Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.9

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ПЛОСКОСТИ

Е. В. Воробьева, Р. К. Романовский

Аннотация: Рассматривается краевая задача для гиперболической системы с двумя независимыми переменными в области с кусочно-гладкой границей, пересекаемой характеристиками под ненулевым углом. Устанавливаются точные условия однозначной разрешимости в терминах системы интегральных уравнений на компоненты граничной вектор-функции. При выполнении этих условий строится явная формула для решения. Получено приложение к смешанной задаче. В основе подхода лежит аппарат матриц-функций Римана первого и второго родов, построенный ранее одним из авторов применительно к задаче Коши. Библиогр. 12.

Введение

В работе [1] построено явное представление решений задачи Коши для гиперболической системы на плоскости. Ядрами интегральной формулы служат матрицы двух типов. Матрица первого типа $U_k(x,y)$ определена на парах точек $x=(s,t)$, $y=(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}^2$, лежащих на одной и той же характеристике с номером k, и является при фиксированной y разрешающей матрицей системы обыкновенных уравнений «переноса» вдоль проходящей через точку y характеристики с номером k; таких матриц столько, сколько характеристик проходит через фиксированную точку. Матрица второго типа $V(x,y)$ определена на остальных парах (x,y) и является при фиксированной y кусочно-гладким решением исходной системы со скачками на характеристиках, строящимися по U_k. Существенную роль в построениях играют двойственные соотношения для матриц U_k, V как функций от y при фиксированной x. В случае постоянных коэффициентов получены явные формулы для U_k, V. В [2–4] построенный аппарат использован для изучения поведения решений при большом времени.

В данной работе этот аппарат применен к анализу других краевых задач для гиперболических систем на плоскости.

В § 1 излагаются необходимые сведения о матрицах U_k, V из [1] в форме, удобной для последующего изложения.

В § 2 гиперболическая система рассматривается в области, граница которой содержит кусочно-гладкий участок Γ, пересекаемый выпущенными из области «вниз» характеристиками под ненулевым углом. Ставится (вообще говоря, некорректная) краевая задача $L(u)=f$, $u|_\Gamma$ задана (L — гиперболический оператор). Устанавливаются необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости в терминах системы интегральных уравнений на компоненты граничной вектор-функции. При выполнении этих условий строится явное представление решений (обобщенная формула Римана). В случае, когда

Γ — прямая $t = 0$, условия разрешимости выполняются тождественно и эта формула переходит в формулу из [1] для решений задачи Коши.

В § 3, 4 рассматривается смешанная задача для системы $Lu = f$ в областях $\{s > 0, t > 0\}$ и $\{0 < s < 1, t > 0\}$. Условия при $s = 0$, $s = 1$ выражают линейно компоненты граничной функции, отвечающие «уходящим» характеристикам, через компоненты, отвечающие «приходящим» характеристикам (см. [5–10]). Условия разрешимости из § 2 приводят к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода для «приходящих» компонент. После решения этой системы решение смешанной задачи строится по обобщенной формуле Римана. Попутно получено доказательство корректности смешанной задачи для гиперболической системы на плоскости, альтернативное проведенному в [7] методом разностной аппроксимации.

В работе правые части системы и данные на границе задаются в классе непрерывных функций, решения краевых задач понимаются в обобщенном смысле: требуется, чтобы компоненты $u_k(s,t)$ решения были гладкими вдоль характеристик с тем же номером и непрерывными вместе с производными вдоль «своих» характеристик в рассматриваемой области. При дополнительных ограничениях на данные решения смешанной задачи становятся гладкими [5]. К коэффициентам гиперболического оператора предъявляются минимальные требования гладкости, чтобы построение матриц U_k, V было корректным.

