Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.984

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

И. М. Гусейнов, А. А. Набиев, Р. Т. Пашаев

Аннотация: На конечном интервале рассматривается уравнение Штурма — Лиувилля, потенциал которого полиномиально зависит от комплексного параметра. Доказывается существование операторов преобразования с условиями в нуле для рассматриваемого уравнения. При изучении свойств ядер операторов преобразования используются дробные интегралы и производные Римана Лиувилля. С помощью операторов преобразования и свойств их ядер получаются асимптотические формулы для собственных значений для краевой задачи, порождаемой указанными уравнениями и простыми краевыми условиями. Библиогр. 7.

Рассмотрим на интервале $0 < x < a$ $(a < \infty)$ дифференциальное уравнение

$$-y'' + (q_0(x) + \lambda q_1(x) + \dots + \lambda^{n-1} q_{n-1}(x))y = \lambda^{2n} y, \tag{I}$$

где λ — комплексный параметр, $y = y(x,\lambda)$ — неизвестная функция.

Обозначим через $y_j(x,\lambda)$, $j = 1, 2$, решение уравнения (I) удовлетворящее начальным условиям

$$y_j(0,\lambda) = 1, \quad y_j'(0,\lambda) = (-1)^{j+1} i\lambda^n. \tag{II}$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

(а) $q_k(x)$, $k = \overline{0, n-1}$, — непрерывные на $[0,a]$ комплекснозначные функции;

(б) функции $q_k'(x)$, $k = \overline{1, n-1}$, непрерывны на $[0,a]$.

В п. 1 доказывается, что при условиях (а) и (б) существует оператор преобразования (общее определение операторов преобразования имеется в [1, 2]), который переводит решение $\exp\{(-1)^{j+1} i\lambda^n x\}$ простого уравнения $y'' + \lambda^{2n} y = 0$ в решение уравнения (I) с начальными условиями (II). Для исследования свойств ядра оператора преобразования использованы интегралы и производные Римана — Лиувилля дробного порядка. Заметим, что при $n = 1$ операторы преобразования изучены в работах [3, 4]. Также следует отметить, что операторы преобразования для уравнения (I) с условиями на бесконечности полностью изучены в [5].

В п. 2 с помощью операторов преобразования и свойств их ядер получены асимптотические формулы для собственных значений краевой задачи, порождаемой уравнением (I) и краевыми условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{III}$$

При $n = 1$ краевые задачи такого рода полностью изучены в монографии [3]. Поэтому мы будем считать, что $n > 1$.

1. Операторы преобразования

Введем следующие обозначения:

$$\|\varphi\|_j(x) = \int\limits_{[(-1)^j-1]\frac{x}{2}}^{+\infty} |\varphi(x,t)|\,dt, \quad j=1,2, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$S_m = \left\{\lambda : \frac{m\pi}{n} \le \arg\lambda \le \frac{(m+1)\pi}{n}\right\}, \quad m=\overline{0,2n-1}.$$

Через $I^{\alpha}_{a,t}\varphi(x,t)$ и $D^{\alpha}_{a,t}\varphi(x,t)$ $(0<\alpha<1)$ обозначим соответственно операторы интегрирования и дифференцирования дробного порядка по t (см.[6]):

$$I^{\alpha}_{a,t}\varphi(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi(x,s)\,ds, \quad D^{\alpha}_{a,t}\varphi(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} I^{1-\alpha}_{a,t}\varphi(x,t).$$

Теорема 1.1. *При выполнении условий* (а) *и* (б) *уравнение* (I) *для всех* λ *из замкнутого множества* S_m *имеет решение* $y_j(x,\lambda)$, $j=1,2$, *удовлетворящее начальным условиям* (II), *и существуют ядра* $K_{\nu,m}(x,t)$, $\nu = j+\frac{1}{2}[(-1)^{j+m}-(-1)^j]$, *операторов преобразования такие, что*

$$y_j(x,\lambda) = e^{(-1)^{j+1}i\lambda^n x}\left\{1 + \int\limits_{[(-1)^{j+m}-1]\frac{x}{2}}^{+\infty} K_{\nu,m}(x,t)e^{(-1)^m 2i\lambda^n t}\,dt\right\}, \tag{1.1}$$

$$\|K_{\nu,m}\|_{\nu}(x) \le \exp\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})}\int\limits_0^x (x-s)^{1-\frac{k}{n}}|q_k(s)|\,ds\right\} - 1, \tag{1.2}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — *гамма функция Эйлера.*

Кроме того, ядра $K_{j,m}(x,t)$ обладают следующими свойствами:

1) на интервале $([(-1)^j-1]\frac{x}{2};+\infty)$ существуют суммируемые по t производные $D_xK_{j,m}(x,t)$, $D^{\frac{1}{n}}_{[(-1)^j-1]\frac{x}{2},t}K_{j,m}(x,t), \ldots, \left(D^{\frac{1}{n}}_{[(-1)^j-1]\frac{x}{2},t}\right)^n K_{j,m}(x,t)$, причем

$$\|D_xK_{j,m}\|_j \le \left\{\int\limits_0^x h(x,s)\,ds + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2x)^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma\left(2-\frac{k}{n}\right)}|q_k(0)|\right\}e^{\int\limits_0^x h(x,s)\,ds}, \tag{1.3}$$

где

$$h(x,s) = |q_0(s)| + 2(x-s)|q_0(s)| + +\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2x)^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})}(|q_k(s)| + |q'_k(s)|), \quad 0\le s\le x; \tag{1.4}$$

