Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.9

О ДИНАМИКЕ НЕЛИНЕЙНОГО МНОГОМЕРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ПАМЯТЬЮ

О. Ю. Динариев

Аннотация: Рассмотрен нелинейный многомерный осциллятор с релаксацией. Динамика системы определяется нелинейным интегродифференциальным уравнением с релаксационным ядром общего вида. Доказаны теоремы существования и единственности, и найден ряд априорных оценок решения. Доказано, что при определенных условиях на релаксационное ядро решение сходится к одной из критических точек эффективного потенциала. Библиогр. 4.

1. Постановка задачи

Будем использовать обычное определение скалярного произведения и нормы в $\mathbb{C}^N$: $z = (z, z') = \sum_{i=1}^{N} z_i^* z_i'$, $|z| = (z, z)^{1/2}$, где $(z) = (z_i)$, $(z') = (z_i')$, $i = 1, \dots, N$. Звездочка здесь и ниже обозначает операцию комплексного сопряжения применительно к числам, векторам и матрицам; символ $+$ будет обозначать операцию сопряжения матриц. Естественно, что для действительных матриц операция сопряжения совпадает с обычным транспонированием. Норма $|\cdot|$ в $\mathbb{C}^N$ позволяет обычным образом ввести норму $\|\cdot\|$ для линейных отображений в $\mathbb{C}^N$.

Рассмотрим динамическую механическую систему, состояние которой в любой момент времени t характеризуется действительным вектором $x = (x_i(t))$, $i = 1, \dots, N$. Пусть эволюция системы при $t \geq 0$ описывается интегродифференциальным уравнением вида

$$\partial_t^2 x(t) + \nabla V(x(t)) + F(x(t), \partial_t x(t)) - \int_0^t K(t - t_1) x(t_1)\, dt_1 = f(t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \partial_t x(0) = y_0. \tag{2}$$

В уравнении (1) $V = V(x)$ — действительная функция, $\nabla V(x) = (\partial V / \partial x_i)$ — градиент этой функции, $F = F(x, y) = (F_i(x, y))$ — действительная векторфункция действительных векторных аргументов $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$, $K = K(t) = (K_{ij}(t))$, $i, j = 1, \dots, N$, — действительная матричная функция времени t.

Ниже будем всегда предполагать, что выполнены условия $V \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $F \in C^1_{\mathbb{R}^N}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$,

$$(y, F(x, y)) = 0. \tag{3}$$

Из последнего равенства следует, в частности, что

$$F(x, 0) = 0. \tag{4}$$

Кроме того, будем всегда предполагать, что матричная функция $K = K(t)$ интегрируема по Лебегу. Таким образом, сходится интеграл

$$k_0 = \int\limits_0^{+\infty} \|K(t)\| \, dt. \tag{5}$$

Настоящая работа посвящена исследованию вопроса существования и асимптотики решений задачи (1), (2) при $t \to +\infty$. Задача (1), (2) возникает для механических и физических систем с памятью (в другой терминологии, с наследственностью или с нелокальностью по времени). В частности, уравнение (1) описывает колебания для вязкоупругих материалов. Функцию $K = K(t)$ обычно называют релаксационным ядром.

Задачу (1), (2) можно переписать в других формах.

Доопределим $x = x(t)$ при $-1 \leq t \leq 0$ некоторой известной дважды непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей условиям

$$x(0) = x_0, \quad \partial_t x(0) = y_0, \quad x(-1) = 0, \quad \partial_t x(-1) = 0,$$

и выполним сдвиг по времени $\tau = t + 1$. Тогда новая функция $x_* = x_*(\tau) = x(t)$ удовлетворяет при $\tau \geq 0$ интегродифференциальному уравнению

$$\partial_\tau^2 x_*(\tau) + \nabla V(x_*(\tau)) + F(x_*(\tau), \partial_\tau x_*(\tau)) - \int\limits_0^\tau K(\tau - \tau_1) x_*(\tau_1) d\tau_1 = f_*(\tau)$$