§ 1. Функции Римана первого рода и второго рода

Рассматривается гиперболический оператор с кратными характеристиками
$$L = \frac{\partial}{\partial t} + A(x)\frac{\partial}{\partial s} + B(x), \quad x = (s,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$
Здесь $B : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$, $A = \mathrm{diag}(a_1 I_1, \dots, a_n I_n)$, I_k — единичная матрица порядка N_k, $\sum N_k = N$, $a_1 > \dots > a_n$, $a_k \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $B \in C(\mathbb{R}^2)$. Предполагается $|a'_{ks}| \leqslant \mathrm{const}$, тогда проходящие через каждую точку $x = (s,t)$ характеристики
$$q_k(x) = \{(\sigma,\tau) : \sigma = s_k(\tau, x),\ s'_{k\tau} = a_k(s_k, \tau),\ s_k(t,x) = s\}, \quad k = 1, \dots, n,$$
определены глобально и пересекаются каждой горизонталью $\tau = \mathrm{const}$ один раз. Далее будем представлять матрицы порядка N в блочном виде в соответствии с размерами диагональных блоков матрицы A: $v = (v_{ij})_1^n$, где v_{ij} — блок размера $N_i \times N_j$. Векторы из $\mathbb{C}^N$ будем представлять в виде $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, где f_k имеет размер N_k.

Проведем через фиксированную точку $y = (\sigma, \tau)$ характеристики $q_1(y), \dots, q_n(y)$ и горизонталь $q_0(y)$. Введем классы кусочно-гладких матриц: $v \in C^1_{k,y}$, $k = 0, \dots, n$, если v принадлежит $C^1(q_{k,y}(y) \setminus y)$ и имеет скачок в точке y; $v \in C^1_y$, если v принадлежит $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} q_k(y)$ и гладко продолжаема изнутри каждого угла с вершиной y между соседними «половинами» характеристик $q_k(y)$ на его границу. Обозначим через $[v]_{k,y}$ скачок матрицы $v(x) \in C^1_y$ на $q_k(y) \setminus y$, считаемый «против часовой стрелки»:
$$[v]_{k,y} = [v(s_k + 0, t) - v(s_k - 0, t)]\,\mathrm{sign}(t - \tau), \quad t \neq \tau,$$
где $s_k = s_k(t, y)$. Очевидно, $[v]_{k,y} \in C^1_{k,y}$. Рассмотрим задачу
$$L(v) = g, \quad v|_{q_0(y)\setminus y} = h, \quad [v_{ij}]_{k,y} = w_{ijk}, \quad i,j,k = 1, \dots, n,\ i \neq k. \tag{2}$$
Здесь $v(x)$ — матрица порядка N класса C^1_y, v_{ij} — ее блоки, g, h, w_{ijk} — заданные матрицы соответствующих размеров соответственно классов C^1_y, $C^1_{0,y}$, $C^1_{k,y}$, $k = 1, \dots, n$.

Предложение 1 [1]. *Начально-характеристическая задача* (2) *однозначно разрешима в классе* C_y^1.

Поставим в соответствие каждой характеристике q_k оператор $L_{q_k} = D_k + B_{kk}(x)$, где D_k — оператор дифференцирования по t вдоль q_k, B_{kk} — сужение k-го диагонального блока матрицы B на q_k. Введем в $\mathbb{R}^4$ множества

$$\Omega_k = \{(x,y) : y \in \mathbb{R}^2,\ x \in q_k(y)\}, \quad \Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_k \Omega_k$$

и функции

$$e_k(x,y) = \exp\left(\int_y^x a'_{ks}\, d\tau\right),$$

где $(x,y) \in \Omega_k$ и интеграл берется вдоль $q_k(y)$.

Определение 1. Функцию $U_k(x,y) : \Omega_k \to \mathrm{Mat}(N_k, \mathbb{C})$, являющуюся при каждой $y \in \mathbb{R}^2$ решением по $x = (s,t)$ задачи Коши

$$L_{q_k(y)}(u) = 0,\ u|_{x=y} = I_k, \tag{3}$$

будем называть *функцией Римана* 1-*го рода для оператора* (1).

2. Функцию $V(x,y) : \Omega \to \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$, являющуюся при каждой $y \in \mathbb{R}^2$ решением по x начально-характеристической задачи (2) с данными

$$g = 0, \quad h = 0, \quad w_{ijk} = \begin{cases} \frac{e_k(x,y)}{a_k(x) - a_i(x)} B_{ik}(x) U_k(x,y), & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \tag{4}$$

будем называть *функцией Римана* 2-*го рода для оператора* (1).

Из определения, в частности, следует, что $V = 0$ вне замкнутых углов с вершиной в точке y, образованных соответственно верхними и нижними «половинами» крайних характеристик $q_1(y)$, $q_n(y)$.

