big\|B_i e^{-\xi A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\big\| \le Ce^{-\beta\sqrt{|\lambda|}\xi} \to 0,\ \ |\arg\lambda| \ge \delta,\ |\lambda| \to \infty,\ \xi \in (0,1),\ i = 1, 2.$$

то

$$S_1(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} [B_1 e^{-\xi_1 A_\lambda^{\frac{1}{2}}}]^k,$$

$$\begin{aligned} S(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \big[B_2 e^{-(1-\xi_2)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} - \big(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_2 e^{-\xi_2 A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\big)\\ \times (I + S_1(\lambda))\big(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_1 e^{-(1-\xi_1)A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\big)\big]^k. \end{aligned} \tag{8}$$

Ряды в правой части (8) сходятся по норме пространства операторов в H.

Докажем, что элементы g_1 и g_2, определенные формулами (5), (6), принадлежат $H_{\frac{2p-1}{2p}}$.

Докажем это, например, для g_2. Для этого достаточно показать, что операторы $S_1(\lambda)$ и $S(\lambda)$ ограниченно действуют из $H_{\frac{2p-1}{2p}}$ в $H_{\frac{2p-1}{2p}}$.

Оператор $S_1(\lambda)$ ограниченно действует из H в H. С другой стороны, оператор $S_1(\lambda)$ ограниченно действует из $H(A)$ в $H(A)$, что следует из условия 2 и из оценки (7). Тогда в силу интерполяционной теоремы [12, с. 24] оператор $S_1(\lambda)$ действует ограниченно в пространстве $H_{\frac{2p-1}{2p}}$ и допускает оценку

$$\|S_1(\lambda)\|_{B(H_{\frac{2p-1}{2p}})} \leq C\|S_1(\lambda)\|_{B(H(A))}^{1-\frac{2p-1}{2p}} \|S_1(\lambda)\|_{B(H(A))}^{\frac{2p-1}{2p}} \leq q < 1, \tag{9}$$

$|\arg\lambda| \geq \delta$, $|\lambda| \to \infty$.

Таким же путем показывается, что оператор $S(\lambda)$ ограниченно действует в пространстве $H_{\frac{2p-1}{2p}}$ и оценка (9) имеет место и для оператора $S(\lambda)$.

Из (6) в силу условия 2 и формул (7), (9) получим

$$\|g_2\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} \leq C(\|f_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} + \|f_2\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}}). \tag{10}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\|g_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} \leq C(\|f_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} + \|f_2\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}}). \tag{11}$$

С учетом леммы 1 теорема 1 доказана.

В пространстве $\mathscr{L}_p((0,1);H)$ рассмотрим оператор $\mathscr{L}$, определенный равенствами

$$D(\mathscr{L}) = W_p^2\big((0,1); H(A), H, L_\nu u|_{\nu=1}^2 = 0\big), \quad \mathscr{L}u = -u''(x) + Au(x),$$

где $L_1 u \equiv u(0) + B_1 u(\xi_1) = f_1$, $L_2 u = u(1) + B_2 u(\xi_2) = f_2$, $\xi_i \in (0,1)$, $i = 1,2$.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) A *— сильно позитивный оператор в* H;

2) *операторы* B_i $(i = 1,2)$ *ограниченно действует из* H *в* H *и из* $H(A)$ *в* $H(A)$.

Тогда при некотором $r > 0$ *все точки комплексной плоскости из угла* $|\arg\lambda| > \delta$, *по модулю большие* r, *принадлежат резольвентному множеству оператора* $\mathscr{L}$ *и справедлива оценка*

$$\|(\mathscr{L} - \lambda I)^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-1}.$$

Доказательство. Уравнение $(\mathscr{L} - \lambda I)u = f$ эквивалентно задаче

$$-u''(x) + (A - \lambda I)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{12}$$

$$L_\nu u = 0, \quad \nu = 1,2. \tag{13}$$

Решение задачи (12), (13) представляется в виде суммы $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, где $u_1(x)$ — сужение на $[0,1]$ решения уравнения

$$-\tilde{u}_1''(x) + (A - \lambda I)\tilde{u}_1(x) = \tilde{f}(x), \quad x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty), \tag{14}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases}$$