с нулевыми начальными условиями, причем функция $f_*(\tau)$ тривиальным образом конструируется по известным зависимостям $x(t)$ при $-1 \leq t \leq 0$ и $f(t)$ при $t \geq 0$:

$$f_*(\tau) = \partial_\tau^2 x(\tau-1) + \nabla V(x(\tau-1)) + F(x(\tau-1), \partial_\tau x(\tau-1)) - \int\limits_0^\tau K(\tau-\tau_1) x(\tau_1-1) \, d\tau_1$$

при $0 \leq \tau \leq 1$,

$$f_*(\tau) = f(\tau - 1) - \int\limits_0^1 K(\tau - \tau_1) x(\tau_1 - 1) \, d\tau_1$$

при $1 \leq \tau$.

Следовательно, задача (1), (2) формально сводится к задаче (1) с нулевыми начальными условиями. Переход к нулевым начальным условиям иногда бывает удобен; с другой стороны, этот переход может быть невыгоден, если свойства функции $f_*(t)$ хуже, чем у $f(t)$. Для дальнейшего важно, что если функция $f(t)$ интегрируема по Лебегу, то таким же свойством обладает функция $f_*(\tau)$.

В силу сходимости интеграла (5) можно определить вспомогательное ядро

$$K_1(t) = \int\limits_t^{+\infty} K(t_1) \, dt_1. \tag{6}$$

Пусть выполнено равенство

$$K(t)^+ = K(t). \tag{7}$$

Тогда уравнение (1) преобразуется к уравнению

$$\partial_t^2 x_(t) + \nabla V_1(x(t)) + F(x(t), \partial_t x(t)) - \int\limits_0^t K_1(t - t_1)\partial_t x(t_1)\, dt_1 = f_1(t), \qquad (8)$$

где $V_1(x) = V(x) - 2^{-1}(x, K_1(0)x)$, $f_1(t) = f(t) - K_1(t)x_0$. Следовательно, вместо задачи (1), (2) можно рассматривать задачу (1), (8).

В вопросах, касающихся существования решения на всей полуоси $t \geq 0$, будем считать выполненным условие

$$V_1(x) \to +\infty \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty. \qquad (9)$$

Удобно доопределить ядра при отрицательных временах: $K(t) = 0$, $K_1(t) = 0$ при $t < 0$.

Если функция $g = g(t)$ является обобщенной функцией (или распределением) умеренного роста, то определено преобразование Фурье этой функции [1], которое будет обозначаться через

$$g_F(\Omega) = \int e^{-i\Omega t} g(t)\, dt.$$

В силу сходимости интеграла (5) определен фурье-образ релаксационного ядра $K_F(\Omega)$.

Пусть сходится интеграл

$$k_1 = \int\limits_0^{+\infty} t\|K(t)\|\, dt < +\infty. \qquad (10)$$

Тогда с учетом очевидного неравенства

$$\int\limits_0^{+\infty} \|K_1(t)\|\, dt \leq \int\limits_0^{+\infty} t\|K(t)\|\, dt$$

определен фурье-образ вспомогательного ядра $K_{1F}(\Omega)$.

По теореме Пэли — Винера функции $K_F(\Omega)$, $K_{1F}(\Omega)$ являются аналитическими в нижней комплексной полуплоскости $\operatorname{Im}\Omega \leq 0$.

Для действительных значений Ω введем обозначение

$$\varrho(\Omega) = i\Omega^{-1}(K_F(\Omega) - K_F(\Omega)^+).$$

В точке $\Omega = 0$ матричная функция $\varrho(\Omega)$ доопределяется по непрерывности при условии (7) и сходимости интеграла (10). Очевидно, что выполняется равенство $\varrho(\Omega)^+ = \varrho(\Omega)$.