Предложение 2 [1]. 1. *Функция Римана* 1-*го рода* $U_k(x,y)$ *является решением по* $y = (\sigma, \tau)$ *двойственной к* (3) *задачи Коши*

$$-D_k u + u B_{kk}(y) = 0, \quad u|_{y=x} = I_k, \tag{5}$$

где $D_k u$ — *производная по* τ *вдоль* $q_k(x)$.

2. *Функция Римана* 2-*го рода* $V(x,y)$ *является решением по* y *двойственной к* (2), (4) *начально-характеристической задачи*

$$L^*(v) = -\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial (vA)}{\partial \sigma} + vB = 0, \quad v|_{q_0(x)\setminus x} = 0, \tag{6}$$

$$[v_{ij}]_{k,x} = \begin{cases} \frac{1}{a_j(y) - a_k(y)} U_k(x,y) B_{kj}(y), & i = k, \\ 0, & i \neq k\ (i,j,k = 1, \ldots, n,\ j \neq k). \end{cases}$$

Предложение 3 [1]. *В случае* $A, B = \mathrm{const}$ *матрицы* U_k *и сужение матрицы* V *на открытые углы с вершиной в точке* y *между соответственно верхними и нижними «половинами» характеристик* $q_k(y)$, $q_{k+1}(y)$ *даются формулами* $U_k = \exp[B_{kk}(t - \tau)]$,

$$V = \frac{(2\pi i)^{-2}}{(a_k - a_{k+1})} \iint_{\gamma\times\gamma} \exp \frac{\begin{vmatrix} \lambda & s - s_k \\ \mu & s - s_{k+1} \end{vmatrix}}{a_k - a_{k+1}} \Delta_k^{-1}(\lambda, \mu)\, d\lambda d\mu,$$

где $\gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = R \geqslant 2n\|B\|\}$, $s_k = \sigma + a_k(t-\tau)$,

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n I_n \end{pmatrix} + B, \quad \lambda_j = \frac{(a_j - a_{k+1})\lambda + (a_k - a_j)\mu}{a_k - a_{k+1}}.$$

§ 2. Обобщенная формула Римана

Представим оператор (1) в виде

$$L = D + B(x), \quad D = \operatorname{diag}(D_1, \dots, D_n), \tag{7}$$

где D_k — введенный выше оператор. Части $q_k^-(x)$ характеристик $q_k(x)$, лежащие не выше x ($\tau \leqslant t$), будем также называть характеристиками. Зафиксируем область $\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^2$. Будем предполагать, что граница $\partial\mathfrak{D}$ области $\mathfrak{D}$ содержит кусочно-гладкий участок Γ такой, что для каждой точки $x \in \overline{\mathfrak{D}} \setminus \Gamma$, где $\overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} + \partial\mathfrak{D}$, характеристики $q_1^-(x), \dots, q_n^-(x)$ пересекают Γ под ненулевым углом, притом один раз, и не имеют общих точек с $\partial\mathfrak{D} \setminus \Gamma$, кроме, быть может, точки x.

Лемма 1. *В указанной ситуации среди точек каждого из множеств*

$$M_k(x) = q_k^-(x) \cap \Gamma, \quad x \in \Gamma, \quad k = 1, \dots, n,$$

имеется самая низкая точка $\hat{y}_k(x)$ (с наименьшей ординатой). Если какое-либо M_k содержит точки, отличные от x, $\hat{y}_k(x)$, то оно совпадает с отрезком $[x, \hat{y}_k]$ характеристики $q_k(x)$.

Доказательство. Предположим, что какое-либо M_k не ограничено снизу. Тогда в случае $M_k \neq q_k^-(x)$ вблизи M_k найдутся точки $y \in \mathfrak{D}$, для которых $q_k^-(y)$ пересекает Γ более одного раза. В случае $M_k = q_k^-(x)$ найдутся точки $y \in \mathfrak{D}$, для которых $q_k^-(x)$ не имеет общих точек с Γ. Отсюда с учетом замкнутости множеств M_k вытекает первое утверждение леммы 1. Второе проверяется аналогично.