а $u_2(x)$ — решение задачи

$$-u_2''(x) + (A - \lambda I)u_2(x) = 0, \quad x \in (0,1), \tag{15}$$

$$L_\nu u_2 = -L_\nu u_1, \quad \nu = 1, 2. \tag{16}$$

Покажем, что решение $\tilde{u}_1(x)$ уравнения (14) принадлежит $W_p^2(R; H(A), H)$. Если к уравнению (14) применим преобразование Фурье, то имеем

$$F\tilde{u}_1 = [A - (\lambda - \sigma^2)I]^{-1} F\tilde{f}.$$

Ясно, что если λ находится в угле $|\arg\lambda| > \delta$, то $\lambda - \sigma^2$ также находится в этом угле. Поэтому в угле $|\arg\lambda| > \delta$ выполнена оценка

$$\|[A - (\lambda - \sigma^2)I]^{-1}\| \le C(1 + |\lambda| + \sigma^2)^{-1}.$$

Тогда

$$\|A_\lambda u_1\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)} \le \|A_\lambda \tilde{u}_1\|_{\mathscr{L}_p(R;H)} = \|F^{-1} A_\lambda [A - (\lambda - \sigma^2)I]^{-1} F\tilde{f}\|_{\mathscr{L}_p(R;H)}. \tag{17}$$

Очевидно, что $T_1(\sigma) = A_\lambda[A - (\lambda - \sigma^2)I]^{-1}$ — мультипликатор Фурье типа (p,p). Поэтому к $T_1(\sigma)$ применима теорема Михлина — Шварца. Тогда из (17) получим

$$\|A_\lambda u_1\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)} \le C\|\tilde{f}\|_{\mathscr{L}_p(R;H)} = C\|f\|_{\mathscr{L}_p(R;H)}. \tag{18}$$

С другой стороны,

$$\left\|u_1''\right\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)} \le \left\|\tilde{u}_1''\right\|_{\mathscr{L}_p(R;H)} = \|F^{-1}\sigma^2[A - (\lambda - \sigma^2)I]^{-1} F\tilde{f}\|_{\mathscr{L}_p(R;H)}.$$

Легко показать, что $T_2(\sigma) = \sigma^2[A - (\lambda - \sigma^2)I]^{-1}$ также является мультипликатором Фурье типа (p,p), откуда

$$\left\|u_1''\right\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)} \le C\|f\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что

$$\left\|u_1''\right\|_{W_p^2((0,1);H(A),H)} \le C\|f\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)}. \tag{20}$$

Итак, сужение $\tilde{u}_1(x)$ на $[0,1]$ принадлежит $W_p^2((0,1); H(A), H)$, и $u_1(x)$ удовлетворяет уравнению $-u_1''(x) + (A - \lambda I)u_1(x) = f(x)$ на $[0,1]$.

Теперь оценим решение задачи (15), (16). Из теоремы о следах [12, с. 46] вытекает, что $L_1u_1, L_2u_1 \in H_{\frac{2p-1}{2p}}$. Тогда в силу теоремы 1 эта задача при достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| > \delta$ имеет единственное решение $u \in W_p^2((0,1); H(A), H)$ и согласно представлению (3) справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|u_2\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)} &\le \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{B(H)} \|A_\lambda u_2\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)} \\ &\le C|\lambda|^{-1}(\|g_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} + \|g_2\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}}).\end{aligned} \tag{21}$$

С другой стороны, согласно (10), (11)

$$\|g_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} + \|g_2\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} \le C(\|L_1u_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} + \|L_2u_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}}). \tag{22}$$

Используя оценки (20), в силу [12, с. 46] получим

$$\|L_1u_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} \le C\|f\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)}, \tag{23}$$

$$\|L_2u_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} \le C\|f\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)}. \tag{24}$$

Учитывая оценки (23), (24) в (22), приходим к неравенству

$$\|g_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} + \|g_2\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} \le C\|f\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}}, \quad |\arg\lambda| > \delta. \tag{25}$$

Тогда из (21) и (25) имеем

$$\|u_2\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)} \le C|\lambda|^{-1}\|f\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}}, \quad |\arg\lambda| > \delta, \quad |\lambda| \to \infty.$$

Отсюда и из (18) следует, что

$$\|u\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)} \le C|\lambda|^{-1}\|f\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}}, \quad |\arg\lambda| > \delta, \quad |\lambda| \to \infty.$$

Теорема 2 доказана.

Следствие. *В условиях теоремы* 1 *задача* (12), (13) *коэрцитивно разрешима в пространстве* $\mathscr{L}_p((0,1);H)$, *т. е. при достаточно больших* $|\lambda|$ *из угла* $|\arg\lambda| > \delta$ *и при любом* $f \in \mathscr{L}_p((0,1);H)$ *задача* (12), (13) *имеет единственное решение* $u \in W_p^2((0,1);H(A),H)$ *и для решения справедлива оценка*

$$\|u''\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)} + \|Au\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)} + |\lambda|\,\|u\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)} \le C\|f\|_{\mathscr{L}_p((0,1);H)}.$$

Теорема 3. *Пусть*

1) A *— сильно позитивный оператор в* H, *и* $A^{-1} \in \sigma_{p_0}(H)$ *при некотором* $p_0 > 0$*;*

2) *оператор* B_i $(i = 1,2)$ *ограниченно действует из* H *в* H *и из* $H(A)$ *в* $H(A)$.