Лемма 1. *Пусть выполнено равенство* (7) *и сходится интеграл* (10). *Тогда имеет место равенство*

$$\varrho(\Omega) = K_{1F}(\Omega) + K_{1F}(\Omega)^+. \qquad (11)$$

Доказательство. Используя формулу (6) для вычисления $K_{1F}(\Omega)$ и меняя порядок интегрирования, получаем

$$K_{1F}(\Omega) = i\Omega^{-1}(K_F(\Omega) - K_F(0)).$$

Теперь равенство (11) проверяется непосредственно. Доказательство закончено.

2. Теоремы существования и единственности

Начнем с доказательства локальной теоремы существования и единственности задачи (1), (2). Эта теорема вытекает из результатов, полученных для уравнений более общего вида на основе теории Шаудера [2]. Однако ниже тем не менее будет приведено доказательство, являющееся простым обобщением метода Пикара — Линделефа [3]. Этот метод позволяет явно указать временной интервал, на котором существует решение.

Введем обозначения: $y = y(t) = \partial_t x(t)$, W — матрица вторых производных от функции V, F_1 — матрица первых производных от вектор-функции F по x, F_2 — матрица первых производных от F по y,

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad |z| = \max(|x|, |y|),$$

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} y \\ -\nabla V(x) - F(x, y) \end{pmatrix}, \quad \Psi(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда задача (1), (2) может быть переписана в виде

$$z(t) = z_0 + \int_0^t w(t_1)\, dt_1, \quad w(t) = \Phi(z(t)) + \int_0^t \Psi(t - t_1) z(t_1)\, dt_1 + \kappa(t). \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть вектор-функция $f = f(t)$ интегрируема по Лебегу и ограничена на интервале $[0, T_0]$, $b_0 = \sup\limits_{0<t<T_0}(|f(t)|)$. Для произвольного положительного числа a положим*

$$b_1 = \max_{|z - z_0| \le 0}(|\nabla V(x)| + |F(x, y)|), \quad b = (b_0 + b_1 + |y_0| + a + (|x_0| + a)k).$$

Тогда на интервале $[0, T_1]$, где $T_1 = \min(T_0, ab^{-1})$, в классе непрерывных функций существует единственное решение задачи (12).

Доказательство. Будем строить решение при $0 \le t \le T_1$ методом последовательных приближений в пространстве непрерывных функций:

$$z_0(t) = z_0, \quad z_n(t) = z_0 + \int_0^t w_n(t_1)\, dt_1, \quad n > 0,$$

$$w_n(t) = \Phi(z_{n-1}(t)) + \int_0^t \Psi(t - t_1) z_{n-1}(t_1)\, dt_1 + \kappa(t).$$

Несложно доказать по индукции, что $\|z_n(t) - z_0\| \le a$. Далее, пусть

$$c = \max_{|z - z_0| \le a}(\|W(x)\| + \|F_1(x, y)\| + \|F_2(x, y)\|).$$

По индукции доказывается неравенство

$$\|z_n(t) - z_{n-1}(t)\| \le b(c + k)^{n-1} t^n (n!)^{-1}.$$

Поэтому последовательность

$$z_n(t) = z_0 + \sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})$$

равномерно сходится к некоторой непрерывной вектор-функции $z = z(t)$. В силу этого и принятых предположений последовательность функций $w_n = w_n(t)$ равномерно сходится к функции

$$\Phi(z(t)) + \int_0^t \Psi(t - t_1) z(t_1)\, dt_1 + \kappa(t).$$

Отсюда и из определения последовательности $z_n(t)$ следует, что функция $z = z(t)$ является решением задачи (12).

Для доказательства единственности предположим, что $z_* = z_*(t)$ — некоторое решение задачи (12) на интервале $[0, T_1]$. По индукции доказывается неравенство

$$\|z_n(t) - z_*(t)\| \le b(c + k)^{n-1} t^n (n!)^{-1}.$$

Отсюда следует, что $z(t) = z_*(t)$. Доказательство теоремы закончено.

Замечание 1. В дальнейшем будем понимать под решением задачи (1), (2) (или (8), (2)) решение в смысле теоремы 1. Вообще говоря, теорема 1 обеспечивает локальное существование и единственность решения задачи (12) в классе C^1. Однако если функция $f = f(t)$ кусочно-непрерывная, то функция $y = y(t) = \partial_t x(t)$ кусочно-дифференцируемая.