Построим отображения $\overline{\mathfrak{D}} \to \Gamma$:

$$y_k(x) = \begin{cases} q_k^-(x) \cap \Gamma, & x \in \overline{\mathfrak{D}} \setminus \Gamma, \\ \hat{y}_k(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{8}$$

Из (8) и непрерывности кривой Γ легко следует непрерывность отображений $y_k(x)$ в $\overline{\mathfrak{D}}$. Далее будем кратко говорить, что участок Γ границы $\partial\mathfrak{D}$ *регулярно достижим* из $\mathfrak{D}$, если выполнены указанные выше требования и при этом каждая точка $x \in \Gamma$ содержится хотя бы в одном из множеств $y_k(\overline{\mathfrak{D}})$.

Рассмотрим краевую задачу

$$L(u) = f(x) \quad (x \in \overline{\mathfrak{D}}), \quad u|_\Gamma = \psi(x), \tag{9}$$

где Γ — регулярно достижимый из $\mathfrak{D}$ участок границы $\partial\mathfrak{D}$, f, ψ — функции со значениями в $\mathbb{C}^N$, непрерывные соответственно на $\overline{\mathfrak{D}}$ и на Γ. *Решением* (*обобщенным*) *задачи* (9) будем называть функцию $u(x) : \overline{\mathfrak{D}} \to \mathbb{C}^N$ со свойствами: 1) $u \in C(\overline{\mathfrak{D}})$; 2) для каждой компоненты $u_k(x)$ существует производная $D_k u_k \subset C(\mathfrak{D})$, непрерывно продолжаемая в $\overline{\mathfrak{D}}$; 3) выполняются соотношения

(9), где оператор L понимается в смысле (7). Класс функций, удовлетворяющих условиям 1–3, будем обозначать через S_L. Пусть $x \in \overline{\mathfrak{D}}$, $y_k(x)$ — функции (8). Обозначим

$$U(x) = \operatorname{diag}[U_1(x, y_1), \dots, U_n(x, y_n)], \quad \hat{\psi}(x) = [\psi_1(y_1), \dots, \psi_n(y_n)]^T,$$

$$\mathfrak{F}\psi = U(x)\hat{\psi}(x) + \int_{\Gamma_x} V(x, y)[\psi(y)\, d\sigma - A(y)\psi(y)\, d\tau],$$

$$\mathfrak{F}_1 f = \left[\int_{y_1}^{x} U_1(x, y) f_1(y)\, d\tau, \dots, \int_{y_n}^{x} U_n(x, y) f_n(y)\, d\tau\right]^T, \tag{10}$$

$$\mathfrak{F}_2 f = \iint_{\mathfrak{D}_x} V(x, y) f(y)\, dy.$$

Здесь U_k, V — функции Римана, интегралы в формуле для $\mathfrak{F}_1 f$ берутся вдоль $q_k^-(x)$, Γ_x — часть Γ между y_1, y_n, $\mathfrak{D}_x$ — часть $\overline{\mathfrak{D}}$ между $q_1^-(x)$, $q_n^-(x)$, Γ_x.

Теорема 1. *Если краевая задача* (9) *имеет решение* $u(x) \in S_L$, *то справедлива формула*

$$u(x) = \mathfrak{F}\psi + (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2) f. \tag{11}$$

Доказательство. Построим по точке $x \in \mathfrak{D}$ замкнутые множества Γ_x, $\mathfrak{D}_x$, указанные выше. Пусть $\Delta > 0$, Π_Δ — объединение замкнутых кругов радиуса Δ с центрами в точках $y \in \Gamma_x$, при этом Δ столь мало, что часть $\Gamma_{x,\Delta}$ границы множества Π_Δ, лежащая в $\mathfrak{D}_x$, непуста и пересекается выпущенными из точки x характеристиками $q_k^-(x)$, $k = 1, \dots, n$, под ненулевым углом в точках $y_{k,\Delta}(x)$. Обозначим через $\mathfrak{D}_{x,\Delta}$ замкнутое множество, ограниченное $q_1^-(x)$, $q_n^-(x)$, $\Gamma_{x,\Delta}$; очевидно, $\mathfrak{D}_{x,\Delta} \subset \mathfrak{D}$. Построим по решению $u(x) \in S_L$ задачи (9) гладкую функцию $\mathfrak{D}_{x,\Delta} \to \mathbb{C}^N$ по формуле $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$, где ρ_ε — ядро усреднения на плоскости (см. [11]), $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Нетрудно получить, что

$$\max |u - u_\varepsilon| \to 0, \quad \max |D_k(u_k - u_{\varepsilon k})| \to 0 \quad (\varepsilon \to 0),$$