2) выполняются соотношения

$$D_x\left\{I^{1-\frac{1}{n}}_{-x,t}\left(D^{\frac{1}{n}}_{-x,t}\right)^p K_{1,m}(x,t)\Big|_{t\to-0} - I^{1-\frac{1}{n}}_{-x,t}\left(D^{\frac{1}{n}}_{-x,t}\right)^p K_{1,m}(x,t)\Big|_{t\to+0}\right\}$$
$$= \gamma^{(m)}_{n-p-1}q_{n-p-1}(x) - \sum_{k=1}^{p}\gamma^{(m)}_{n-k}q_{n-k}(x)\left[I^{1-\frac{1}{n}}_{-x,t}\left(D^{\frac{1}{n}}_{-x,t}\right)^{p-k}K_{1,m}(x,t)\Big|_{t\to-0}\right.$$
$$\left. - I^{1-\frac{1}{n}}_{-x,t}\left(D^{\frac{1}{n}}_{-x,t}\right)^{p-k}K_{1,m}(x,t)\Big|_{t\to+0}\right], \quad p=\overline{0,n-1}, \tag{1.5}$$

$$D_x\big\{I_{0,t}^{1-\frac{1}{n}}\big(D_{0,t}^{\frac{1}{n}}\big)^p K_{2,m}(x,t)\big|_{t=0}\big\} = \gamma_{n-p-1}^{(m)} q_{n-p-1}(x)$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\gamma_{n-k}^{(m)} q_{n-k}(x) I_{0,t}^{1-\frac{1}{n}}\big(D_{0,t}^{\frac{1}{n}}\big)^{p-k} K_{2,m}(x,t)\big|_{t=0}, \quad p=\overline{0,n-1}; \tag{1.6}$$

здесь

$$\gamma_k^{(m)} = 2^{-\frac{k}{n}} e^{\frac{i\pi k}{2n}(2m+1)}, \quad m=\overline{0,2n-1}, \tag{1.7}$$

в формулах (1.5) и (1.6) при $p=0$ слагаемые под знаком суммы отсутствуют;

3) функции $K_{1,m}(x,t)$ и $K_{2,m}(x,t)$ удовлетворяют уравнениям

$$D_x\big[D_x K_{1,m}(x,t) - \big(D_{-x,t}^{\frac{1}{n}}\big)^n K_{1,m}(x,t)\big] = \sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k^{(m)} q_k(x)\big(D_{-x,t}^{\frac{1}{n}}\big)^k K_{1,m}(x,t), \tag{1.8}$$

$$D_x\big[D_x K_{2,m}(x,t) - \big(D_{0,t}^{\frac{1}{n}}\big)^n K_{2,m}(x,t)\big] = \sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k^{(m)} q_k(x)\big(D_{0,t}^{\frac{1}{n}}\big)^k K_{2,m}(x,t) \tag{1.9}$$

соответственно.

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$y_j(x,\lambda) = e^{(-1)^{j+1} i\lambda^n x} + \int_0^x \frac{\sin\lambda^n(x-t)}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k q_k(t) y_j(t,\lambda)\,dt, \tag{1.10}$$

эквивалентное задаче (I), (II), и будем искать решение этого уравнения в виде (1.1). Для того чтобы функция вида (1.1) удовлетворяла уравнению (1.10), должно выполняться равенство

$$\int_{[(-1)^{j+m}-1]\frac{x}{2}}^{+\infty} K_{\nu,m}(x,t) e^{(-1)^m 2i\lambda^n t}\,dt = \int_0^x \frac{\sin\lambda^n(x-t)}{\lambda^n} e^{(-1)^j i\lambda^n(x-t)}$$
$$\times\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k q_k(t)\left\{1+\int_{[(-1)^{j+m}-1]\frac{t}{2}}^{+\infty} K_{\nu,m}(t,\xi) e^{(-1)^m 2i\lambda^n \xi}\,d\xi\right\}dt, \quad \lambda\in S_m, \tag{1.11}$$

и, наоборот, если функция $K_{\nu,m}(x,t)$ удовлетворяет равенству (1.11), то функция (1.1) является решением уравнения (1.10), значит, и решением задачи (I), (II).

Используя формулу (см. [7, с. 408])

$$\frac{1}{(\lambda^n)^{1-\frac{k}{n}}} = \frac{2^{1-\frac{k}{n}} e^{-\frac{i\pi}{2n}(n-k)(2m+1)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})}\int_0^{+\infty} s^{-\frac{k}{n}} e^{(-1)^m 2i\lambda^n s}\,ds, \quad \lambda\in S_m,\ k=\overline{0,n-1}, \tag{1.12}$$

преобразуем правую часть равенства (1.11) так, чтобы она имела вид, аналогичный левой части. Пусть сначала $j+m$, $j=1,2$, $m=\overline{0,2n-1}$, — нечетное число. Так как при $\lambda\in S_m$

$$\frac{\sin\lambda^n(x-t)}{(\lambda^n)^{1-\frac{k}{n}}} e^{(-1)^j i\lambda^n(x-t)+(-1)^m 2i\lambda^n\xi} = -\frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})}\left\{\int_\xi^{+\infty}(s-\xi)^{-\frac{k}{n}} e^{(-1)^m 2i\lambda^n s}\,ds\right.$$

$$
- \int\limits_{\xi-x+t}^{+\infty} (s-\xi+x-t)^{-\frac{k}{n}} e^{(-1)^m 2i\lambda^n s}\, ds \Bigg\}, \quad (1.13)
$$