Определение 1. Для произвольного решения задачи (8), (2) определим функцию энергии

$$E(t) = V_1(x(t)) + 2^{-1}(y(t), y(t)) + \int_0^t dt_1 \int_0^t (y(t_1), K_1(t_1 - t_2) y(t_2))\, dt_2.$$

Определение 2. Для вспомогательного ядра $K_1 = K_1(t)$ определим в пространстве $L^2_{\mathbb{C}^N}(\mathbb{R}^N)$ билинейную форму

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t_1), K_1(t_1 - t_2) v(t_2))\, dt_2.$$

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условия* (7), (9), (10) *и* $\rho = \rho(\Omega)$ *— неотрицательная матричная функция. Пусть* $f = f(t)$ *— кусочно-непрерывная ограниченная функция на интервале* $[0, T]$, $x = x(t)$ *— решение задачи* (1), (2) *на том же интервале. Тогда при* $0 \le t \le T$ *справедливо неравенство*

$$E(t) \le A_0 + \tau^2 + A_1^{1/2} \tau,$$

где $A_0 = V_1(x_0) + 2^{-1}(y_0, y_0)$, $A_1 = A_0 - \inf(V_1)$,

$$\tau = \int_0^t (|f(t_1)| + \|K_1(t_1)\| \cdot |x_0|)\, dt_1. \tag{13}$$

Доказательство. Умножая обе части уравнения (8) скалярно на функцию $y = y(t) = \partial_t x(t)$ и интегрируя на интервале $[0, t]$, получаем

$$E(t) = A_0 + \int_0^t (y(t_1), f(t_1) + K_1(t_1) x_0)\, dt_1. \tag{14}$$

Определим для произвольного положительного $s \le T$ функцию $y_s = y_s(t) \in L^2_{C^N}(R)$ следующим образом: $y_s(t) = y(t)$ на интервале $0 \le t \le s$, $y_s(t) = 0$ вне этого интервала. Тогда

$$E(t) = V_1(x(t)) + 2^{-1}(y(t), y(t)) + \langle y_t, y_t \rangle$$
$$= V_1(x(t)) + 2^{-1}(y(t), y(t)) + (4\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y_{tF}(\Omega), \rho(\Omega) y_{tF}(\Omega))\, d\Omega. \quad (15)$$

Обозначим

$$Z(t) = \int\limits_0^t (|f(t_1)| + \|K_1(t_1)\| \cdot |x_0|)|y(t_1)|\, dt_1.$$

Из (13), (15) и неравенства $\rho(\Omega) \ge 0$ получаем неравенство $2^{-1}(\partial_t Z)^2 \le A_1 + Z$. Отсюда метод дифференциальных неравенств [3] дает оценку

$$Z \le \tau^2 + A_1^{1/2}\tau. \quad (16)$$

Утверждение леммы получается, если с помощью (16) оценить правую часть выражения (14). Доказательство закончено.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* (7), (9), (10) *и* $\rho = \rho(\Omega)$ — *неотрицательная матричная функция. Пусть* $f = f(t)$ — *кусочно-непрерывная и локально ограниченная функция при* $t \ge 0$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет единственное решение на полуоси* $t \ge 0$.

Доказательство. Применяя теорему 1 к последовательности задач

$$\partial_t z(t) = \Phi(z(t)) + \int\limits_{t_0}^t \Psi(t - t_1) z(t_1)\, dt_1 + \kappa_1(t),$$

$$\kappa_1(t) = \kappa(t) + \int\limits_0^{t_0} \Psi(t - t_1) z(t_1)\, dt_1,$$

можно осуществлять локальное продолжение решения. Требуется установить, что такая процедура позволяет получить решение для всех времен.