Тогда $(\mathscr{L} - \lambda I)^{-1} \in \sigma_q(\mathscr{L}_2((0,1);H))$ *при* $q > \frac{1+2p_0}{2}$.

Доказательство. Через S_1 обозначим самосопряженный положительно определенный оператор в $\mathscr{L}_2(0,1)$, для которого $D(S_1) = W_2^2(0,1)$. Такой оператор существует (см., например, [12, с. 468]), и для собственных чисел верна оценка $C_1k^2 \le \lambda_k(S_1) \le C_2k^2$. Через S_2 обозначим самосопряженный положительно определенный оператор в H, для которого $D(S_2) = H(A)$. Так как $A^{-1} \in \sigma_{p_0}(H)$, ясно, что $S_2^{-1} \in \sigma_{p_0}(H)$. Отсюда следует, что для собственных чисел верно неравенство $\mu_n(S_2) > Cn^{\frac{1}{p_0}}$. Собственные элементы оператора S_1 обозначим через $\varphi_k(x)$, собственные элементы оператора S_2 — через e_n:

$$(S_1\varphi_k)(x) = \lambda_k\varphi_k(x), \quad S_2e_n = \mu_ne_n.$$

Тогда $\varphi_k(x)e_n$ образует базис в $\mathscr{L}_2((0,1);H)$. В пространстве $\mathscr{L}_2((0,1);H)$ определим следующий оператор:

$$\Lambda u = \sum_{k,n=1}^{\infty}(1+\lambda_k+\mu_n)a_{k,n}\varphi_k(x)e_n, \quad u = \sum_{k,n=1}^{\infty}a_{k,n}\varphi_k(x)e_n.$$

Оператор Λ ограниченно действует из $W_p^2((0,1);H(A),H)$ в $\mathscr{L}_2((0,1);H)$. Тогда $Q = \Lambda R(\lambda,\mathscr{L})$ — ограниченный оператор в $\mathscr{L}_2((0,1);H)$ и $R(\lambda,\mathscr{L}) = \Lambda^{-1}Q$. Так как $\Lambda^{-1} \in \sigma_q(\mathscr{L}_2((0,1);H))$ при $q > \frac{1+2p_0}{2}$ (см. [16]), то $R(\lambda,\mathscr{L}) \in \sigma_q(\mathscr{L}_2((0,1);H))$. Теорема 3 доказана.

В пространстве $\mathscr{L}_2((0,1);H)$ рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0,1), \tag{26}$$

$$u(0) + B_1u(\xi_1) = 0, \quad u(1) + B_2u(\xi_2) = 0, \tag{27}$$

где $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$.

Из теорем 2, 3 в силу [13, с. 277] вытекает

Теорема 4. *Пусть*

1) *A — сильно позитивный оператор в H, и $A^{-1} \in \sigma_{p_0}(H)$, $0 < \delta < \frac{2\pi}{1+2p_0}$ при некотором $p_0 > 0$;*

2) *оператор B_i $(i = 1, 2)$ ограниченно действует из H в H и из $H(A)$ в $H(A)$.*

Тогда система собственных и присоединенных вектор-функций задачи (26), (27) *полна в $\mathscr{L}_2((0,1); H)$.*

Пусть оператор A в гильбертовом пространстве H самосопряженный и положительно определенный. Тогда (см. [10 с. 166]) при $0 < \theta < 1$, $p = 2$

$$(H, H(A^n))_{\theta,2} = H(A^{n\theta}).$$

В этом случае краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений изучены в работе А. А. Шкаликова [17].