где $\gamma_k^{(m)}$ определяется по формуле (1.7), то правая часть равенства (1.11) преобразуется к виду

$$
\int\limits_0^x \frac{\sin\lambda^n(x-t)}{\lambda^n} e^{(-1)^j i\lambda^n(x-t)} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k q_k(t) \Bigg\{ 1 + \int\limits_{-t}^{+\infty} K_{1,m}(t,\xi) e^{(-1)^m 2i\lambda^n \xi}\, d\xi \Bigg\}\, dt
$$

$$
= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \Bigg\{ \int\limits_{-x}^{0} e^{(-1)^m 2i\lambda^n t}\, dt \Bigg[\int\limits_0^{x+t} (x+t-s)^{-\frac{k}{n}} q_k(s)\, ds
$$

$$
+ \int\limits_0^x q_k(s)\, ds \int\limits_{-s}^{x+t-s} (x+t-s-\xi)^{-\frac{k}{n}} K_{1,m}(s,\xi)\, d\xi
$$

$$
- \int\limits_{-t}^{x} q_k(s)\, ds \int\limits_{-s}^{t} (t-s)^{-\frac{k}{n}} K_{1,m}(s,\xi)\, d\xi \Bigg] + \int\limits_0^{\infty} e^{(-1)^m 2i\lambda^n t}\, dt
$$

$$
\times \Bigg[\int\limits_0^x ((x+t-s)^{-\frac{k}{n}} - t^{-\frac{k}{n}}) q_k(s)\, ds - \int\limits_0^x q_k(s)\, ds \int\limits_{-s}^{t} (t-\xi)^{-\frac{k}{n}} K_{1,m}(s,\xi)\, d\xi
$$

$$
+ \int\limits_0^x q_k(s)\, ds \int\limits_{-s}^{x+t-s} (x+t-s-\xi)^{-\frac{k}{n}} K_{1,m}(s,\xi)\, d\xi \Bigg] \Bigg\}.
$$

Из этой формулы следует, что равенство (1.11) (при нечетном $j+m$) выполняется при всех значениях $\lambda \in S_m$, если функция $K_{1,m}(x,t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$
K_{1,m}(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \Bigg\{ \int\limits_0^{x+t} (x+t-s)^{-\frac{k}{n}} q_k(s)\, ds
$$

$$
- \int\limits_{-t}^{x} q_k(s)\, ds \int\limits_{-s}^{t} (t-\xi)^{-\frac{k}{n}} K_{1,m}(s,\xi)\, d\xi
$$

$$
+ \int\limits_0^x q_k(s)\, ds \int\limits_{-s}^{x+t-s} (x+t-s-\xi)^{-\frac{k}{n}} K_{1,m}(s,\xi)\, d\xi \Bigg\} \quad \text{при } -x \le t < 0,
$$

$$
K_{1,m}(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \Bigg\{ \int\limits_0^{x+t} [(x+t-s)^{-\frac{k}{n}} - t^{-\frac{k}{n}}] q_k(s)\, ds
$$

$$
+ \int\limits_0^x q_k(s)\, ds \int\limits_{-s}^{x+t-s} (x+t-s-\xi)^{-\frac{k}{n}} K_{1,m}(s,\xi)\, d\xi
$$

$$- \int_0^x q_k(s)\,ds \int_{-s}^{t} (t-\xi)^{-\frac{k}{n}} K_{1,m}(s,\xi)\,d\xi \Bigg\} \quad \text{при } t>0. \tag{1.14}$$

Аналогично при четном $j+m$, исходя из формулы

$$\frac{\sin\lambda^n(x-t)}{(\lambda^n)^{1-\frac{k}{n}}} e^{(-1)^j 2i\lambda^n(x-t)+(-1)^m 2i\lambda^n\xi}$$
$$= -\frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \Bigg\{ \int_{x-t+\xi}^{+\infty} (s-x+t-\xi)^{-\frac{k}{n}} e^{(-1)^m 2i\lambda^n s}\,ds$$
$$- \int_{\xi}^{+\infty} (s-\xi)^{-\frac{k}{n}} e^{(-1)^m 2i\lambda^n s}\,ds \Bigg\}, \tag{1.15}$$

где $\lambda\in S_m$, $k=\overline{0,n-1}$, находим, что функция $K_{2,m}(x,t)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$K_{2,m}(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \Bigg\{ t^{-\frac{k}{n}} \int_0^x q_k(s)\,ds$$
$$- \int_{\max(0,x-t)}^{x} (s-x+t)^{-\frac{k}{n}} q_k(s)\,ds + \int_0^x q_k(s)\,ds \int_0^t (t-\xi)^{-\frac{k}{n}} K_{2,m}(s,\xi)\,d\xi$$
$$- \int_{\max(0,x-t)}^{x} q_k(s)\,ds \int_0^{s-x+t} (s-x+t-\xi)^{-\frac{k}{n}} K_{2,m}(s,\xi)\,d\xi \Bigg\}, \quad 0<t<\infty. \tag{1.16}$$

Теперь остается показать, что уравнения (1.14) и (1.16) имеют решение, удовлетворяющее неравенству (1.2). С этой целью применим метод последовательных приближений, положив

$$K_{1,m}^{(0)}(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \int\limits_0^{x+t} (x+t-s)^{-\frac{k}{n}} q_k(s)\,ds, & -x\le t<0, \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \int\limits_0^{x} [(x+t-s)^{-\frac{k}{n}} - t^{-\frac{k}{n}}] q_k(s)\,ds, & t>0, \end{cases} \tag{1.17}$$

$$K_{1,m}^{(p)}(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \Bigg\{ \int_0^x q_k(s)\,ds \int_{-s}^{x+t-s} (x+t-s-\xi)^{-\frac{k}{n}} K_{1,m}^{(p-1)}(s,\xi)\,d\xi$$
$$- \int_{\max(-t,0)}^{x} q_k(s)\,ds \int_{-s}^{t} (t-\xi)^{-\frac{k}{n}} K_{1,m}^{(p-1)}(s,\xi)\,d\xi \Bigg\}, \quad -x\le t<\infty,\ p=1,2,\dots, \tag{1.18}$$

$$K_{2,m}^{(0)}(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \Bigg\{ t^{-\frac{k}{n}} \int_0^x q_k(s)\,ds$$

$$-\int\limits_{\max(x-t,0)}^{x}(s-x+t)^{-\frac{k}{n}}q_k(s)\,ds\Bigg\},\quad t>0,\qquad(1.19)$$

$$K_{2,m}^{(p)}(x,t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})}\Bigg\{\int\limits_0^x q_k(s)\,ds\int\limits_0^t(t-\xi)^{-\frac{k}{n}}K_{2,m}^{(p-1)}(s,\xi)\,d\xi$$
$$-\int\limits_{\max(x-t,0)}^{x}q_k(s)\,ds\int\limits_0^{s-x+t}(s-x+t-\xi)^{-\frac{k}{n}}K_{2,m}^{(p-1)}(s,\xi)\,d\xi\Bigg\},\quad t>0,\ p=1,2,\ldots.\qquad(1.20)$$

