Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5

УДК 517.9

СТРУКТУРНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ЭЙЛЕРОВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ОБЛАСТЯХ С ТРЕЩИНАМИ

Ж. Фремьё, Я. Соколовски

Аннотация: Получена структурная теорема для эйлеровой производной конфигурационного функционала, определенного на области, содержащей криволинейные трещины. Эта теорема обобщает на случай гладких областей структурную теорему, данную в монографии J. Sokolowski, J. P. Zolésio «Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis» Berlin etc.: Springer-Verl., 1992. (Comput. Math.; V. 16). Даны два примера применения полученного результата к конфигурационным функционалам, определенным для граничной задачи. Ил. 6, библиогр. 11.

1. Введение

Анализ влияния конфигурации в граничных задачах в областях с трещинами важен для приложений (см. например, обзорную работу [1], где рассмотрены приложения к механике разрушения, и библиографию в ней). В [2] (см. также [3, 4]) установлены результаты в простейшем случае. Поскольку структурная теорема не была известна, в [2] использован прямой подход, который в случае функционала энергии предусматривает существование конфигурационной производной от решений эллиптических уравнений, определенных в области с трещинами. По существу, тот же подход был использован в [5] в случае односторонних условий на берегах трещины, однако похоже, что в этом случае результат о конфигурационной дифференцируемости в литературе не был отмечен. Можно отослать читателя к [6] за соответствующими результатами о конфигурационной дифференцируемости решений вариационных неравенств в гладких областях.

Задача с односторонними условиями на берегах трещины рассмотрена в [7] для скалярного уравнения и в [8] — для системы упругости, где выведена так называемая формула Райса — Черепанова. В [7, 8] показано, что утверждение о конфигурационной дифференцируемости решений вариационных неравенств не требуется для доказательства дифференцируемости функционала энергии относительно длины трещины в задачах с односторонними условиями на берегах трещины.

2. Основной результат. Структурная теорема для эйлеровой производной

Структурная теорема важна для приложений в задачах оптимизации конфигурации, потому что она позволяет получить конфигурационную дифференцируемость специального конфигурационного функционала простой проверкой условий, обычно заданных в фиксированной области, с помощью методов материальной производной.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ и Σ — часть гладкой кривой. Будем считать, что $\overline{\Sigma}$ лежит в области D. Рассмотрим область $\Omega = D \setminus \overline{\Sigma}$ с трещиной Σ. Через A и B обозначим концы $\overline{\Sigma}$. Пусть J — функционал области, конфигурационно дифференцируемый в Ω. Определение конфигурационной дифференцируемости см. в [6].

Будем использовать поле скоростей V для построения семейства областей $\Omega_t = T_t(V)(\Omega)$ с использованием техники, описанной в [6]. Не ограничивая общность, будем рассматривать задачу с автономными векторными полями. Мы докажем следующий результат о структуре эйлеровой полупроизводной $dJ(\Omega; V)$.

Теорема 2.1 (структурная теорема). *Пусть k — неотрицательное целое число. Предположим, что отображение $\mathscr{D}^k(D;\mathbb{R}^2) \ni V \mapsto dJ(\Omega;V) \in \mathbb{R}$ линейно и непрерывно. Тогда существуют два вещественных числа α_A и α_B и линейная форма ϕ, непрерывные на $C^k(\overline{\Sigma})$ ($\phi \in (C^k(\overline{\Sigma}))'$), такие, что*

$$dJ(\Omega;V) = \alpha_A(V.\tau)(A) + \alpha_B(V.\tau)(B) + \phi(V.n) \quad \forall V \in \mathscr{D}^k(D;\mathbb{R}^2),$$

где $V.\tau$, $V.n$ — касательная и нормальная составляющие поля V на $\overline{\Sigma}$ соответственно (рис. 1).

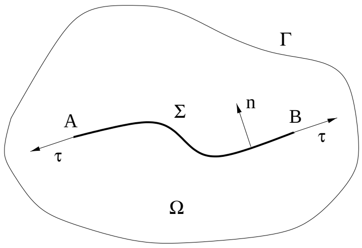

Рис. 1. Область Ω с криволинейной трещиной Σ.

Доказательство. Можно считать, что Σ такова:

$$\Sigma = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1,\ x_2 = 0\}, \tag{1}$$

в противном случае воспользуемся подходящей заменой переменных. Нам потребуется вид касательного множества

$$T_{\overline{\Sigma}}(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \liminf_{h \to = 0^+} \frac{d_{\overline{\Sigma}}(x + hv)}{h} = 0 \right\}.$$

Найдем $T_{\overline{\Sigma}}(x)$ для $x \in \overline{\Sigma}$.

Случай 1. $x = (x_1, x_2) \in \Sigma$, т. е. $0 < x_1 < 1$, $x_2 = 0$. В этом случае нормаль $n(x)$ к $\overline{\Sigma}$ в точке $x \in \Sigma$ определена и, кроме того, $T_{\overline{\Sigma}}(x) = \mathscr{T}_x(\overline{\Sigma})$ совпадает с касательным пространством $\overline{\Sigma}$ в точке x, так что $V(x) \in T_{\overline{\Sigma}}(x)$ тогда и только тогда, когда $V(x).n(x) = 0$.

Случай 2. $x = A = (0, 0)$ (рис. 2).

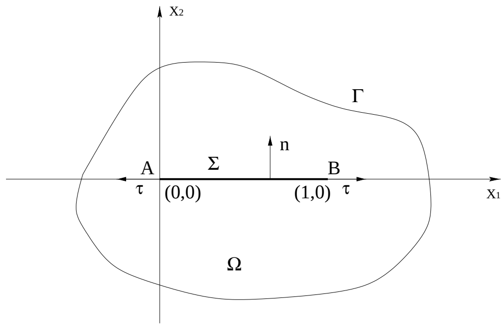

Рис. 2. Область Ω.

Имеем

$$T_{\overline{\Sigma}}(x) = T_{\overline{\Sigma}}(A) = \left\{ v = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \liminf_{h \to 0^+} \frac{d_{\overline{\Sigma}}(x + hv)}{h} = 0 \right\},$$

$$d_{\overline{\Sigma}}(x + hv) = \begin{cases} h\|v\|, & \text{если} X_1 \le 0, \\ h|X_2|, & \text{если} X_1 \ge 0, \end{cases}$$

так что

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{d_{\overline{\Sigma}}(x + hv)}{h} = \begin{cases} \|v\|, & \text{если} X_1 \le 0, \\ |X_2|, & \text{если} X_1 \ge 0, \end{cases}$$

и тем самым (рис. 3)

$$T_{\overline{\Sigma}}((0,0)) = T_{\overline{\Sigma}}(A) = \{v = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid X_2 = 0, \ X_1 \ge 0\}. \tag{2}$$

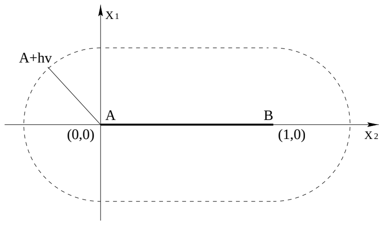

Рис. 3. Вычисление $T_{\overline{\Sigma}}(A)$.