где максимум берется по $\mathfrak{D}_{x,\Delta}$, откуда следует, что

$$\max |L(u - u_\varepsilon)| \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

Покажем, что имеет место равенство

$$u_\varepsilon(x) = \mathfrak{F}_\Delta \psi_\varepsilon + (\mathfrak{F}_{1,\Delta} + \mathfrak{F}_{2,\Delta}) f_\varepsilon, \tag{12}$$

где операторы $\mathfrak{F}_\Delta$, $\mathfrak{F}_{k,\Delta}$ строятся по формулам (10) с заменой Γ_x на $\Gamma_{x,\Delta}$, $\mathfrak{D}_x$ на $\mathfrak{D}_{x,\Delta}$, y_k на $y_{k,\Delta}$, ψ_ε — сужение u_ε на $\Gamma_{x,\Delta}$, $f_\varepsilon = L(u_\varepsilon)$.

Интегрируя равенство

$$V(x, y) L(u_\varepsilon) - L^*(V) u_\varepsilon = \frac{\partial (V A u_\varepsilon)}{\partial \sigma} + \frac{\partial (V u_\varepsilon)}{\partial \tau}$$

по области $\mathfrak{D}_{x,\Delta}$ и применяя на участках гладкости матрицы V между соседними характеристиками $q_k^-(x)$, $q_{k+1}^-(x)$ формулу Грина, после выкладок с использованием двойственных соотношений (6) для матрицы V получим

$$\int_{\Gamma_{x,\Delta}} V(x, y)[\psi_\varepsilon\, d\sigma - A\psi_\varepsilon\, d\tau] + \mathfrak{F}_{2,\Delta} f_\varepsilon = \mathfrak{F}_{1,\Delta} h_\varepsilon, \tag{13}$$

где $h_\varepsilon = (B_0 - B)u_\varepsilon$, $B_0 = \operatorname{diag}(B_{11}, \dots, B_{nn})$. С учетом двойственных соотношений (5) для матриц U_k нетрудно получить для компонент вектор-функции h_ε соотношения $U_k h_{\varepsilon k} = D_k(U_k u_{\varepsilon k}) - U_k f_{\varepsilon k}$, откуда интегрированием по отрезку $[y_{k,\Delta}, x]$ характеристики $q_k^-(x)$ с учетом $U_k(x,x) = I_k$ получим равенство

$$\mathfrak{F}_{1,\Delta} h_\varepsilon = u_\varepsilon(x) - \operatorname{diag}[U_1(x, y_{1,\Delta}), \dots, U_n(x, y_{n,\Delta})]\psi_\varepsilon(x) - \mathfrak{F}_{1,\Delta} f_\varepsilon.$$

Отсюда и из (13) следует равенство (12). Предельный переход в (12) при $\varepsilon \to 0$ и затем при $\Delta \to 0$ дает (11) при $x \in \mathfrak{D}$; предельный переход в (11) изнутри $\mathfrak{D}$ на границу дает требуемое.

Следствие. *Если краевая задача* (9) *разрешима в классе S_L, то имеет место равенство*

$$(I - \mathfrak{F})\psi = (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2)f, \quad x \in \Gamma. \tag{14}$$

Теорема 2. *При любых $\psi \in C(\Gamma)$, $f \in C(\overline{\mathfrak{D}})$ функция* (11) *удовлетворяет в $\overline{\mathfrak{D}}$ уравнению $L(u) = f$, где L — оператор* (7). *Если при этом ψ, f связаны соотношением* (14), *то функция* (11) *удовлетворяет условию $u|_\Gamma = \psi$.*

Доказательство первого утверждения проводится вычислением $L(u)$ с использованием «прямых» соотношений (3), (4) для функций Римана. Сопоставляя формулу (11) при $x \in \Gamma$ с (14), получим второе утверждение.

Следствие. *Для однозначной разрешимости краевой задачи* (9) *необходимо и достаточно, чтобы данные ψ, f были связаны соотношением* (14).

Замечание. Если $y_1(x) = \dots = y_n(x) = x$ для каждого $x \in \Gamma$, то равенство (14) становится тождеством и задача (9) однозначно разрешима в классе S_L при любых непрерывных ψ, f. Из формулы (11) следует непрерывная зависимость решения от данных ψ, f на каждом компакте $K \subset \overline{\mathfrak{D}}$.