После несложных преобразований из (1.17)–(1.20) имеем

$$\|K_{j,m}\|_j(x)\le\frac{1}{(p+1)!}\Bigg\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})}\int\limits_0^x(x-s)^{1-\frac{k}{n}}|q_k(s)|\,ds\Bigg\}^{p+1},\quad p=0,1,2,\ldots,\qquad(1.21)$$

откуда следует, что ряды

$$K_{j,m}(x,\circ)=\sum_{p=0}^{\infty}K_{j,m}^{(p)}(x,\circ),\quad j=1,2,\qquad(1.22)$$

сходятся равномерно по $x\in[0,a]$ в пространстве $L_1([(-1)^j-1]\frac{x}{2};+\infty)$, а их сумма удовлетворяет неравенству (1.2), являясь одновременно решением уравнений (1.14) и (1.16) соответственно.

Теперь докажем свойства 1–3 функции $K_{j,m}(x,t)$.

Из формул (1.17)–(1.20) вытекает, что функции $K_{j,m}^{(p)}(x,t)$ имеют производные по x, причем

$$D_xK_{1,m}^{(0)}(x,t)=\begin{cases}q_0(x+t)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})}\Big\{(t+x)^{-\frac{k}{n}}q_k(0)\\ \qquad+\int\limits_{-t}^{x}(t+s)^{-\frac{k}{n}}q_k'(x-s)\,ds\Big\}, & -x<t<0,\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})}\Big\{[(t+x)^{-\frac{k}{n}}-t^{-\frac{k}{n}}]q_k(0)\\ \qquad+\int\limits_0^x[(t+s)^{-\frac{k}{n}}-t^{-\frac{k}{n}}]q_k'(x-s)\,ds\Big\}, & t>0,\end{cases}$$

$$D_xK_{1,m}^{(p)}(x,t)=\int\limits_0^x q_0(s)K_{1,m}^{(p-1)}(s,x+t-s)\,ds$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})}\Bigg\{\int\limits_0^x ds\int\limits_{-s}^{x+t-s}(x+t-s-\xi)^{-\frac{k}{n}}D_s[q_k(s)K_{1,m}^{(p-1)}(s,\xi)]\,d\xi$$
$$-\int\limits_{\max(0,-t)}^{x}ds\int\limits_{-s}^{t}(t-\xi)^{-\frac{k}{n}}D_s\big[q_k(s)K_{1,m}^{(p-1)}(s,\xi)\big]\,d\xi\Bigg\},\quad -x<t<\infty,\ p=1,2,\ldots.$$

Подобную формулу можно записать и для функций

$$D_x K^{(p)}_{2,m}(x,t), \quad p = 0, 1, 2, \dots.$$

Аналогично оценке для $K_{j,m}(x,t)$ из этих формул имеем

$$\begin{aligned}\left\|D_x K^{(p)}_{j,m}\right\|_j(x) \le \frac{1}{p!}\left(\int\limits_0^x h(x,s)\,ds\right)^p \\ \times\left[\int\limits_0^x h(x,s)\,ds. + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2x)^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})}|q_k(0)|\right], \quad p = 0, 1, 2, \dots, \qquad (1.22')\end{aligned}$$

где $h(x,s)$ определяется по формуле (1.4). Следовательно, ряд (1.22) можно почленно дифференцировать, и справедлива оценка (1.3).

Чтобы доказать суммируемость производных

$$\left(D^{\frac{1}{n}}_{-x,t}\right)^{p+1} K_{1,m}(x,t), \quad \left(D^{\frac{1}{n}}_{0,t}\right)^{p+1} K_{2,m}(x,t), \quad \overline{p = 0, n-1},$$

последовательно применим операторы $D^{\frac{1}{n}}_{-x,t}$ и $D^{\frac{1}{n}}_{0,t}$ к обеим частям равенств (1.14) и (1.16) соответственно и воспользуемся тем, что

$$D^{\frac{1}{n}}_{0,t}\left(\frac{t^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})}\right) = \frac{t^{-\frac{k+1}{n}}}{\Gamma(1-\frac{k+1}{n})},$$

$$\begin{aligned}D^{\frac{1}{n}}_{-x,t}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\frac{k}{n})}\int\limits_0^{x+t}(x+t-s)^{-\frac{k}{n}} q_k(s)\,ds\right) \\ = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{k+1}{n})}\int\limits_0^{x+t}(x+t-s)^{-\frac{k+1}{n}} q_k(s)\,ds,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D^{\frac{1}{n}}_{0,t}\Big(\frac{1}{\Gamma(1-\frac{k}{n})}\int\limits_{\max(0,x-t)}^{x}(s-x+t)^{-\frac{k}{n}} q_k(s)\,ds\Big) \\ = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{k+1}{n})}\int\limits_{\max(0,x-t)}^{x}(s-x+t)^{-\frac{k+1}{n}} q_k(s)\,ds\end{aligned}$$

(см. [5, с. 47]).