Случай 3. $x = B = (1,0)$. В этом случае, так как $x = A = (0,0)$, имеем

$$T_{\overline{\Sigma}}((1,0)) = T_{\overline{\Sigma}}(B) = \{v = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid X_2 = 0, \ X_1 \le 0\}. \tag{3}$$

Для любого $x \in \Sigma$ множество $T_{\overline{\Sigma}}(x)$ является векторным пространством, так что $-T_{\overline{\Sigma}}(x) = T_{\overline{\Sigma}}(x)$. С другой стороны,

$$\{T_{\overline{\Sigma}}(A)\} \cap \{-T_{\overline{\Sigma}}(A)\} = \{T_{\overline{\Sigma}}(B)\} \cap \{-T_{\overline{\Sigma}}(B)\} = \{(0,0)\}, \tag{4}$$

и согласно теореме Нагумо [9] или условиях двойной допустимости [10, 11] и соотношениям (2)–(4) если поле $V \in \mathscr{D}^k(D; \mathbb{R}^2)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$V(x).n(x) = 0 \quad \forall x \in \Sigma, \quad V(A) = V(B) = (0,0), \tag{5}$$

то $\overline{\Sigma}$ глобально инвариантно относительно соответствующего преобразования $T_t(V)$. Внешняя граница $\Gamma = \partial D$ также инвариантна относительно $T_t(V)$, поскольку носитель поля V содержится в D. Таким образом, граница области $\Omega = D \setminus \overline{\Sigma}$, т. е. $\partial\Omega = \Gamma \cup \overline{\Sigma}$, глобально инвариантна относительно преобразования $T_t(V)$. Следовательно, $\Omega_t = T_t(V)(\Omega) = \Omega$. Отсюда

$$dJ(\Omega; V) = 0 \tag{6}$$

для любого векторного поля, удовлетворяющего (5). Нетрудно видеть, что можно распространить понятие касательного и нормального векторов на точки A и B из $\overline{\Omega}$. Условия (5) могут быть переформулированы так:

$$V(x).n(x) = 0 \quad \forall x \in \overline{\Sigma}, \quad (V.\tau)(A) = (V.\tau)(B) = 0. \tag{7}$$

Итак, для $V \in \mathscr{D}^k(D, \mathbb{R}^2)$, удовлетворяющего условиям (7), имеем $dJ(\Omega; V) = 0$. Тем самым естественно рассмотреть множество

$$F(\Omega) = \{V \in \mathscr{D}^k(D, \mathbb{R}^2) \mid V.n = 0 \text{ на } \overline{\Sigma},\ (V.\tau)(A) = (V.\tau)(B) = 0\}. \tag{8}$$

Согласно предположению о линейности и непрерывности отображения $V \mapsto dJ(\Omega; V)$ из $\mathscr{D}^k(D, \mathbb{R}^2)$ в $\mathbb{R}$ множество $F(\Omega)$, определенное равенством (8), содержится в его ядре. Следовательно, справедлива

Лемма 2.2. *Отображение*

$$\psi : \mathscr{D}^k(D, \mathbb{R}^2)/F(\Omega) \to C^k(\overline{\Sigma}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \{V\} \mapsto (V.n, (V.\tau)(A), (V.\tau)(B))$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Линейное отображение

$$\psi : \{V\} \mapsto (V.n, (V.\tau)(A), (V.\tau)(B))$$

определено, поскольку если $V_1 - V_2 \in F(\Omega)$, то

$$(V_1 - V_2).n = 0 \quad \text{на } \overline{\Sigma}, \quad ((V_1 - V_2).\tau)(A) = ((V_1 - V_2).\tau)(B) = 0.$$

Пусть $\{V\} \in \mathscr{D}^k(D, \mathbb{R}^2)/F(\Omega)$ таково, что $\psi(\{V\}) = 0$, т. е.

$$V.n = 0 \quad \text{на } \overline{\Sigma}, \quad (V.\tau)(A) = (V.\tau)(B) = 0,$$

так что $V \in F(\Omega)$ и $\{V\} = \{0\}$. Следовательно, ψ взаимно однозначно.

Покажем, что ψ накрывающее. Пусть $(v, v_1, v_2) \in C^k(\overline{\Sigma}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Надо найти $V \in \mathscr{D}^k(D, \mathbb{R}^2)$ такое, что $\psi(\{V\}) = (v, v_1, v_2)$. Для любого $v \in C^k(\overline{\Sigma}) = C^k([0,1])$ по определению пространства $C^k([0,1])$ существует $\tilde{v} \in C^k(\mathbb{R})$ такое, что $\tilde{v}_{|_{[0,1]}} = v$. Тем самым определено $\widetilde{V_2}$ посредством равенства

$$\widetilde{V_2}(x_1, x_2) = \tilde{v}(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Очевидно, что $\widetilde{V_2} \in C^k(\mathbb{R}^2)$. Пусть $\theta \in \mathscr{D}(D, \mathbb{R}) = C_0^\infty(D, \mathbb{R})$ таково, что $\theta \equiv 1$ в достаточно малой окрестности $\overline{\Sigma}$. Положим

$$V_2(x_1, x_2) = \theta(x_1, x_2)\widetilde{V_2}(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Определим функцию

$$\mu(x_1) = (1 - x_1)v_1 + x_1 v_2. \tag{11}$$

Тогда $\mu \in C^k(\mathbb{R})$. Таким же образом введем

$$\widetilde{V_1}(x_1, x_2) = \mu(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Ясно, что $\widetilde{V_1} \in C^k(\mathbb{R}^2)$. Определим V_1 формулой

$$V_1(x_1, x_2) = \theta(x_1, x_2)\widetilde{V_1}(x_1, x_2). \tag{13}$$

Пусть V — векторное поле с компонентами V_1, V_2, где V_1, V_2 заданы соотношениями (9)–(13), так что

$$V = (V_1, V_2) \in \mathscr{D}^k(D, \mathbb{R}^2).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} V_1(x_1, x_2) &= \theta(x_1, x_2)\widetilde{V_1}(x_1, x_2) = \widetilde{V_1}(x_1, x_2) \quad \text{на } \overline{\Sigma} \\ &= \mu(x_1) \ = \ (1 - x_1)v_1 + x_1 v_2. \end{aligned}$$

Следовательно, $(V.\tau)(A) = \mu(0) = v_1$, $(V.\tau)(B) = \mu(1) = v_2$, и по построению

$$\begin{aligned} V_2(x_1, x_2) &= \theta(x_1, x_2)\widetilde{V_2}(x_1, x_2) = \widetilde{V_2}(x_1, x_2) \quad \text{на } \overline{\Sigma} \\ &= \tilde{v}(x_1) \ = \ v(x_1), \end{aligned}$$

т. е. $V.n = v$ on $\overline{\Sigma}$. Мы определили $V \in \mathscr{D}^k(D, \mathbb{R}^2)$ так, что $\psi(\{V\}) = (v, v_1, v_2)$. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Существует линейное непрерывное отображение*

$$\Phi : C^k(\overline{\Sigma}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

такое, что для любого векторного поля $V \in \mathscr{D}^k(D, \mathbb{R}^2)$

$$dJ(\Omega; V) = \Phi(V.n, (V.\tau)(A), (V.\tau)(B)).$$

Доказательство. Можно определить Φ по формуле

$$\Phi(\{V\}) = dJ(\Omega; V). \tag{14}$$

В самом деле, если $\{V'\} = \{V\}$, т. е. $V' \in \{V\}$, то $V' - V \in F(\Omega)$. Так как $F(\Omega)$ содержится в ядре $dJ(\Omega; \cdot)$, имеем

$$dJ(\Omega; V - V') = 0.$$

Полупроизводная Эйлера $dJ(\Omega; .)$ линейна по предположению, поэтому

$$dJ(\Omega; V) = dJ(\Omega; V'). \tag{15}$$

Соотношение (15) позволяет определить Φ. Действительно, из леммы 2.2 и соотношения $\mathscr{D}^k(D, \mathbb{R}^2)/F(\Omega) \simeq C^k(\overline{\Sigma}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ вытекает, что

$$\{V\} = (V.n, (V.\tau)(A), (V.\tau)(B)), \tag{16}$$

значит,

$$dJ(\Omega; V) = \Phi(\{V\}) = \Phi(V.n, (V.\tau)(A), (V.\tau)(B)). \tag{17}$$

Более того, $dJ(\Omega; \cdot)$ линейно и непрерывно, откуда следует, что Φ линейно и непрерывно.