Рассмотрим в $\mathscr{L}_2(\Omega)$, $\Omega = [0,1] \times [0,l]$, спектральную задачу для уравнения Лапласа с краевыми условиями типа Бицадзе — Самарского:

$$Lu \equiv -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \lambda u(x,y); \tag{28}$$

$$\begin{aligned} L_1 u &\equiv u(0,y) + \int_0^l B_1(y,t) u(\xi_1, t)\, dt = 0, \\ L_2 u &\equiv u(1,y) + \int_0^l B_2(y,t) u(\xi_2, t)\, dt = 0; \end{aligned} \tag{29}$$

$$Q_\nu u = \alpha_\nu u_y^{(k\nu)}(x,0) + \beta_\nu u_y^{(k\nu)}(x,l) = 0, \quad \nu = 1,2, \tag{30}$$

где $0 \le k_1 \le k_2 \le 1$, α_ν, β_ν — комплексные числа, $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| \ne 0$; $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

1^0) *$B_i(\cdot,\cdot)$ принадлежит множеству $C^{0,2}(\Omega)$ непрерывных в Ω функций, у которых существуют непрерывные в Ω производные $\frac{\partial B_i(y,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 B_i(y,t)}{\partial t^2}$, $i = 1, 2$;*

2^0) $\begin{vmatrix} \alpha_1 & (-1)^{k_1}\beta_1 \\ \alpha_2 & (-1)^{k_2}\beta_2 \end{vmatrix} \ne 0.$

Тогда системы собственных и присоединенных функций задачи (28)–(30) *полны в $\mathscr{L}_2(\Omega)$.*

Доказательство. В пространстве $\mathscr{L}_2(0,l)$ определим операторы A, B_i $(i = 1, 2)$ следующим образом:

$$D(\mathscr{L}) = W_p^2\big((0,l); Q_\nu u|_{j=1}^2 = 0\big), \quad Au = -\frac{d^2 u}{dy^2}; \tag{31}$$

$$D(B_i) = \mathscr{L}_2(0,l), \quad B_i u = \int_0^l B_i(y,t) u(\xi_i, t)\, dt. \tag{32}$$

Очевидно, что доказательство теоремы 5 сводится к проверке условий теоремы 4. Сильная позитивность оператора A, определенного формулой (31), следует из [14, с. 19]. В силу [12, с. 317] имеют место компактные вложения $W_2(0,l) \subset \mathscr{L}_2(0,l)$, а согласно [12, с. 437] $S_j(J; W_2(0,l), \mathscr{L}_2(0,l)) \sim j^{-2}$.

С другой стороны, при $j = 1 \div \infty$

$$S_j\big(J; W_p^2\big((0,l); Q_\nu u|_{j=1}^2 = 0\big), \mathscr{L}_2(0,l)\big) \le S_j\big(J; W_p^2(0,l), \mathscr{L}_2(0,l)\big).$$

Тогда ввиду [12, с. 494] при любом $p_0 > \frac{1}{2}$ будет $A^{-1} \in \sigma_{p_0}(\mathscr{L}_2(0,l))$.

Легко показывается, что оператор B_i $(i = 1, 2)$, определенный равенством (32), удовлетворяет второму условию теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.

2. *Скубачевский А. Л.* Разрешимость эллиптических задач с краевыми условиями типа Бицадзе — Самарского // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 4. С. 701–706.

3. *Ерошенков Е. П., Кальменов Т. Ш.* О полноте корневых векторов эллиптической задачи Бицадзе — Самарского // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 528–531.

4. *Ильин В. А., Филиппов В. С.* О характере спектра самосопряженного расширения оператора Лапласа в ограниченной области // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191, № 2. С. 167–169.

5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных уравнений эллиптического типа в пространстве вектор-функций // Укр. мат. журн. 1976. Т. 28, № 3. С. 313–324.

6. *Михайлец В. А.* Граничные задачи для операторного уравнения Штурма — Лиувилля с полной системой собственных и присоединенных функций // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 9. С. 1595–1600.

7. *Алиев Б. А.* Разрешимость краевой задачи с оператором в краевых условиях для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Докл. АН Азерб. ССР. 1981. Т. 37, № 6. С. 17–20.

8. *Якубов С. Я., Алиев Б. А.* Фредгольмовость краевой задачи с оператором в краевых условиях для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 5. С. 1071–1074.

9. *Якубов С. Я., Алиев Б. А.* Полнота системы корневых функций краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений с операторами в краевых условиях // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 12. С. 2187–2188.

10. *Красносельский М.А. и др.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

11. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.

12. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

13. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.

14. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

15. *Орлов В. П., Соболевский П. Е.* О резольвенте вырождающегося оператора в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 5. С. 858–868.

16. *Алиев И. В.* О резольвенте обобщенной краевой задачи для дифференциально-операторных уравнений Штурма — Лиувилля // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 4. С. 468–477.

17. *Шкаликов А. А.* Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1989. С. 140–224.

Статья поступила 7 февраля 1990 г.,
окончательный вариант — 9 ноября 1999 г.

г. Баку
Азербайджанский гос. педагогический университет,

Азербайджанский индустриальный институт