Пусть решение построено для интервала $0 \le t < T$. Из леммы 2 вытекает, что для некоторой положительной величины A на всем этом временном интервале справедливо неравенство $|z(t)| \le A$.

Определим величины

$$b_0 = Ak + \sup_{0 \le t \le 2T}(|f(t)|), \quad b_1 = \max_{|z - z_0| \le A+1}(|\nabla V(x)| + |F(x, y)|),$$

$$b = b_0 + b_1 + (A + 1)(k + 1).$$

Из теоремы 1 вытекает, что для всех точек интервала $0 \le t < T$ можно продолжить решение вперед на интервал с длиной $\Delta t = \min(T, b^{-1})$. Отсюда следует, что решение продолжается на всю полуось $t \ge 0$. Доказательство закончено.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия* (7), (9), (10) *и* $\rho = \rho(\Omega)$ — *неотрицательная матричная функция,* $f = f(t)$ — *кусочно-непрерывная локально ограниченная функция при* $t \geq 0$. *Пусть, кроме того, существуют такие непрерывные неотрицательные функции действительного аргумента* $\varphi = \varphi(\Omega)$, $\psi = \psi(\Omega)$, *что выполнены условия*

$$\varphi(\Omega)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^N} \leq \rho(\Omega), \quad |f_F(\Omega)| \leq \psi(\Omega)\varphi(\Omega), \tag{17}$$

$$\int \varphi(\Omega)\psi(\Omega)^2\,d\Omega < +\infty. \tag{18}$$

Тогда задача (1) *с нулевыми начальными условиями имеет единственное решение на полуоси* $t \geq 0$. *Для этого решения функции* $|x(t)|, |\partial_t x(t)|$ *ограничены.*

Доказательство. Существование и единственность решения следуют из теоремы 2. Используя соотношения (14), (15), как и в лемме 2, получаем равенство

$$V_1(x(t)) + 2^{-1}(y(t), y(t)) + (4\pi)^{-1}\int (y_{tF}(\Omega), \rho(\Omega)y_{tF}(\Omega))\,d\Omega = A_0 + \int_0^t (y(t_1), f(t_1))\,dt_1.$$

Отсюда и из (17) вытекает неравенство

$$V_1(x(t)) + 2^{-1}(y(t), y(t)) + (4\pi)^{-1}\int \varphi(\Omega)|y_{tF}(\Omega)|^2\,d\Omega \leq A_0 + (2\pi)^{-1}\int |y_{tF}(\Omega)|\psi(\Omega)\varphi(\Omega)\,d\Omega.$$

Теперь арифметическими преобразованиями несложно получить, что

$$V_1(x(t)) + 2^{-1}(y(t), y(t)) + (4\pi)^{-1}\int \varphi(\Omega)(|y_{tF}(\Omega)| - \psi(\Omega))^2\,d\Omega \leq A_0 + (4\pi)^{-1}\int \psi(\Omega)^2\varphi(\Omega)\,d\Omega,$$

откуда с учетом (9), (18) и произвольности t следует утверждение теоремы. Доказательство закончено.

Выберем некоторую действительную неубывающую функцию $\mu = \mu(t)$ из класса $C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющую дополнительным условиям: $\mu(t) = 0$ при $t < 0$, $\mu(t) = 1$ при $t > 1$. Пусть выполнены условия теоремы 2 и, следовательно, задача (1) с нулевыми начальными условиями имеет единственное решение $x = x(t)$ при $t \geq 0$. Доопределим функции $x = x(t)$ и $f = f(t)$ при $t < 0$: $x(t) = 0$, $f(t) = \nabla V(0)$.