Теперь мы можем завершить доказательство структурной теоремы. В самом деле, существует линейное отображение Φ, непрерывное из $C^k(\overline{\Sigma}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, такое, что

$$dJ(\Omega; V) = \Phi(V.n, (V.\tau)(A), (V.\tau)(B)) \quad \forall V \in \mathscr{D}^k(D, \mathbb{R}^2)$$

с $\Phi \in (C^k(\overline{\Sigma}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})' = (C^k(\overline{\Sigma}))' \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Поэтому существуют вещественные α_A, α_B и линейная форма ϕ, непрерывная на $C^k(\overline{\Sigma})$, такие, что

$$dJ(\Omega; V) = \phi(V.n) + \alpha_A (V.\tau)(A) + \alpha_B (V.\tau)(B) \quad \forall V \in \mathscr{D}^k(D, \mathbb{R}^2). \tag{18}$$

Структурная теорема доказана.

3. Применения структурной теоремы

Мы рассмотрим два примера, демонстрирующие использование структурной теоремы для конфигурационных функционалов, определенных на областях с трещинами. Результаты о формуле Гриффитса в случае односторонних краевых условий на берегах трещины можно найти в [2, 5].

3.1. Нелинейная граничная задача. Применим структурную теорему в случае функционала энергии для нелинейной граничной задачи. Поскольку сингулярная часть решения в этом случае неизвестна (см. [3]), мы не можем найти коэффициенты α_A, α_B в доказанной формуле.

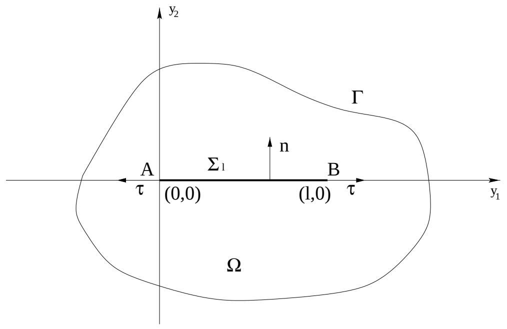

Рис. 4. Область Ω с трещиной Σ_l.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — открытое ограниченное множество с гладкой границей Γ. Пусть Σ_l — множество $\{(y_1, y_2) \mid 0 < y_1 < l,\ y_2 = 0\}$, A и B — его вершины. Будем считать, что это множество принадлежит области D при достаточно малом $l > 0$. Область с трещиной обозначим через $\Omega = D \setminus \overline{\Sigma_l}$ (рис. 4).

Рассмотрим функционал

$$I(\varphi) = \int\limits_{\Omega} F(\nabla\varphi(y))\,dy, \tag{19}$$

где $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ удовлетворяет описанным ниже условиям.

Пусть $\mathscr{W}$ — подпространство в $H^1(\Omega)$, состоящее из функций, следы которых на Γ обращаются в нуль: $\mathscr{W} = \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi|_\Gamma = 0\} = H^1_\Gamma(\Omega)$. Можно показать существование и единственность решения следующей задачи минимизации:

$$\text{найти } u \in \mathscr{W} \text{ такое, что } I(u) = \inf_{v \in \mathscr{W}} I(v). \tag{20}$$

Пусть $\theta_1, \theta_2 \in C_0^\infty(D) = \mathscr{D}(D)$. Рассмотрим преобразование (см. [8]), определенное так:

$$y_1 = x_1 - \delta\theta_1(x_1, x_2), \quad y_2 = x_2 - \delta\theta_2(x_1, x_2) \quad (\delta > 0). \tag{21}$$

Координаты точки в открытых множествах Ω, Ω_δ обозначаются через $(y_1, y_2) \in \Omega$, $(x_1, x_2) \in \Omega_\delta$ соответственно. Обозначим через V векторное поле с компонентами $\theta_1, \theta_2, V \in (\mathscr{D}(D))^2$. Якобиан преобразования (21) равен

$$q_\delta = 1 - \delta(\theta_{1,x_1} + \theta_{2,x_2}) + \delta^2(\theta_{1=,x_1}\theta_{2,x_2} - \theta_{1,x_2}\theta_{2,x_1}) = 1 - \delta \operatorname{div} V + \delta^2 \det(DV).$$

Для достаточно малого δ имеем $q_\delta > 0$, так что преобразование (21) взаимно однозначно. Обозначим $y = y(x, \delta)$, $x = x(y, \delta)$. Пусть Ω_δ — образ Ω при преобразовании (21). Поскольку $\theta_1, \theta_2 \in \mathscr{D}(D)$, Γ инвариантно относительно (21).

Обозначим $\mathscr{W}_\delta = H^1_\Gamma(\Omega_\delta)$. Можно показать существование и единственность $u^\delta \in \mathscr{W}_\delta$ такого, что

$$I_\delta(u^\delta) = \inf_{w \in \mathscr{W}_\delta} I_\delta(w), \quad \text{где } I_\delta(\psi) = \int\limits_{\Omega_\delta} F(\nabla\psi(x))\, dx \ \forall \psi \in \mathscr{W}_\delta.$$

Положим

$$J(\Omega) = I(u) = \int\limits_{\Omega} F(\nabla u(y))\, dy, \quad J(\Omega_\delta) = I_\delta(u^\delta) = \int\limits_{\Omega_\delta} F(\nabla u^\delta(x))\, dx.$$

Для применения структурной теоремы необходима конфигурационная дифференцируемость функционала $J(\Omega)$ в Ω, что устанавливается доказательством существования следующего предела:

$$dJ(\Omega; V) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta}, \tag{22}$$

который линеен и непрерывен относительно $V = (\theta_1, \theta_2)$.

Конфигурационная дифференцируемость функционала $J(\Omega)$ получается при следующих условиях.

Теорема 3.1.1. *Предположим, что*

(i) $F \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ *выпукла и липшицева,* DF *липшицева и строго монотонна.*

(ii) I *и* I_δ — *коэрцитивные строго выпуклые функционалы.*

Тогда

• *существует единственное* $u \in \mathscr{W}$ *такое, что*

$$I(u) = \inf_{v \in \mathscr{W}} I(v),$$

и, кроме того, u *удовлетворяет соотношению*

$$\int\limits_{\Omega} \langle DF(\nabla u), \nabla\varphi \rangle\, dy = 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{W},$$

• *существует единственное* $u^\delta \in \mathscr{W}_\delta$ *такое, что*

$$I_\delta(u^\delta) = \inf_{w \in \mathscr{W}_\delta} I_\delta(w),$$

и u^δ *удовлетворяет соотношению*

$$\int\limits_{\Omega_\delta} \langle DF(\nabla u^\delta), \nabla\psi \rangle\, dx = 0 \quad \forall \psi \in \mathscr{W}_\delta,$$

• J *конфигурационно дифференцируем в* Ω, *и*

$$dJ(\Omega; V) = \int\limits_{\Omega} \langle DF(\nabla u), B \cdot \nabla u \rangle\, dy + \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} V F(\nabla u)\, dy,$$

где $B = -\begin{pmatrix} \theta_{1,y_1} & \theta_{2,y_1} \\ \theta_{1,y_2} & \theta_{2,y_2} \end{pmatrix}$.

Доказательство первых двух свойств стандартно и поэтому опускается. Докажем только конфигурационную дифференцируемость функционала J в Ω. Введем следующие обозначения:

(i) для матрицы-функции $A : \Omega \to \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ через A^T обозначим транспонированное отображение, определяемое равенством $(A^T)(y) = (A(y))^T$ $\forall y \in \Omega$, где $(A(y))^T$ — транспонированная к $A(y)$ матрица;

(ii) $\|A\|_\infty = \sup\limits_{y\in\Omega} \sup\limits_{i,j=1,2} |A_{ij}(y)|$ — L^∞-норма матрицы-функции A.