§ 3. Смешанная задача в четвертьплоскости

Далее дополнительно к § 1 предполагается, что

$$a_1, \dots, a_m > 0; \quad a_{m+1}, \dots, a_n < 0 \quad (1 \leqslant m < n). \tag{15}$$

Будем использовать блочное представление матриц A, U, V и векторов из $\mathbb{C}^N$:

$$A = \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_+ & 0 \\ 0 & U_- \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix},$$

где блоки A_+, U_+, V_{11} имеют порядок $M = N_1 + \dots + N_m$, $f_+ \in \mathbb{C}^M$. Положим $Q = \{(s,t) : s \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$ и рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} L(u) = f(x) \ (x \in Q); \quad u(s,0) = h(s) \ (s \geqslant 0); \\ u_+(0,t) = P(t)u_-(0,t) + \xi(t) \quad (t \geqslant 0). \end{gathered} \tag{16}$$

Здесь L — оператор (7), $f \in C(Q \to \mathbb{C}^N)$, $h \in C(\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^N)$, $\xi \in C(\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^M)$, $P(t)$ — непрерывная в $\mathbb{R}^+$ матрица размера $M \times (N - M)$, $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, выполняется условие согласования

$$h_+(0) = P(0)h_-(0) + \xi(0). \tag{17}$$

В силу (15) граница $\Gamma = \partial Q$ регулярно достижима из Q. Если задача (16) имеет решение $u(x) \in S_L$, то в силу теоремы 1 оно представляется формулой

(11), где $\psi = u|_\Gamma$. Условие разрешимости (14) в случае $x = (s, 0)$ выполняется тождественно. В случае $x = (0, t)$ в формуле для $\mathfrak{F}\psi$

$$U_+ = I_+ = \operatorname{diag}(I_1, \dots, I_m), \quad \hat{\psi} = (\psi_+, \hat{h}_-),$$

где $\hat{h}_-$ — вектор с компонентами $h_k(\sigma_k)$, $k = m+1, \dots, n$, σ_k — абсцисса точки пересечения характеристики $q_k^-(0, t)$ с осью $t = 0$. Условие (14) вместе с краевыми условиями (16) дает ограничения на $\psi_\pm(0, t)$:

$$\begin{gathered} \int\limits_0^t (V_{11}A_+\psi_+ + V_{12}A_-\psi_-)\, d\tau + g_+(t) = 0, \\ \psi_- - \int\limits_0^t (V_{21}A_+\psi_+ + V_{22}A_-\psi_-)\, d\tau = U_-(0, t)\hat{h}_- + g_-(t), \quad \psi_+ = P\psi_- + \xi, \end{gathered} \tag{18}$$

где $V_{ij} = V_{ij}(0, t;\, 0, \tau)$,

$$\begin{bmatrix} g_+ \\ g_- \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\sigma_n} V(0, t;\, \sigma, 0)h(\sigma)\, d\sigma + (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2)f|_{x=(0,t)}.$$

Лемма 2. *Система уравнений* (18) *имеет единственное решение* $(\psi_+^\circ, \psi_-^\circ) \in C(\mathbb{R}^+)$.

Доказательство. Существует единственная пара $(\psi_+^\circ, \psi_-^\circ) \in C(\mathbb{R}^+)$, удовлетворяющая второму и третьему равенствам (18): исключая из них ψ_+, получим для ψ_- интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Покажем, что эта пара удовлетворяет первому равенству (18). Построим функцию

$$u(x) = \mathfrak{F}\psi_0 + (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2)f, \quad x \in Q, \quad \psi_0 = \begin{cases} \begin{bmatrix} \psi_+^\circ \\ \psi_-^\circ \end{bmatrix}, & x = (0, t) \\ h, & x = (s, 0). \end{cases} \tag{19}$$