В результате, например, для $\left(D^{\frac{1}{n}}_{0,t}\right)^{p+1} K_{2,m}(x,t)$ имеем

$$\begin{aligned}\left(D^{\frac{1}{n}}_{0,t}\right)^{p+1} K_{2,m}(x,t) = \sum_{k=0}^{n-p-2}\frac{\gamma^{(m)}_k}{\Gamma(1-\frac{k+p+1}{n})}\Bigg\{t^{-\frac{k+p+1}{n}}\int\limits_0^x q_k(s)\,ds \\ - \int\limits_{\max(0,x-t)}^{x}(s-x+t)^{-\frac{k+p+1}{n}} q_k(s)\,ds + \int\limits_0^x q_k(s)\,ds\end{aligned}$$

$$\times\int\limits_0^t (t-\xi)^{-\frac{k+p+1}{n}} K_{2,m}(s,\xi)\,d\xi - \int\limits_{\max(0,x-t)}^{x} q_k(s)\,ds \int\limits_0^{s-x+t} (s-x+t-\xi)^{-\frac{k+p+1}{n}} K_{2,m}(s,\xi)\,d\xi\Bigg\}$$

$$+\gamma_{n-p-1}^{(m)}\Bigg\{-q_{n-p-1}^{+}(x-t)+\int\limits_0^x q_{n-p-1}(s)K_{2,m}(s,t)\,ds$$

$$-\int\limits_{\max(0,x-t)}^{x} q_{n-p-1}(s)K_{2,m}(s,s-x+t)\,ds\Bigg\}$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\gamma_{n-k}^{(m)}\int\limits_0^x q_{n-k}(s)\big(D_{0,t}^{\frac{1}{n}}\big)^{p+1-k}K_{2,m}(s,t)\,ds$$

$$-\sum_{k=1}^{p}\frac{\gamma_{n-k}^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{p-k+1}{n})}\Bigg\{t^{-\frac{p-k+1}{n}}q_{n+k}(x)$$

$$-\int\limits_{\max(0,x-t)}^{x}(s-x+t)^{-\frac{p-k+1}{n}}q_{n-k}'(s)\,ds - q_{n-k}(0)(t-x)_{-}^{-\frac{p-k+1}{n}}$$

$$+\int\limits_0^x ds\int\limits_0^t (t-\xi)^{-\frac{p-k+1}{n}}D_s[q_{n-k}(s)K_{2,m}(s,\xi)]\,d\xi$$

$$-\int\limits_{\max(0,x-t)}^{x} ds\int\limits_0^{s-x+t}(s-x+t-\xi)^{-\frac{p-k+1}{n}}D_s[q_{n-k}(s)K_{2,m}(s,\xi)]\,d\xi\Bigg\},\quad t>0, \tag{1.23}$$

где

$$q_{n-p-1}^{+}(x-t)=\begin{cases} q_{n-p-1}(x-t), & \text{если } x\ge t\\ 0, & \text{если } x<t,\end{cases}$$

$$(t-x)_{-}^{-\alpha}=\begin{cases} 0, & \text{если } t\le x,\\ (t-x)^{-\alpha}, & \text{если } t>x.\end{cases}$$

Аналогичную формулу имеем для $\big(D_{-x,t}^{\frac{1}{n}}\big)^{p+1}K_{1,m}(x,t)$, $p=\overline{0,n-1}$. Отсюда в силу (1.2), (1.3) легко получить суммируемость $\big(D_{-x,t}^{\frac{1}{n}}\big)^{\frac{1}{n}}K_{1,m}(x,t)$ на $(-x,+\infty)$ по t и $\big(D_{0,t}^{\frac{1}{n}}\big)^{p+1}K_{2,m}(x,t)$ на $(0;+\infty)$ по t ($p=\overline{0,n-1}$).

Далее, применяя операторы $I_{-x,t}^{1-\frac{1}{n}}\big(D_{-x,t}^{\frac{1}{n}}\big)^{p}$ и $I_{0,t}^{1-\frac{1}{n}}\big(D_{-0,t}^{\frac{1}{n}}\big)^{p}$, $p=\overline{0,n-1}$, к обеим частям равенств (1.14) и (1.16) соответственно, получаем, что функции $K_{j,m}(x,t)$, $j=1,2$, удовлетворяют условиям (1.5) и (1.6) соответственно. Справедливость (1.9) получается непосредственно из (1.16) и (1.23) при $p=n-1$. Аналогично устанавливается справедливость (1.8). Теорема доказана.

Замечание. Если удовлетворяются условия (а) и (б) и функция $q_n(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,a]$, то для решения уравнения

$$-y''+\sum_{k=0}^{n}\lambda^k q_k(x)y=\lambda^{2n}y,$$

удовлетворяющего начальным условиям (II), имеют место представления

$$y_j(x,\lambda) = e^{(-1)^{j+1} i\lambda^n x + (-1)^j \frac{i}{2}\int\limits_0^x q_n(t)\,dt} \left\{ 1 + \int\limits_{[(-1)^{j+m}-1]\frac{x}{2}}^{+\infty} K_{\nu,m}(x,t) e^{(-1)^m 2i\lambda^n t}\,dt \right\},$$

$$\lambda \in S_m, \quad j = 1,2; \quad \nu = j + \frac{1}{2}[(-1)^{j+m} - (-1)^j].$$

Заметим, что при $n = 1$ эти представления получены в работах [8, 9].

2. Асимптотические формулы для собственных значений

Рассмотрим краевую задачу

$$-y'' + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k q_k(x) y = \lambda^{2n} y, \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \tag{2.1}$$

где функции $q_k(x)$, $k = \overline{0, n-1}$, удовлетворяют условиям (а) и (б) из п. 1.