Доказательство разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Существует константа C, не зависящая от δ, такая, что $\|u^\delta\|_{\mathscr{W}_\delta} \le C$. При наших предположениях DF строго монотонна, т. е. существует $\gamma > 0$ такое, что $\gamma|p-q|^2 \le \langle DF(p) - DF(q), p-q\rangle$ для всех $(p,q) \in (\mathbb{R}^2)^2$. Для $p = \nabla u^\delta$ и $q = 0$ имеем

$$\gamma|\nabla u^\delta|^2 \le \langle DF(\nabla u^\delta) - DF(0), \nabla u^\delta\rangle.$$

Интегрирование по Ω_δ приводит к неравенству

$$\gamma \int\limits_{\Omega_\delta} |\nabla u^\delta|^2\,dx \le \int\limits_{\Omega_\delta} \langle DF(\nabla u^\delta) - DF(0), \nabla u^\delta\rangle\,dx.$$

Принимая во внимание, что $\int\limits_{\Omega_\delta} \langle DF(\nabla u^\delta), \nabla u^\delta\rangle\,dx = 0$ для пробной функции $\psi = u^\delta$, имеем

$$\gamma\|u^\delta\|^2_{\mathscr{W}_\delta} \le -\int\limits_{\Omega_\delta} \langle DF(0), \nabla u^\delta\rangle\,dx \le \int\limits_{\Omega_\delta} |DF(0)||\nabla u^\delta|\,dx = \int\limits_{\Omega_\delta} \frac{|DF(0)|}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\gamma}|\nabla u^\delta|\,dx,$$

поэтому

$$\gamma\|u^\delta\|^2_{\mathscr{W}_\delta} \le \frac{|DF(0)|^2}{2\gamma}\int\limits_{\Omega_\delta} dx + \frac{\gamma}{2}\|u^\delta\|^2_{\mathscr{W}_\delta},$$

и мы приходим к требуемой оценке нормы u^δ:

$$\|u^\delta\|_{\mathscr{W}_\delta} \le \frac{|DF(0)||D|^{1/2}}{\gamma} = C.$$

Обозначим $u^\delta(x) = u_\delta(y)$, $x = x(y,\delta)$, $u_\delta \in \mathscr{W}$. Имеем $\nabla_x u^\delta = A_\delta \cdot \nabla_y u_\delta$, где

$$A_\delta = \begin{pmatrix} 1-\delta\theta_{1,x_1} & -\delta\theta_{2,x_1} \\ -\delta\theta_{1,x_2} & 1-\delta\theta_{2,x_2}\end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\|u_\delta\|_{\mathscr{W}} \le C'$ для достаточно малого δ.

Мы установили, что

$$\|u^\delta\|^2_{\mathscr{W}_\delta} = \int\limits_{\Omega_\delta} |\nabla u^\delta(x)|^2\,dx \le C^2,$$

откуда, заменяя переменные, имеем

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta}|A_\delta \cdot \nabla u_\delta(y)|^2\,dy \le C^2.$$

Учитывая равенства $A_\delta = I + \delta B$ и $q_\delta = 1 - \delta\operatorname{div} V + \delta^2\det(DV)$, легко показать, что

$$\begin{aligned}|q_\delta - 1| &\le \delta|\operatorname{div} V| + \delta^2|\det(DV)| \\ &\le \delta\|\operatorname{div} V\|_{L^\infty(\Omega)} + \delta^2\|\det(DV)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \text{ при } \delta \to 0^+,\end{aligned}$$

а это означает равномерную на $\overline{\Omega}$ сходимость $q_\delta \to 1$ при $\delta \to 0^+$. Значит, существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $|q_\delta - 1| \leq \frac{1}{2}$ при $\delta \in (0, \varepsilon_1)$ или, что равносильно, $\frac{1}{2} \leq q_\delta \leq \frac{3}{2}$ в Ω. Используя оценку для q_δ, можно оценить L^2-норму $A_\delta \cdot \nabla u_\delta$:

$$\frac{2}{3}\int\limits_{\Omega} |A_\delta \cdot \nabla u_\delta|^2 \leq \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta}|A_\delta \cdot \nabla u_\delta(y)|^2\,dy \leq C^2,$$

т. е. $\|A_\delta \cdot \nabla u_\delta\|_{(L^2(\Omega))^2} \leq \sqrt{3/2}C$, что может быть переписано в виде

$$\|\nabla u_\delta + \delta B \cdot \nabla u_\delta\|_{(L^2(\Omega))^2} \leq \sqrt{3/2}C.$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\|\nabla u_\delta\|_{(L^2(\Omega))^2} - \delta\|B \cdot \nabla u_\delta\|_{(L^2(\Omega))^2} \leq \sqrt{3/2}C.$$

Ввиду того, что $\|B \cdot \nabla u_\delta\|_{(L^2(\Omega))^2} \leq \|B\|_\infty \|\nabla u_\delta\|_{(L^2(\Omega))^2}$, имеем $\|\nabla u_\delta\|_{(L^2(\Omega))^2}(1 - \delta\|B\|_\infty) \leq \sqrt{3/2}C$. Считая, что $\|B\|_\infty \neq 0$ (иначе $V \equiv 0$), обозначим $\varepsilon_2 = 1/(2\|B\|_\infty)$. Тогда можно оценить $1 - \delta\|B\|_\infty$ снизу:

$$1 - \delta\|B\|_\infty \geq \frac{1}{2} \quad \text{при } \delta \in (0, \varepsilon_2).$$

Для любого $\delta \in (0, \varepsilon)$, $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, имеем

$$\frac{1}{2}\|\nabla u_\delta\|_{(L^2(\Omega))^2} \leq \sqrt{3/2}C,$$

а это означает, что

$$\|\nabla u_\delta\|_{(L^2(\Omega))^2} = \|u_\delta\|_{\mathscr{W}} \leq \sqrt{6}C = C',$$

поэтому существует $C' \geq 0$ такое, что

$$\|u_\delta\|_{\mathscr{W}} \leq C' \quad \text{для достаточно малого } \delta. \tag{23}$$

Шаг 2. $u_\delta \to u$ в $\mathscr{W}$ при $\delta \to 0^+$. Заменяя переменные, получаем

$$\int\limits_{\Omega} \langle DF(A_\delta \cdot \nabla u_\delta), A_\delta \cdot \nabla\varphi\rangle \frac{dy}{q_\delta} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{W}.$$

Согласно предположениям DF строго монотонна:

$$\gamma|p - q|^2 \leq \langle DF(p) - DF(q), p - q\rangle \quad \forall (p, q) \in (\mathbb{R}^2)^2.$$

Используя это неравенство с $p = \nabla u$ и $q = \nabla u_\delta$, имеем

$$\gamma|\nabla u - \nabla u_\delta|^2 \leq \langle DF(\nabla u) - DF(\nabla u_\delta), \nabla u - \nabla u_\delta\rangle.$$

Интегрирование по Ω приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}\gamma\|u - u_\delta\|^2_{\mathscr{W}} &\leq \int\limits_{\Omega} \langle DF(\nabla u) - DF(\nabla u_\delta), \nabla u - \nabla u_\delta\rangle \\ &\leq \int\limits_{\Omega} \langle DF(\nabla u), \nabla u\rangle - \int\limits_{\Omega} \langle DF(\nabla u), \nabla u_\delta\rangle + \int\limits_{\Omega} \langle DF(\nabla u_\delta), \nabla u_\delta - \nabla u\rangle \\ &\leq \int\limits_{\Omega} \langle DF(\nabla u_\delta), \nabla u_\delta - \nabla u\rangle.\end{aligned}$$

Применяя вариационное уравнение для u_δ, получаем

$$\int\limits_\Omega \frac{1}{q_\delta}\langle DF(A_\delta \cdot \nabla u_\delta), A_\delta \cdot \nabla u\rangle = 0 = \int\limits_\Omega \frac{1}{q_\delta}\langle DF(A_\delta \cdot \nabla u_\delta), A_\delta \cdot \nabla u_\delta\rangle,$$

что приводит к равенству

$$\int\limits_\Omega \frac{1}{q_\delta}\langle DF(A_\delta \cdot \nabla u_\delta), A_\delta \cdot (\nabla u - \nabla u_\delta)\rangle = 0.$$

Перепишем его в виде

$$\int\limits_\Omega \frac{1}{q_\delta}\big\langle A_\delta^T \cdot DF(A_\delta \cdot \nabla u_\delta), \nabla u - \nabla u_\delta\big\rangle = 0,$$