Из (18) с учетом условия (17) легко получить, что $\psi_\pm^\circ(0, 0) = h_\pm(0)$, поэтому $\psi_0 \in C(\Gamma)$. В силу теоремы 2 эта функция удовлетворяет уравнению $L(u) = f$ в Q. Подставляя в (19) $x = (0, t)$, получим

$$\begin{gathered} u_+(0, t) = \psi_+^\circ(0, t) + \int\limits_0^t (V_{11}A_+\psi_+^\circ + V_{12}A_-\psi_-^\circ)\, d\tau + g_1(t), \\ u_-(0, t) = \psi_-^\circ(0, t). \end{gathered} \tag{20}$$

Согласно теореме 1 функция (19) представляется через свои граничные значения формулой (11), откуда, в частности, следует, что

$$\int\limits_0^t (V_{11}A_+u_+ + V_{12}A_-u_-)\, d\tau + g_1(t) = 0$$

(учтено, что $U_+(0, t)\hat{\psi}(0, t) = u_+(0, t)$). Из сопоставления этого равенства с (20) вытекает, что функция $v(t) = u_+ - \psi_+^\circ$ удовлетворяет однородному уравнению Вольтерра

$$v + \int\limits_0^t V_{11}A_+v\, d\tau = 0.$$

Поэтому $u_+ = \psi_+^\circ$. Тем самым первое равенство (18) верно при $(\psi_+, \psi_-) = (\psi_+^\circ, \psi_-^\circ)$.

Теорема 3. *При любых $f \in C(Q)$, h, $\xi \in C(\mathbb{R}^+)$, удовлетворяющих условию согласования (17), краевая задача (16) имеет единственное решение $u(x) \in S_L$. Это решение дается формулой (19), где $\psi_0(0,t)$ вычисляется из интегрального уравнения Вольтерра второго рода, получаемого исключением ψ_+ из второго и третьего уравнений (18). Решение непрерывно зависит от f, h, ξ на каждом компакте $K \subset Q$.*

Доказательство. Первые два утверждения следуют из леммы 2 и теорем 1, 2, третье — из формулы (19).

§ 4. Смешанная задача в полосе

Обозначим $\Pi = \{(s,t);\ 0 \leqslant s \leqslant 1,\ t \geqslant 0\}$. При условиях (15) граница $\Gamma = \partial\Pi$ регулярно достижима из Π. Будем дополнительно к (15) предполагать a_k ограниченными в Π:

$$a = \inf_{k,x} \left| a_k^{-1} \right| > 0.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} L(u) = f(x)\ (x \in \Pi); \quad u(s,0) = h(s)\ (0 \leqslant s \leqslant 1); \\ u_+(0,t) = P(t)u_-(0,t) + \xi(t); \\ u_-(1,t) = P_1(t)u_+(1,t) + \xi_1(t) \quad (t \geqslant 0). \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь вектор-функции f, h, ξ, ξ_1 и матрицы-функции P, P_1 непрерывны в своих областях определения, выполняются условия согласования

$$h_+(0) = P(0)h_-(0) + \xi(0), \quad h_-(1) = P_1(0)h_+(1) + \xi_1(0). \tag{22}$$

Будем решать задачу (21) последовательно в прямоугольниках

$$\Pi_k = \{(s,t) : 0 \leqslant s \leqslant 1,\ ka \leqslant t \leqslant (k+1)a\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

1. Обозначим через Γ_0 часть границы прямоугольника Π_0, состоящую из нижнего основания и боковых сторон. Очевидно, что Γ_0 регулярно достижима из Π_0. В силу выбора высоты прямоугольника Π_0 для каждой точки x на левой боковой стороне Π_0 характеристики $q_{m+1}^-(x), \dots, q_n^-(x)$ пересекают Γ_0 в точках нижнего основания. С учетом этого условие разрешимости (14) вместе с краевыми условиями (21) дает для компонент $\psi_\pm(0,t)$ граничной функции $\psi = u|_{\Gamma_0}$ систему уравнений (18). Аналогично для каждой точки x на правой боковой стороне Π_0 характеристики $q_1^-(x), \dots, q_m^-(x)$ пересекают Γ_0 в точках нижнего основания и условие (14) вместе с условиями (21) дает для компонент $\psi_\pm(1,t)$ граничной функции систему уравнений

$$\begin{gathered} \int_0^t (V_{21}A_+\psi_+ + V_{22}A_-\psi_-)\, d\tau - g_-^1(t) = 0, \\ \psi_+ + \int_0^t (V_{11}A_+\psi_+ + V_{12}A_-\psi_-)\, d\tau = U_+(1,t)\hat{h}_+ + g_+^1(t), \\ \psi_- = P_1\psi_+ + \xi_1, \end{gathered} \tag{23}$$