Теорема 2.1. *Краевая задача* (2.1) *имеет бесконечно много собственных значений, большие по модулю собственные значения могут концентрироваться только вблизи лучей* $\arg\lambda = \frac{m\pi}{n}$, $m = \overline{0, 2n-1}$, *т. е. они состоят из* $2n$ *серий и* m*-я серия удовлетворяет асимптотической формуле*

$$\lambda_{k,m} = e^{\frac{im\pi}{n}} k^{\frac{1}{n}} + \sum_{s=1}^{n} \frac{d_s^{(m)}}{k^{1+\frac{s-1}{n}}} + o\left(\frac{1}{k^{1+\frac{n-1}{n}}}\right), \quad k \to +\infty, \tag{2.2}$$

где

$$d_1^{(m)} = \frac{(-1)^m}{2\pi} \int\limits_0^\pi q_{n-1}(s)\,ds, d_s^{(m)}$$

— не зависящие от k *комплексные числа.*

Доказательство. Обозначим через $S(x,\lambda)$ решение уравнения (1) при начальных данных

$$S(0,\lambda) = 0, \quad S'(0,\lambda) = 1. \tag{2.3}$$

Легко понять, что

$$S(x,\lambda) = \frac{1}{2i\lambda^n}[y_1(x,\lambda) - y_2(x,\lambda)], \tag{2.4}$$

где $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$ — решение уравнения (1).

Нетрудно убедиться, что функция $S(\pi,\lambda)$ будет характеристической функцией краевой задачи (2.1).

Корни уравнения $S(\pi,\lambda) = 0$ будем называть собственными значениями краевой задачи. Согласно теореме 1.1 функция $S(x,\lambda)$ при $\lambda \in S_{2\nu}$, $\nu = \overline{0, n-1}$, имеет представление

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin\lambda^n x}{\lambda^n} + \frac{1}{2i\lambda^n} e^{i\lambda^n x} \int\limits_{-x}^{+\infty} K_{1,2\nu}(x,t) e^{2i\lambda^n t}\,dt$$
$$- \frac{1}{2i\lambda^n} e^{-i\lambda^n x} \int\limits_0^{+\infty} K_{2,2\nu}(x,t) e^{2i\lambda^n t}\,dt. \tag{2.5}$$

Из теоремы 1.1 также следует, что

$$\int\limits_{-x}^{+\infty} K_{1,2\nu}(x,t)e^{2i\lambda^n t}\,dt = \frac{2i\lambda^n}{\lambda}\frac{1}{2i(\lambda^n)^{1-\frac{1}{n}}}\int\limits_{-x}^{+\infty} K_{1,2\nu}(x,t)e^{-2i\lambda^n t}\,dt$$
$$= -\frac{\gamma_1^{(2\nu)}}{\lambda}\frac{2i\lambda^n}{\Gamma(1-\frac{1}{n})}\int\limits_{-x}^{\infty} K_{1,2\nu}(x,t)\,dt\int\limits_{t}^{\infty}(s-t)^{-\frac{1}{n}}e^{2i\lambda^n s}\,ds$$
$$= -\frac{\gamma_1^{(2\nu)}}{\lambda}2i\lambda^n\int\limits_{-x}^{+\infty} e^{2i\lambda^n t} I_{-x,t}^{1-\frac{1}{n}} K_{1,2\nu}(x,t)\,dt$$
$$= -\frac{\gamma_1^{(2\nu)}}{\lambda}\Bigg\{ I_{-x,t}^{1-\frac{1}{n}} K_{1,2\nu}(x,t)\big|_{t\to-0} - I_{-x,t}^{1-\frac{1}{n}} K_{1,2\nu}(x,t)\big|_{t\to+0}$$
$$-\int\limits_{-x}^{+\infty} e^{2i\lambda^n t} D_{-x,t}^{\frac{1}{n}} K_{1,2\nu}(x,t)\,dt\} = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\gamma_{k+1}^{(2\nu)}}{\lambda^{k+1}}\alpha_k^{2\nu}(x)$$
$$+\frac{\gamma_n^{(2\nu)}}{\lambda^n}\int\limits_{-x}^{+\infty} e^{2i\lambda^n t}\big(D_{-x,t}^{\frac{1}{n}}\big)^n K_{1,2\nu}(x,t)\,dt, \qquad (2.6)$$

где

$$\begin{gathered}\alpha_k^{(m)}(x) = \gamma_{n-k-1}^{(m)}\int\limits_0^x q_{n-k-1}(s)\,ds - \sum_{p=1}^{k}\gamma_{n-p}^{(m)}\int\limits_0^x q_{n-p}(s)\alpha_{k-p}^{(m)}(s)\,ds,\\ \alpha_0^{(m)}(x) = \gamma_{n-1}^{(m)}\int\limits_0^x q_{n-1}(s)\,ds, \quad k=\overline{1,n-1},\ m=\overline{0,2n-1}.\end{gathered} \qquad (2.7)$$

Легко показать, что

$$\alpha_k^{(2\nu)}(x) = e^{-\frac{2i(k+1)\nu\pi}{n}}\alpha_k^{(0)}(x). \qquad (2.8)$$

Аналогично

$$\int\limits_0^{+\infty} K_{2,2\nu}(x,t)e^{2i\lambda^n t}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\gamma_{k+1}^{(2\nu)}}{\lambda^{k+1}}\beta_k^{(2\nu)}(x) + \frac{\gamma_n^{(2\nu)}}{\lambda^n}\int\limits_0^{+\infty} e^{2i\lambda^n t}\big(D_{0,t}^{\frac{1}{n}}\big)^n K_{2,2\nu}(x,t)\,dt, \qquad (2.9)$$

где

$$\begin{gathered}\beta_k^{(m)}(x) = \gamma_{n-k-1}^{(m)}\int\limits_0^x q_{n-k-1}(s)\,ds + \sum_{p=1}^{k}\gamma_{k-p}^{(m)}\int\limits_0^x q_{n-p}(s)\beta_{k-p}^{(m)}(s)\,ds,\\ \beta_0^{(m)}(x) = \gamma_{n-1}^{(m)}\int\limits_0^x q_{n-1}(s)\,ds, \quad m=\overline{0,2n-1},\ k=\overline{1,n-1}.\end{gathered} \qquad (2.10)$$