позволяющем оценить норму $u - u_\delta$:

$$\begin{aligned}\gamma\|u-u_\delta\|^2_{\mathscr{W}} &\le \int\limits_\Omega \left\langle DF(\nabla u_\delta) - \frac{1}{q_\delta}A_\delta^T \cdot DF(A_\delta \cdot \nabla u_\delta), \nabla u_\delta - \nabla u\right\rangle dy \\ &\le \int\limits_\Omega \langle \mathscr{F}_\delta(\nabla u_\delta), \nabla u_\delta - \nabla u\rangle\, dy \le \|\mathscr{F}_\delta(\nabla u_\delta)\|_{(L^2(\Omega))^2}\|u-u_\delta\|_{\mathscr{W}},\end{aligned}$$

где $\mathscr{F}_\delta(v) = DF(v) - \frac{1}{q_\delta}A_\delta^T \cdot DF(A_\delta \cdot v)$. L^2-норма $\mathscr{F}_\delta(v)$ может быть оценена следующим образом:

$$\begin{aligned}|\mathscr{F}_\delta(v)| &\le \left|DF(v) - \frac{1}{q_\delta}DF(v)\right| + \left|\frac{1}{q_\delta}DF(v) - \frac{1}{q_\delta}A_\delta^T \cdot DF(v)\right| \\ &\quad + \left|\frac{1}{q_\delta}A_\delta^T \cdot DF(v) - \frac{1}{q_\delta}A_\delta^T \cdot DF(A_\delta \cdot v)\right| \le \alpha_\delta + \beta_\delta + \gamma_\delta.\end{aligned}$$

Разберемся с α_δ, β_δ, γ_δ по отдельности. Имеем

$$\begin{aligned}\alpha_\delta &= \delta|DF(v)|\left|\frac{-\operatorname{div} V + \delta\det(DV)}{q_\delta}\right| \\ &\le 2\delta|DF(v)|(\|\operatorname{div} V\|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon\|\det(DV)\|_{L^\infty(\Omega)}),\end{aligned}$$

откуда $\alpha_\delta \le C_1\delta|DF(v)|$ при $\delta \in (0,\varepsilon)$. Рассуждая аналогично для β_δ, находим

$$\beta_\delta = \frac{1}{|q_\delta|}|DF(v) - (I+\delta B)^T \cdot DF(v)| \le 2|\delta B^T \cdot DF(v)| \le 2\delta\|B^T\|_\infty|DF(v)|,$$

что приводит к оценке $\beta_\delta \le C_2\delta|DF(v)|$ для $\delta \in (0,\varepsilon)$. Наконец, для γ_δ

$$\gamma_\delta = \frac{1}{|q_\delta|}\big|A_\delta^T \cdot DF(v) - A_\delta^T \cdot DF(A_\delta \cdot v)\big| \le 2\big\|A_\delta^T\big\||DF(v) - DF(A_\delta \cdot v)|.$$

С учетом того, что

$$\big\|A_\delta^T\big\| = \|I + \delta B^T\| \le \|I\| + \varepsilon\|B^T\|_\infty \text{ при } \delta \in (0,\varepsilon),$$

получаем неравенство для γ_δ:

$$\gamma_\delta \le 2(\|I\| + \varepsilon\|B^T\|_\infty)|DF(v) - DF(A_\delta \cdot v)|.$$

Поскольку DF липшицева, $\gamma_\delta \le 2(\|I\| + \varepsilon\|B^T\|_\infty)L|v - A_\delta \cdot v|$ и $|v - A_\delta \cdot v| = |\delta B \cdot v| \le \delta\|B\|_\infty|v|$, неравенство $\gamma_\delta \le C_3\delta|v|$ получается для $\delta \in (0,\varepsilon)$.

Завершим оценку $\mathscr{F}_\delta(v)$. Имеем

$$|\mathscr{F}_\delta(v)| \le C_1\delta|DF(v)| + C_2\delta|DF(v)| + C_3\delta|v| = \delta(C_4|DF(v)| + C_3|v|).$$

Из неравенства $|DF(v)| \le |DF(0)| + L|v|$ следует, что $|\mathscr{F}_\delta(v)| \le \delta(\mu_1 + \mu_2|v|)$ и $|\mathscr{F}_\delta(v)|^2 \le \delta^2(\mu_1 + \mu_2|v|)^2 \le 2\delta^2\big(\mu_1^2 + \mu_2^2|v|^2\big)$, поэтому $|\mathscr{F}_\delta(\nabla u_\delta)|^2 \le 2\delta^2\big(\mu_1^2 + \mu_2^2|\nabla u_\delta|^2\big)$ для $v = \nabla u_\delta$. Интегрируя последнее неравенство по Ω, получаем

$$\int\limits_\Omega |\mathscr{F}_\delta(\nabla u_\delta)|^2 \le 2\delta^2\bigg(\mu_1^2|D| + \mu_2^2\int\limits_\Omega |\nabla u_\delta|^2\bigg) \le 2\delta^2\big(\mu_1^2|D| + \mu_2^2\|u_\delta\|^2_{\mathscr{W}}\big),$$

откуда приходим к оценке $\|\mathscr{F}_\delta(\nabla u_\delta)\|_{(L^2(\Omega))^2} \le \mu\delta$ для $\delta \in (0,\varepsilon)$. Поэтому

$$\gamma\|u - u_\delta\|^2_{\mathscr{W}} \le \mu\delta\|u - u_\delta\|_{\mathscr{W}} \text{ для } \delta \in (0,\varepsilon)$$

и переход к пределу

$$\|u - u_\delta\|_{\mathscr{W}} \le \frac{\mu}{\gamma}\delta \to 0 \text{ при } \delta \to 0^+$$

завершает доказательство непрерывности по δ:

$$u_\delta \to u \text{ в } \mathscr{W} \text{ при } \delta \to 0^+.$$

Шаг 3. Переход к пределу в (22). Введем следующие обозначения:

$$\pi(\Omega;\varphi) = \int\limits_\Omega F(\nabla\varphi)\,dy,\ \ \pi_\delta(\Omega;\varphi) = \int\limits_\Omega \frac{1}{q_\delta}F(A_\delta\cdot\nabla\varphi)\,dy,\ \ \pi(\Omega_\delta;\varphi) = \int\limits_{\Omega_\delta} F(\nabla\varphi)\,dx,$$

$$\pi(\Omega;u) = \min_{\varphi\in\mathscr{W}} \pi(\Omega;\varphi), \quad \pi(\Omega_\delta;u^\delta) = \min_{\varphi\in\mathscr{W}_\delta} \pi(\Omega_\delta;\varphi).$$

Заменяя переменные, получаем $\min\limits_{\varphi\in\mathscr{W}} \pi_\delta(\Omega;\varphi) = \min\limits_{\varphi\in\mathscr{W}_\delta} \pi(\Omega_\delta;\varphi)$. Обозначим $J(\Omega) = \pi(\Omega;u)$, $J(\Omega_\delta) = \pi(\Omega_\delta;u^\delta)$. Имеем

$$\frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} = \frac{\pi(\Omega_\delta;u^\delta) - \pi(\Omega;u)}{\delta} = \frac{\pi_\delta(\Omega;u_\delta) - \pi(\Omega;u)}{\delta} \le \frac{\pi_\delta(\Omega;u) - \pi(\Omega;u)}{\delta}.$$

Предельный переход в обеих частях приводит к соотношениям

$$\limsup_{\delta\to0^+}\frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} \le \liminf_{\delta\to0^+}\frac{\pi_\delta(\Omega;u) - \pi(\Omega;u)}{\delta} \le \limsup_{\delta\to0^+}\frac{\pi_\delta(\Omega;u) - \pi(\Omega;u)}{\delta}.$$