где $V_{ij} = V_{ij}(1,t;\,1,\tau)$, $\hat{h}_+$ — вектор с компонентами $h_k(s_k)$, $k = 1,\dots,m$, s_k — абсцисса точки пересечения характеристики $q_k(1,t)$ с осью $t = 0$,

$$\begin{bmatrix} g_+^1 \\ g_-^1 \end{bmatrix} = \int\limits_{s_1}^{1} V(0,t;\,\sigma,0)h(\sigma)\,d\sigma + (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2)f|_{x=(1,t)}.$$

Повторяя рассуждение, проведенное при доказательстве леммы 2, получим, что система уравнений (23), как и система (18), однозначно разрешима в классе непрерывных функций, ее решение сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода, получаемого исключением ψ_- из второго и третьего равенств (23). В силу следствия из теоремы 2 отсюда вытекает, что задача (21) с заменой Π на Π_0 имеет единственное решение $u(x) \in S_L$.

2. Решая последовательно задачу (21) в прямоугольниках Π_k и принимая при этом в качестве начальной функции в Π_{k+1} ограничение решения в Π_k на его верхнее основание, построим решение $u(x) \in S_L$ задачи (21).

Получен (с учетом теорем 1, 2) следующий результат.

Теорема 4. *При любых непрерывных f, h, ξ, ξ_1 с условиями согласования* (22) *краевая задача* (21) *имеет единственное решение $u(x) \in S_L$. Это решение дается формулой* (11), *где $\psi(s,0) = h(s)$, $\psi(0,t)$ и $\psi(1,t)$ вычисляются последовательно из интегральных уравнений Вольтерра второго рода, получаемых исключением из второго и третьего равенств* (18), (23) *соответственно ψ_+, ψ_-* (*начальная функция на каждом этапе своя*). *Решение непрерывно зависит от данных f, h, ξ, ξ_1 на каждом компакте $K \subset \Pi$.*

Замечание. Изложенная схема исследования смешанной задачи проходит, если в (1) одно из a_k нулевое; в этом случае уравнения на $\psi(0,t)$, $\psi(1,t)$ видоизменяются.

Отметим, что в работе [12] гиперболическая система $L(u) = 0$ приведена к обыкновенному уравнению в гильбертовом пространстве вида $\dot{v} + \Lambda v = 0$, где $\Lambda = T(t)BT^{-1}(t)$, $T(t)$ — «оператор сдвига» вдоль характеристик системы (введен в [12]). Это позволило применить к исследованию устойчивости решений задачи Коши метод функционалов Ляпунова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романовский Р. К.* О матрицах Римана первого и второго рода // Мат. сб. 1985. Т. 127, № 4. С. 494–501.
2. *Романовский Р. К.* Экспоненциально расщепляемые гиперболические системы с двумя независимыми переменными // Мат. сб. 1987. Т. 133, № 3. С. 341–355.
3. *Романовский Р. К.* Об операторе монодромии гиперболической системы с периодическими коэффициентами // Применение методов функционального анализа в задачах математической физики. Киев: ИМ АН УССР, 1987. С. 47–52.
4. *Романовский Р. К.* Усреднение гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306, № 2. С. 286–289.
5. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Мат. сб. 1960. Т. 50, № 4. С. 423–442.
6. *Зеленяк Т. И.* О стационарных решениях смешанных задач, возникающих при изучении некоторых химических процессов // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 2. С. 205–213.
7. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
8. *Елтышева Н. А.* О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. 1988. Т. 135, № 2. С. 186–209.
9. *Елтышева Н. А.* К вопросу об устойчивости некоторых гиперболических систем // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 30–32.

10. *Лаврентьев М. М. (мл.), Люлько Н. А.* Повышение гладкости решений некоторых гиперболических задач // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 109–124.

11. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.

12. *Воробьева Е. В., Романовский Р. К.* Об устойчивости решений задачи Коши для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1290–1292.

Статья поступила 21 апреля 1999 г.,
окончательный вариант — 31 августа 1999 г.

г. Омск
Омский гос. технический университет, пр. Мира, 11, 644050 Омск
root@omgtu.omsk.su