Также выполняется равенство

$$\beta_k^{(2\nu)}(x) = e^{-\frac{2i(k+1)}{n}\nu\pi}\beta_k^{(0)}(x).$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
S(x,\lambda) = \frac{\sin\lambda^n x}{\lambda^n} - \frac{1}{2i\lambda^n} e^{i\lambda^n x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_{k+1}}{\lambda^{k+1}} \alpha_k(x) - \frac{1}{2i\lambda^n} e^{-i\lambda^n x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_{k+1}}{\lambda^{k+1}} \beta_k(x) \\
+ \frac{\gamma_n}{2i\lambda^n} \frac{e^{i\lambda^n x}}{\lambda^n} \int_{-x}^{+\infty} e^{2i\lambda^n t} \big(D_{-x,t}^{\frac{1}{n}}\big)^n K_{1,2\nu}(x,t)\, dt \\
- \frac{\gamma_n}{2i\lambda^n} \frac{e^{-i\lambda^n x}}{\lambda^n} \int_{0}^{+\infty} e^{2i\lambda^n t} \big(D_{0,t}^{\frac{1}{n}}\big)^n K_{2,2\nu}(x,t)\, dt, \quad \lambda \in S_{2\nu}, \quad (2.11)
\end{aligned}
$$

где $\gamma_k = \gamma_k^{(0)}$, $\alpha_k(x) = \alpha_k^{(0)}(x)$, $\beta_k(x) = \beta_k^{(0)}(x)$.

Аналогично при $\lambda \in S_{2\gamma+1}$ имеем

$$
\begin{aligned}
S(x,\lambda) = \frac{\sin\lambda^n x}{\lambda^n} - \frac{1}{2i\lambda^n} e^{i\lambda^n x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_{k+1}}{\lambda^{k+1}} \alpha_k(x) - \frac{1}{2i\lambda^n} e^{-i\lambda^n x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_{k+1}}{\lambda^{k+1}} \beta_k(x) \\
- \frac{e^{i\lambda^n x}}{2i\lambda^n} \frac{\gamma_n}{\lambda^n} \int_{-x}^{+\infty} e^{-2i\lambda^n t} \big(D_{0,t}^{\frac{1}{n}}\big)^n K_{2,2\nu+1}(x,t)\, dt \\
- \frac{e^{-i\lambda^n x}}{2i\lambda^n} \frac{\gamma_n}{\lambda^n} \int_{0}^{+\infty} e^{-2i\lambda^n t} \big(D_{-x,t}^{\frac{1}{n}}\big)^n K_{1,2\nu+1}(x,t)\, dt. \quad (2.12)
\end{aligned}
$$

Из (2.11) и (2.12) следует, что

$$
\left| S(\pi,\lambda) - \frac{\sin\lambda^n \pi}{\lambda^n} \right| \le \frac{C}{|\lambda|^{n+1}} e^{|Jm\lambda^n \pi|}, \tag{2.13}
$$

где C — некоторая положительная постоянная.

Пусть теперь $\widetilde{S}_{0,\varepsilon} = \{\lambda : \frac{\varepsilon}{n} \le \arg\lambda \le \frac{\pi}{n} - \frac{\varepsilon}{n}\}$, где $\varepsilon > 0$ — фиксированное сколь угодное малое число $(0 < \varepsilon < \pi)$. Легко показать, что при больших $\lambda \in \widetilde{S}_{0,\varepsilon}$ справедлива оценка

$$
|\sin\lambda^n \pi| > \frac{1}{4} e^{|Jm\lambda^n \pi|}. \tag{2.14}
$$

Тогда из (2.13) следует, что

$$
\left| S(\pi,\lambda) - \frac{\sin\lambda^n \pi}{\lambda^n} \right| < \frac{4C}{|\lambda|} \left| \frac{\sin\lambda^n \pi}{\lambda^n} \right|. \tag{2.15}
$$

Выберем $R > 0$ настолько большим, что $\frac{4C}{R} < 1$. Тогда в области $\widetilde{S}_{0,\varepsilon} \cap \{\lambda : |\lambda| > R, \lambda \in S_0\}$ уравнение $S(\pi,\lambda) = 0$ не имеет корней. Следовательно, в секторе $\widetilde{S}_{0,\varepsilon}$ уравнение $S(\pi,\lambda) = 0$ может иметь не более конечного числа корней, что вытекает из теоремы единственности аналитических функций. Значит, в секторе S_0 корни уравнения $S(\pi,\lambda) = 0$ могут концентрироваться только вблизи лучей $\arg\lambda = 0$ и $\arg\lambda = \pi$ (при больших $\lambda \in S_0$). Совершенно аналогично можно показать, что при $\lambda \in \widetilde{S}_{m,\varepsilon} \cap \{\lambda \in S_m : |\lambda| > R\}$, где

$$
\widetilde{S}_{m,\varepsilon} = \left\{ \lambda : \frac{m\pi}{n} + \frac{\varepsilon}{n} \le \arg\lambda \le \frac{m+1}{n}\pi - \frac{\varepsilon}{n} \right\}, \quad m = \overline{1, 2n-1},
$$

справедлива оценка (2.15) и при $\lambda \in S_m$ большие по модулю собственные значения могут концентрироваться только вблизи лучей $\arg\lambda = \frac{m\pi}{n}$ и $\arg\lambda = \frac{m+1}{n}\pi$, $m = \overline{1, 2n-1}$.