Фиксируем некоторое положительное число T и введем обозначения $x_1 = x(T)$, $y_1 = y(T)$, $v_1 = v(T)$. Определим вспомогательную функцию

$$u_T = u_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ (x_1 + y_1(t-T) + 2^{-1}v_1(t-T)^2)\mu(T-t+1) & \text{при } T < t. \end{cases}$$

Очевидно, что она принадлежит классу $C^1_{\mathbb{R}^N}$ и обращается в нуль вне интервала $[0, T+1]$. Кроме того, производная $v_T = v_T(t) = \partial_t u_T(t)$ кусочно-дифференцируема. Функция $u_T = u_T(t)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению для $t \in \mathbb{R}$

$$\partial_t^2 u_T(t) + \nabla V(u_T(t)) + F(u_T(t), \partial_t u_T(t)) - \int_0^t K(t-t_1)u_T(t_1)\,dt_1 = f_T(t) + f(t), \tag{19}$$

где вспомогательная функция $f_T = f_T(t)$ определена равенствами

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < T, \\ \partial_t^2 u_T(t) + \nabla V(u_T(t)) + F(u_T(t), \partial_t u_T(t)) & \\ \qquad - \int\limits_0^t K(t-t_1) u_T(t_1)\, dt_1 - f(t) & \text{при } T \le t. \end{cases}$$

Функция $f_T = f_T(t)$ кусочно-непрерывна и локально ограничена.

Определим линейный оператор Γ, действующий из пространства $H^1_{\mathbb{R}^N}(\mathbb{R})$ в пространство $H^{-1}_{\mathbb{R}^N}(\mathbb{R})$ (определение пространств Харди $H^{\alpha}_{\mathbb{R}^N}(\mathbb{R})$ см. в [1]):

$$(\Gamma v)(t)) = -\partial_t^2 v(t) - W(u_T(t))v(t) - F_1(u_T(t), v_T(t))v(t) - F_2(u_T(t), v_T(t))\partial_t v(t) + \int\limits_0^t K(t-t_1) v(t_1)\, dt_1.$$

Из (19) следует, что функция $v_T = v_T(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(\Gamma v_T)(t) = -\partial_t (f(t) + f_T(t)). \tag{20}$$

Лемма 3. *Предположим, что выполнены условия* (7), (9), (10). *Пусть* $f = f(t)$, $f \in L^1_{\mathbb{R}^N}(\mathbb{R})$, *— кусочно-непрерывная ограниченная функция. Кроме того, пусть при действительных* Ω *выполнено неравенство*

$$\rho(\Omega) \ge \varphi(\Omega)\, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N}, \tag{21}$$

где $\varphi = \varphi(\Omega)$ *— некоторая непрерывная положительная функция. Тогда для решения задачи* (1) $x = x(t)$ *с нулевыми начальными условиями сходятся следующие интегралы:*

$$\int\limits_0^{+\infty} |\partial_t x(t)|^2\, dt < +\infty, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \left|\partial_t^2 x(t)\right|^2 dt < +\infty. \tag{22}$$

Доказательство. Используя лемму 2 и ограниченность τ, получаем, что функции $x = x(t)$ и $y = \partial_t x(t)$ ограничены. Отсюда и из уравнения (1) выводим, что функция $\partial_t^2 x(t)$ также ограничена. Тем самым

$$\int\limits_0^{T+1} |f_T(t)|\, dt < C_0. \tag{23}$$

Здесь и ниже C_n — величины, не зависящие от параметра T.

Из ограниченности $\partial_t x(t)$ и $\partial_t^2 x(t)$, интегрируемости $f(t)$ и соотношения (23) следует неравенство

$$\int\limits_0^{T+1} (\partial_t v_T(t), (f(t) + f_T(t)))\, dt < C_1. \tag{24}$$

Из (24), (20) получаем

$$
\begin{aligned}
C_1 > \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (v_T(t), (\Gamma v_T)(t))\, dt \\
= (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\Omega^2 |v_{TF}(\Omega)|^2 + 2^{-1}(v_{TF}(\Omega), (K_F(\Omega) + K_F(\Omega)^+) v_{TF}(\Omega))\, d\Omega \\
- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (v_T(t), (W(u_T(t)) + F_1(u_T(t), v_T(t))) v_T(t))\, dt \\
- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (v_T(t), F_2(u_T(t), v_T(t)) \partial_t v_T(t))\, dt. \quad (25)
\end{aligned}
$$