По определению функционалов энергии

$$\begin{aligned}\frac{\pi_\delta(\Omega;u) - \pi(\Omega;u)}{\delta} &= \int\limits_\Omega \frac{F(A_\delta\cdot\nabla u)\frac{1}{q_\delta} - F(\nabla u)}{\delta}\,dy\\ &= \int\limits_\Omega \frac{F(A_\delta\cdot\nabla u) - F(\nabla u)}{\delta q_\delta}\,dy + \int\limits_\Omega \frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta}F(\nabla u)\,dy\\ &= \int\limits_\Omega \frac{F(\nabla u + \delta B\cdot\nabla u) - F(\nabla u)}{\delta q_\delta}\,dy + \int\limits_\Omega \frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta}F(\nabla u)\,dy.\end{aligned}$$

При наших предположениях существует функция ξ, $0 \le \xi(y) \le \delta$, такая, что

$$\frac{F(\nabla u + \delta B\cdot\nabla u) - F(\nabla u)}{\delta} = \langle DF(\nabla u + \xi B\cdot\nabla u), B\cdot\nabla u\rangle.$$

Следовательно,

$$\frac{\pi_\delta(\Omega;u)-\pi(\Omega;u)}{\delta}=\int\limits_\Omega \frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u+\xi B\cdot\nabla u), B\cdot\nabla u\rangle\,dy+\int\limits_\Omega \frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta}F(\nabla u)\,dy,$$

и переход к пределу при $\delta\to 0^+$ в правой части осуществляется по теореме о мажорированной сходимости. Поскольку F и DF липшицевы, то

$$\int\limits_\Omega \frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u+\xi B\cdot\nabla u), B\cdot\nabla u\rangle\,dy\to\int\limits_\Omega\langle DF(\nabla u), B\cdot\nabla u\rangle\,dy,$$

$$\int\limits_\Omega \frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta}F(\nabla u)\,dy\to\int\limits_\Omega \operatorname{div}V F(\nabla u)\,dy,$$

откуда получаем, что

$$\begin{aligned}\limsup_{\delta\to0^+}\frac{\pi_\delta(\Omega;u)-\pi(\Omega;u)}{\delta}&=\lim_{\delta\to0^+}\frac{\pi_\delta(\Omega;u)-\pi(\Omega;u)}{\delta}\\&=\int\limits_\Omega\langle DF(\nabla u), B\cdot\nabla u\rangle\,dy+\int\limits_\Omega \operatorname{div}V F(\nabla u)\,dy.\end{aligned}$$

Для завершения доказательства дифференцируемости выведем оценку снизу для $\liminf$, используя следующее неравенство:

$$\frac{J(\Omega_\delta)-J(\Omega)}{\delta}=\frac{\pi(\Omega_\delta;u^\delta)-\pi(\Omega;u)}{\delta}=\frac{\pi_\delta(\Omega;u_\delta)-\pi(\Omega;u)}{\delta}\ge\frac{\pi_\delta(\Omega;u_\delta)-\pi(\Omega;u_\delta)}{\delta}.$$

Переход к пределу в обеих частях приводит в неравенству

$$\liminf_{\delta\to0^+}\frac{J(\Omega_\delta)-J(\Omega)}{\delta}\ge\liminf_{\delta\to0^+}\frac{\pi_\delta(\Omega;u_\delta)-\pi(\Omega;u_\delta)}{\delta}.$$

Вновь по определению функционалов энергии имеем

$$\begin{aligned}\frac{\pi_\delta(\Omega;u_\delta)-\pi(\Omega;u_\delta)}{\delta}&=\int\limits_\Omega\frac{F(A_\delta\cdot\nabla u_\delta)\frac{1}{q_\delta}-F(\nabla u_\delta)}{\delta}\,dy\\&=\int\limits_\Omega\frac{F(A_\delta\cdot\nabla u_\delta)-F(\nabla u_\delta)}{\delta q_\delta}\,dy+\int\limits_\Omega\frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta}F(\nabla u_\delta)\,dy.\end{aligned}$$

Используя формулу Тейлора, получаем

$$\begin{aligned}\frac{F(A_\delta\cdot\nabla u_\delta)-F(\nabla u_\delta)}{\delta}&=\frac{F(\nabla u_\delta+\delta B\cdot\nabla u_\delta)-F(\nabla u_\delta)}{\delta}\\&=\langle DF(\nabla u_\delta+\xi B\cdot\nabla u_\delta), B\cdot\nabla u_\delta\rangle\end{aligned}$$

для функции $\xi,\ 0\le\xi(y)\le h$, откуда

$$\begin{aligned}\frac{\pi_\delta(\Omega;u_\delta)-\pi(\Omega;u_\delta)}{\delta}&=\int\limits_\Omega\frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u_\delta+\xi B\cdot\nabla u_\delta), B\cdot\nabla u_\delta\rangle\,dy\\&\quad+\int\limits_\Omega\frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta}F(\nabla u_\delta)\,dy.\end{aligned}$$

Имеем следующую оценку:

$$\left|\int\limits_{\Omega} \frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta} F(\nabla u_\delta)\,dy - \int\limits_{\Omega} \frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta} F(\nabla u)\,dy\right| = \left|\int\limits_{\Omega} \frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta}(F(\nabla u_\delta) - F(\nabla u))\,dy\right| \le \int\limits_{\Omega} \left|\frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta}\right| M |\nabla u_\delta - \nabla u|\,dy.$$

Принимая во внимание неравенство

$$\left|\frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta}\right| \le 2(\|\operatorname{div} V\|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon \|\det(DV)\|_{L^\infty(\Omega)}) \text{ при } \delta \in (0,\varepsilon),$$

выводим, что

$$\left|\int\limits_{\Omega} \frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta} F(\nabla u_\delta)\,dy - \int\limits_{\Omega} \frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta} F(\nabla u)\,dy\right| \le 2M(\|\operatorname{div} V\|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon \|\det(DV)\|_{L^\infty(\Omega)}) \int\limits_{\Omega} |\nabla u_\delta - \nabla u|\,dy.$$

Из того, что $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \|u - u_\delta\|_{\mathscr{W}} = 0$, следует сходимость

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1-q_\delta}{\delta q_\delta} F(\nabla u_\delta)\,dy \to \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} V F(\nabla u)\,dy \text{ при } \delta \to 0^+.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u_\delta + \xi B\cdot\nabla u_\delta), B\cdot\nabla u_\delta\rangle\,dy &= \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u_\delta + \xi B\cdot\nabla u_\delta), B\cdot\nabla u_\delta\rangle\,dy \\
- \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u + \xi B\cdot\nabla u_\delta), B\cdot\nabla u_\delta\rangle\,dy &+ \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u + \xi B\cdot\nabla u_\delta), B\cdot\nabla u_\delta\rangle\,dy \\
- \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u + \xi B\cdot\nabla u), B\cdot\nabla u_\delta\rangle\,dy &+ \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u + \xi B\cdot\nabla u), B\cdot\nabla u_\delta\rangle\,dy \\
- \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u + \xi B\cdot\nabla u), B\cdot\nabla u\rangle\,dy &+ \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u + \xi B\cdot\nabla u), B\cdot\nabla u\rangle\,dy \\
&= A_\delta + \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u + \xi B\cdot\nabla u), B\cdot\nabla u\rangle\,dy,
\end{aligned}$$

где для последнего члена

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u + \xi B\cdot\nabla u), B\cdot\nabla u\rangle\,dy \to \int\limits_{\Omega} \langle DF(\nabla u), B\cdot\nabla u\rangle\,dy \quad \text{при } \delta \to 0^+.$$

Поскольку DF липшицева, существует константа $N \ge 0$ такая, что $|A_\delta| \le N\|u - u_\delta\|_{\mathscr{W}}$ для любого $\delta \in (0,\varepsilon)$, а это означает, что $A_\delta \to 0$ при $\delta \to 0^+$, и мы получаем сходимость

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta}\langle DF(\nabla u_\delta + \xi B\cdot\nabla u_\delta), B\cdot\nabla u_\delta\rangle\,dy \to \int\limits_{\Omega} \langle DF(\nabla u), B\cdot\nabla u\rangle\,dy \text{ при } \delta \to 0^+,$$