Нетрудно показать, что при достаточно больших k на дугах $|\lambda| = \left(k + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\lambda \in S_m - \widetilde{S}_{m,\varepsilon}$ выполнена оценка

$$|\sin\lambda^n\pi| > \frac{1}{4}e^{-\pi}e^{|Jm\lambda^n\pi|}.$$

Тогда в силу оценки (2.14) при достаточно больших k на окружности $|\lambda| = \left(k + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ имеем

$$|\sin\lambda^n\pi| > \frac{1}{4}e^{-\pi}e^{|Jm\lambda^n\pi|}. \tag{2.16}$$

Поэтому ввиду неравенства (2.13) на окружности $O_k\big(|\lambda| = (k + \frac{1}{2}\big)^{\frac{1}{n}}$, где $k \geq [4Ce^{\pi}] + 1$, для регулярной функции $S(\pi, \lambda)$ справедлива оценка

$$\left|S(\pi,\lambda) - \frac{\sin\lambda^n\pi}{\lambda^n}\right| < \left|\frac{\sin\lambda^n\pi}{\lambda^n}\right|. \tag{2.17}$$

Тогда по теореме Рушье функции $S(\pi, \lambda)$ и $\frac{\sin\lambda^n\pi}{\lambda^n}$ внутри окружности имеют одинаковое число нулей. Так как число нулей функции $\frac{\sin\lambda^n\pi}{\lambda^n}$ внутри O_k равно $2nk$, нули $S(\pi, \lambda)$ состоят из $2n$ серий по k нулей в каждой серии и m-я серия концентрируется вблизи

$$\arg\lambda = \frac{m\pi}{n}, \quad m = \overline{0, 2n-1}.$$

Простыми рассуждениями легко убедиться, что внутри области

$$D^{(m)} = \{\lambda : (k - 1/2)^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| \leq (k + 1/2)^{\frac{1}{n}},\ |\arg\lambda - m\pi/n| < \varepsilon/n\},\ m = \overline{0, 2n-1},$$

функция $S(\pi, \lambda)$ имеет лишь один нуль, так как на границе $D^{(m)}$ имеет место оценка (2.17). Следовательно, внутри кольца $\left(k - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| \leq \left(k + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ функция $S(\pi, \lambda)$ имеет ровно $2n$ нулей, и эти нули принадлежат различным сериям. Таким образом, нули функции $S(\pi, \lambda)$ можно расположить в последовательность по сериям

$$\lambda_{1,m}; \lambda_{2,m}; \ldots; \lambda_{s,m}; \ldots,\ |\lambda_{j,m}| < |\lambda_{j+1,m}|.$$

Найдем асимптотику серии $\{\lambda_{k,m}\}$. Очевидно, что эта серия лежит в секторе $T_\varepsilon^{(m)} = \left\{\lambda : \left|\arg\lambda - \frac{m\pi}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{n}\right\}$. С помощью элементарных преобразований из (2.11) и (2.12) получаем

$$e^{2i\lambda^n\pi} = \frac{1 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_{k+1}}{\lambda^{k+1}}\beta_k(\pi) + o(\lambda^{-n})}{1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_{k+1}}{\lambda^{k+1}}\alpha_k(\pi)}, \quad \lambda \in T_\varepsilon^{(m)} \cap S_{2\nu}, \tag{2.18}$$

$$e^{-2i\lambda^n\pi} = \frac{1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_{k+1}}{\lambda^{k+1}}\alpha_k(\pi) + o(\lambda^{-n})}{1 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_{k+1}}{\lambda^{k+1}}\beta_k(\pi)}, \quad \lambda \in T_\varepsilon^{(m)} \cap S_{2\nu+1}. \tag{2.19}$$

Из этих равенств следует, что

$$2i\lambda^n\pi = (-1)^m 2is\pi + \ln\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\gamma_{k+1}}{\lambda^{k+1}}\beta_k(\pi)\right)$$
$$-\ln\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\gamma_{k+1}}{\lambda^{k+1}}\alpha_k(\pi)\right)+o(\lambda^{-n}),\quad \lambda=\lambda_{s,m}\in T_\varepsilon^{(m)},\ m=\overline{0,2n-1},\quad (2.20)$$

где s принимает целые положительные значения, а через ln обозначена регулярная в $T_\varepsilon^{(m)}$ ветвь логарифма, принимающая действительные значения при положительных значениях аргумента.

Далее, используя элементарные асимптотические методы, из (2.20) находим

$$\lambda_{s,m} = e^{\frac{im\pi}{n}} s^{\frac{1}{n}} + o(1/s^{1-\frac{1}{n}}),\quad \lambda_{s,m}\in T_\varepsilon^{(m)}. \quad (2.21)$$

Наконец, уточнив асимптотическую формулу (2.21) с помощью формулы

$$\lambda_{s,m} = \left[(-1)^m s + \sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{\lambda_{s,m}^k} + o\left(\frac{1}{\lambda_{s,m}^k}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

(здесь мы выбираем одну регулярную ветвь корня, принимающую положительные значения при положительных значениях аргумента), которая следует из (2.21), где d_k — некоторая постоянная, получим формулу (2.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973.
2. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма — Лиувилля и их приложения. М.: Наука, 1984.
3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.
4. *Повзнер А. Я.* О дифференциальных уравнениях типа Штурма — Лиувилля на полуоси // Мат. сб. 1948. Т. 23, № 1. С. 3–52.
5. *Гусейнов И. М.* Об одном операторе преобразования // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 2. С. 206–215.
6. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. М.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
7. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982.
8. *Jaulent M., Jean C.* On an inverse scattering problem with an energy-dependent potential // Ann. Inst. H. Poincaré. Sect. A. 1972. V. 17, N 4. P. 363–378.
9. *Гусейнов Г. Ш.* Асимптотические формулы для решений и собственных значений квадратичного пучка уравнений Штурма — Лиувилля. Баку, 1984. 12 с. (Препринт/Ин-т физики АН Азерб. ССР; № 113).

Статья поступила 26 ноября 1998 г.

г. Баку
Бакинский гос. университет, факультет прикладной математики и кибернетики, ул. З. Халилова, 23, 370148 Баку, Азербайджан