Справедливы неравенства

$$
2^{-1}(K_F(\Omega) + K_F(\Omega)^+) > C_2 \,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N}, \quad \|W(u_T(t))\| < C_3,
$$
$$
\|F_1(u_T(t), v_T(t))\| < C_4, \quad \|F_2(u_T(t), v_T(t))\| < C_5,
$$

при подстановке которых в (25) получается соотношение

$$
2\pi C_1 > \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\Omega^2 + C_2 - C_3 - C_4 - C_5|\Omega|) |v_{TF}(\Omega)|^2\, d\Omega. \quad (26)
$$

Выберем некоторую положительную величину Ω_0 так, что при $|\Omega| > \Omega_0$

$$
(\Omega^2 + C_2 - C_3 - C_4 - C_5|\Omega|) > C_6 > 0.
$$

Тогда из (26) следует неравенство

$$
2\pi C_1 > C_6 \int\limits_{|\Omega|>\Omega_0} |v_{TF}(\Omega)|^2\, d\Omega + (C_2 - C_3 - C_4 - C_5|\Omega_0|) \int\limits_{|\Omega|<\Omega_0} |v_{TF}(\Omega)|^2\, d\Omega. \quad (27)
$$

Применим лемму 2 к уравнению (19). В качестве одного из следствий получаем неравенство

$$
\int (v_{TF}(\Omega), \rho(\Omega) v_{TF}(\Omega))\, d\Omega < C_7. \quad (28)
$$

Обозначим $\delta = \min\limits_{|\Omega| \le \Omega_0} (\varphi(\Omega)) > 0$. Тогда из (21), (28) вытекает неравенство

$$
\int\limits_{|\Omega|<\Omega_0} |v_{TF}(\Omega)|^2\, d\Omega < \delta^{-1} C_7.
$$

Совмещая его с (27), приходим к соотношению

$$
\int |v_{TF}(\Omega)|^2\, d\Omega < C_8. \quad (29)
$$

Обратимся опять к неравенству (26). С учетом (29) получаем

$$
\int \Omega^2 |v_{TF}(\Omega)|^2\, d\Omega < C_9. \quad (30)
$$

Из (29), (30) выводим соответственно

$$\int_0^T |\partial_t x(t)|^2\,dt < (2\pi)^{-1}C_8, \quad \int_0^T \left|\partial_t^2 x(t)\right|^2 dt < (2\pi)^{-1}C_9.$$

Поскольку правые части в этих неравенствах не зависят от параметра T, интегралы (22) сходятся. Лемма 3 доказана.

3. Асимптотика при больших временах

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы* 3. *Предположим, что потенциал* $V_1 = V_1(x)$ *имеет конечное число критических точек. Тогда решение задачи* (1), (2) *демонстрирует следующее поведение при* $t \to +\infty$: $x = x(t)$ *сходится к одной из критических точек потенциала* $V_1 = V_1(x)$, $y = \partial_t x(t)$ *сходится к нулю.*

Доказательство. Рассуждения, приведенные в п. 1, позволяют без ограничения общности свести задачу к случаю нулевых начальных условий. Поэтому применима лемма 3, и интегралы (22) сходятся.

По лемме 2 решение $x = x(t)$ и его производная ограничены при всех t некоторыми положительными величинами: $|x(t)| \le A_0$, $|\partial_t x(t)| \le A_1$. Тогда из уравнения (1) следует, что вторая производная тоже ограничена: $\left|\partial_t^2 x(t)\right| \le A_2$.

Предположим, что $\partial_t x(t)$ не сходится к нулю. Тогда можно найти бесконечную последовательность таких моментов времени t_k, $k = 1, 2, \dots,$ что а) $t_{k+1} > t_k + 1$; б) $|\partial_t x(t_k)| \ge C_0 > 0$. Выберем такое ε, что выполняются неравенства $1 > \varepsilon > 0$, $C_0 - \varepsilon A_2 \ge 2^{-1}C_0$. Тогда на интервале $t_k \le t \le t_k + \varepsilon$ справедливо неравенство $|\partial_t x(t)| \ge 2^{-1}C_0$, что противоречит сходимости первого интеграла (22). Итак, сходимость $\partial_t x(t)$ к нулю доказана.