которая влечет равенство

$$\liminf_{\delta\to 0^+}\frac{\pi_\delta(\Omega;u_\delta)-\pi(\Omega;u_\delta)}{\delta}=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\pi_\delta(\Omega;u_\delta)-\pi(\Omega;u_\delta)}{\delta}$$
$$=\int_\Omega \langle DF(\nabla u), B\cdot\nabla u\rangle\,dy+\int_\Omega \operatorname{div} V F(\nabla u)\,dy.$$

Наконец,

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{J(\Omega_\delta)-J(\Omega)}{\delta}=\int_\Omega \langle DF(\nabla u), B\cdot\nabla u\rangle\,dy+\int_\Omega \operatorname{div} V F(\nabla u)\,dy=dJ(\Omega;V).$$

Мы показали, что конфигурационный функционал $J(\Omega)$ дифференцируем, отображение $V\mapsto dJ(\Omega;V)$ линейно и непрерывно и можно применять в этом случае структурную теорему, которая приводит к следующей формуле:

$$dJ(\Omega;V)=\alpha_A(V.\tau)(A)+\alpha_B(V.\tau)(B)+\phi(V.n)\ \forall V\in\mathscr{D}^k(D;\mathbb{R}^2),$$

где $\phi\in(C^k(\overline{\Sigma_l}))'$, $\alpha_A,\alpha_B\in\mathbb{R}$ и $k=1$.

3.2. Условия Синьорини. Пусть $D\subset\mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma=\Gamma_D\cup\Gamma_N\cup\Gamma_S$ и Σ — множество $\{(x_1,x_2)\mid 0<x_1<1,\ x_2=0\}$. Будем считать, что это множество лежит в области D. Область с трещиной Σ обозначим через $\Omega=D\setminus\overline{\Sigma}$ (рис. 5). В области Ω рассмотрим следующую граничную задачу для функции u, удовлетворяющей условиям

$$\begin{gathered}-\Delta u=f \text{ в } \Omega;\quad u=0 \text{ на } \Gamma_D;\quad \frac{\partial u}{\partial n}=\phi \text{ на } \Gamma_N;\\ \frac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ на } \Sigma^\pm;\quad u\ge 0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\ge 0,\ u\frac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ на } \Gamma_S.\end{gathered}\tag{24}$$

Здесь $f\in C^1(\overline{D})$, $\phi\in H^2(\Omega)$ — заданные функции.

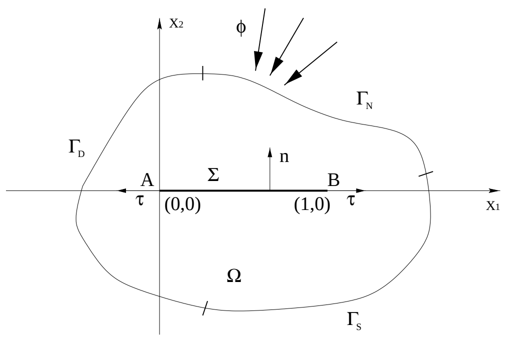

Рис. 5. Область Ω.

Соответствующая вариационная формулировка этой нелинейной задачи, а также факт существования и единственности решения хорошо известны. Коротко напомним две эквивалентные формулировки задачи (24):

$$u\in K,\quad a(u,v-u)\ge L(v-u)\quad \forall v\in K \tag{25}$$

или

$$u \in K, \quad I(u) \le I(v) \quad \forall v \in K, \tag{26}$$

где $K = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_D \text{ и } v \ge 0 \text{ на } \Gamma_S\}$ — замкнутое выпуклое множество в $H^1(\Omega)$. Здесь мы использовали следующее обозначение для $u, v \in H^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle, \quad L(v) = \int\limits_{\Omega} fv + \int\limits_{\Gamma_N} \phi v, \quad I(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v).$$

Функционал энергии для задачи (24) определяется по формуле

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int\limits_{\Omega} fu - \int\limits_{\Gamma_N} \phi u, \tag{27}$$

где u — вариационное решение (24).

Пусть $\theta_1, \theta_2 \in C_0^\infty(D)$. Будем использовать те же обозначения, что и в п. 3.1. Для $\delta > 0$ минимизационная задача определяется в Ω_δ с функционалом энергии

$$J(\Omega_\delta) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\delta} |\nabla u^\delta|^2 - \int\limits_{\Omega_\delta} fu^\delta - \int\limits_{\Gamma_N} \phi u^\delta. \tag{28}$$

Найдем вид конфигурационной производной

$$\left. \frac{dJ(\Omega_\delta)}{d\delta} \right|_{\delta=0} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} = dJ(\Omega; V), \tag{29}$$

необходимой для применения структурной теоремы. Пусть $u^\delta(x)$ — решение минимизационной задачи в Ω_δ и $u^\delta(x) = u_\delta(y)$, $x = x(y,\delta)$. Имеем

$$\nabla_x u^\delta = A_\delta \cdot \nabla_y u_\delta \tag{30}$$

с

$$A_\delta = \begin{pmatrix} 1 - \delta\theta_{1,x_1} & -\delta\theta_{2,x_1} \\ -\delta\theta_{1,x_2} & 1 - \delta\theta_{2,x_2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $A_\delta = I + \delta B$. Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_\delta} |\nabla u^\delta|^2 \, dx = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta} |A_\delta \cdot \nabla u_\delta|^2 \, dy.$$

Замена переменных дает равенство

$$\int\limits_{\Omega_\delta} fu^\delta \, dx = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q_\delta} f(x(y,\delta)) u_\delta(y) \, dy.$$

Обозначим $f^\delta(y) = \frac{f(x(y,\delta))}{q_\delta}$. Тогда

$$f'(y) = \left. \frac{df^\delta(y)}{d\delta} \right|_{\delta=0} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{f^\delta(y) - f^0(y)}{\delta}.$$

Считая y, δ независимыми переменными в (21), имеем $x = x(y,\delta)$. Дифференцируя (21) по δ, получим

$$0 = \frac{dx_1}{d\delta} - \theta_1 - \delta\theta_{1,x_1} \frac{dx_1}{d\delta} - \delta\theta_{1,x_2} \frac{dx_2}{d\delta}, \quad 0 = \frac{dx_2}{d\delta} - \theta_2 - \delta\theta_{2,x_1} \frac{dx_1}{d\delta} - \delta\theta_{2,x_2} \frac{dx_2}{d\delta},$$

так что

$$\frac{dx_1}{d\delta} = \frac{\theta_1(1-\delta\theta_{2,x_2}) + \delta\theta_2\theta_{1,x_2}}{q_\delta}, \quad \frac{dx_2}{d\delta} = \frac{\theta_2(1-\delta\theta_{1,x_1}) + \delta\theta_1\theta_{2,x_1}}{q_\delta}. \tag{31}$$

Следовательно, из (31) вытекает, что

$$\left.\frac{\partial f(x(y,\delta))}{\partial\delta}\right|_{\delta=0} = f_{x_1}\left.\frac{dx_1}{d\delta}\right|_{\delta=0} + f_{x_2}\left.\frac{dx_2}{d\delta}\right|_{\delta=0} = f_{y_1}\theta_1 + f_{y_2}\theta_2. \tag{32}$$

Теперь мы можем найти производную $f'(y)$. Действительно, согласно (32)

$$\begin{aligned} f'(y) &= \lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{f(x(y,\delta))}{q_\delta} - f(y)\right)\frac{1}{q_\delta} = \lim_{\delta\to 0^+}\frac{f(x(y,\delta)) - q_\delta f(y)}{\delta q_\delta} \\ &= \lim_{\delta\to 0^+}\frac{f(x(y,\delta)) - f(y)}{\delta} + \operatorname{div} V f(y)|_{\delta=0} = f_{y_1}\theta_1 + f_{y_2}\theta_2 + (\theta_{1y_1} + \theta_{2y_2})f, \end{aligned}$$