Введем обозначения

$$A_3 = \max_{|x|\le A_0} \|W(x) - K_1(0)\|, \quad A_4 = \max_{|x|\le A_0, |y|\le A_1} \|F_1(x,y)\|,$$

$$A_5 = \max_{|x|\le A_0, |y|\le A_1} \|F_2(x,y)\|.$$

Перепишем уравнение (8) в эквивалентной форме:

$$\partial_t^2 x(t) = \nabla V_1(x(t)) + F(x(t), \partial_t x(t)) + \kappa_*(t), \tag{31}$$

$$\kappa_*(t) = \kappa_1(t) + \kappa_2(t), \quad \kappa_1(t) = \int_0^t K_1(t - t_1)\partial_t x(t_1)\,dt_1, \quad \kappa_2(t) = f(t).$$

Напомним, что интегрируемая ограниченная функция является интегрируемой в квадрате. Поэтому функция $\kappa_2(t)$ принадлежит $L^2_{\mathbb{R}^N}[0, +\infty)$. Функция $\kappa_1(t)$ принадлежит $L^2_{\mathbb{R}^N}[0, +\infty)$ как свертка функций с аналогичным свойством.

Предположим, что утверждение о сходимости $x = x(t)$ к одной из критических точек потенциала $V_1 = V_1(x)$ неверно. Тогда существуют некоторая положительная постоянная C_1 и бесконечная последовательность таких моментов времени τ_k, что а) $\tau_{k+1} > \tau_k + 1$; б) $|\nabla V_1(x_k)| \ge C_1$, $x_k = x(\tau_k)$. В силу (4) и сходимости $\partial_t x(t)$ к нулю при этом можно считать выполненным неравенство

$$|F(x_k, \partial_t x(\tau_k))| \le 2^{-1}C_1.$$

Выберем достаточно малую положительную величину $\varepsilon < 1$ так, чтобы при этом выполнялось неравенство

$$2^{-1}C_1 - \varepsilon((A_3 + A_4)A_1 + A_5A_2) \geq C_2 > 0.$$

Тогда на временном интервале $\tau_k \leq t \leq \tau_k + \varepsilon$ имеем

$$|\nabla V_1(x(t)) + F(x(t), \partial_t x(t))| \geq C_2 > 0.$$

Отсюда и из уравнения (31) получаем оценку

$$\int\limits_{t_k}^{t_k+\varepsilon} \left|\partial_t^2 x(t)\right|^2 dt \geq 2^{-1}C_2\varepsilon - \int\limits_{t_k}^{t_k+\varepsilon} |\kappa_*(t)|^2\, dt.$$

Поскольку сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |\kappa_*(t)|^2\, dt$, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |\partial_t^2 x(t)|^2\, dt$ расходится. Это, в свою очередь, противоречит результатам леммы 3. Доказательство теоремы 3 закончено.

4. Заключение

Практическая значимость задачи (2), (8) состоит в том, что она обобщает многие классические механические системы в случае, когда имеет место наследственность. Существует тесная связь уравнения (8) и уравнения для нелинейного осциллятора с трением: в самом деле, обычное уравнение для затухающего осциллятора получается из (8) при $F = 0$ с помощью формальной подстановки ядра $K_1(t) = \lambda\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Поэтому результаты настоящей статьи можно рассматривать как аналоги соответствующих результатов в теории осциллятора с трением.

Необходимо отметить, что условие неотрицательности матричной функции $\rho(\Omega)$ является аналогом условия неотрицательности коэффициента трения λ для обычного затухающего осциллятора. Это условие одновременно обеспечивает выполнение второго закона термодинамики в теории с наследственностью [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
3. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
4. *Дэй У. А.* Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974.

Статья поступила 15 января 1998 г.

г. Москва