т. е.

$$f'(y) = \frac{\partial}{\partial y_1}(\theta_1 f) + \frac{\partial}{\partial y_2}(\theta_2 f) = \operatorname{div}(Vf). \tag{33}$$

Так как $f \in C^1(\overline{\Omega})$, можно заметить, что

$$\frac{f^\delta(y) - f^0(y)}{\delta} \to f'(y) \text{ в } L^\infty(\Omega) \tag{34}$$

при $\delta \to 0^+$. Множества допустимых функций для рассматриваемых минимизационных задач определяются так:

$$K_\delta = \{w \in H^1(\Omega_\delta) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_D \text{ и } w \geq 0 \text{ на } \Gamma_S\},$$

$$K_0 = K = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_D \text{ и } w \geq 0 \text{ на } \Gamma_S\}.$$

С учетом (21) пусть $x = x(y,\delta)$. Тогда $w^\delta(x) = w_\delta(y)$. Из включения $w^\delta \in K_\delta$ вытекает, что $w_\delta \in K_0$, и, обратно, из $w_\delta \in K_0$ — что $w^\delta \in K_\delta$. Это означает, что преобразование (21) отображает K_δ на K_0 и взаимно однозначно. Докажем непрерывность u_δ по δ:

$$\|u_\delta - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \text{ при } \delta \to 0^+.$$

Функция $u^\delta \in K_\delta$ является решением вариационного неравенства

$$\int\limits_{\Omega_\delta}\langle\nabla u^\delta, \nabla v - \nabla u^\delta\rangle \geq \int\limits_{\Omega_\delta} f(v - u^\delta) + \int\limits_{\Gamma_N}\phi(v - u^\delta) \quad \forall v \in K_\delta. \tag{35}$$

Подставив $v = 0$ в (35), получим, что $\|u^\delta\|_{H^1(\Omega_\delta)} \leq C$ равномерно по δ. Следовательно, $\|u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C$ равномерно по δ. Замена переменных в (35) дает оценку

$$\int\limits_\Omega\langle A_\delta\cdot\nabla u_\delta, A_\delta\cdot\nabla\tilde{v} - A_\delta\cdot\nabla u_\delta\rangle\frac{dy}{q_\delta} \geq \int\limits_\Omega f^\delta(\tilde{v} - u_\delta)\,dy + \int\limits_{\Gamma_N}\phi(\tilde{v} - u_\delta)\,d\sigma(y)\ \forall\tilde{v} \in K_0 \tag{36}$$

или $A_\delta = I + \delta B$. Отсюда согласно (36) имеем

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega\langle\nabla u_\delta + \delta B\cdot\nabla u_\delta, \nabla\tilde{v} + \delta B\cdot\nabla\tilde{v} - \nabla u_\delta - \delta B\cdot\nabla u_\delta\rangle\frac{dy}{q_\delta} \\ &\qquad\geq \int\limits_\Omega f^\delta(\tilde{v} - u_\delta)\,dy + \int\limits_{\Gamma_N}\phi(\tilde{v} - u_\delta)\,d\sigma(y) \quad \forall\tilde{v} \in K_0. \end{aligned} \tag{37}$$

Подставив $\tilde{v} = u$ в (37), получаем

$$\int\limits_{\Omega} \langle \nabla u_\delta, \nabla u - \nabla u_\delta \rangle \frac{dy}{q_\delta} + P(\delta, u, u_\delta) \geq \int\limits_{\Omega} f^\delta (u - u_\delta)\, dy + \int\limits_{\Gamma_N} \phi(u - u_\delta)\, d\sigma(y), \quad (38)$$

где $P(\delta, u, u_\delta) \to 0$ при $\delta \to 0^+$. Решение задачи (24) является решением вариационного неравенства

$$u \in K_0 : \quad \int\limits_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle \geq \int\limits_{\Omega} f(v - u) + \int\limits_{\Gamma_N} \phi(v - u)\, d\sigma(y) \quad \forall v \in K_0.$$

Подставив $v = u_\delta$, придем к неравенству

$$\int\limits_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla u_\delta - \nabla u \rangle \geq \int\limits_{\Omega} f(u_\delta - u) + \int\limits_{\Gamma_N} \phi(u_\delta - u). \quad (39)$$

Соотношения (38), (39) приводят к сходимости

$$\|u_\delta - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0^+. \quad (40)$$

Обозначим $J(\Omega) = \pi(\Omega; u)$, $J(\Omega_\delta) = \pi(\Omega_\delta; u^\delta)$. Имеем

$$\frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} = \frac{\pi(\Omega_\delta; u^\delta) - \pi(\Omega; u)}{\delta} = \frac{\pi_\delta(\Omega; u_\delta) - \pi(\Omega; u)}{\delta} \leq \frac{\pi_\delta(\Omega; u) - \pi(\Omega; u)}{\delta}$$

и тем самым

$$\limsup_{\delta \to 0^+} \frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} \leq \limsup_{\delta \to 0^+} \frac{\pi_\delta(\Omega; u) - \pi(\Omega; u)}{\delta}$$
$$= \int\limits_{\Omega} \langle B \cdot \nabla u, \nabla u \rangle\, dy + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} V |\nabla u|^2\, dy - \int\limits_{\Omega} f' u\, dy. \quad (41)$$

С другой стороны,

$$\frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} = \frac{\pi(\Omega_\delta; u^\delta) - \pi(\Omega; u)}{\delta} = \frac{\pi_\delta(\Omega; u_\delta) - \pi(\Omega; u)}{\delta}$$
$$\geq \frac{\pi_\delta(\Omega; u_\delta) - \pi(\Omega; u_\delta)}{\delta},$$

поэтому согласно (40)

$$\liminf_{\delta \to 0^+} \frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} \geq \liminf_{\delta \to 0^+} \frac{\pi_\delta(\Omega; u_\delta) - \pi(\Omega; u_\delta)}{\delta}$$
$$= \int\limits_{\Omega} \langle B \cdot \nabla u, \nabla u \rangle\, dy + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} V |\nabla u|^2\, dy - \int\limits_{\Omega} f' u\, dy. \quad (42)$$

Из (41) ввиду (42) следует, что

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} = \int\limits_{\Omega} \langle B \nabla u, \nabla u \rangle\, dy + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} V |\nabla u|^2\, dy - \int\limits_{\Omega} f' u\, dy. \quad (43)$$

Подстановка B и f' в (43) приводит к соотношению

$$dJ(\Omega; V) = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} ((\theta_{1y_1} - \theta_{2y_2})((u_{y_1})^2 - (u_{y_2})^2) + 2(\theta_{1y_2} + \theta_{2y_1}) u_{y_1} u_{y_2})$$
$$- \int\limits_{\Omega} ((\theta_1 f)_{y_1} + (\theta_2 f)_{y_2}) u. \quad (44)$$

Отображение $V \mapsto dJ(\Omega; V)$ линейно и непрерывно при $k = 1$. Функционал $J(\Omega)$ конфигурационно дифференцируем, и тем самым в этом случае применима структурная теорема.

Найдем соотношение между коэффициентами α_A, α_B в формуле (18) и коэффициенты сингулярности решения задачи (24).

Нас будут интересовать такие преобразования области Ω, при которых концы трещины перемещаются, в то время как остальная часть границы не изменяется. Кроме того, предположим, что концы трещины перемещаются без изменения направления, так что изменение границы определяется векторным полем

$$V(x) = (\theta_1(x), 0), \tag{45}$$

где θ_1 имеет носитель в D и $\theta_1(x) = -1$ в окрестности начала A. Согласно (44)

$$dJ(\Omega; V) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\theta_{1y_1}((u_{y_1})^2 - (u_{y_2})^2) + 2\theta_{1y_2}u_{y_1}u_{y_2}) - \int\limits_{\Omega}(\theta_1 f)_{y_1}u.$$

С другой стороны,

$$dJ(\Omega; V) = \lim_{\varepsilon\to 0}\biggl(-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}(\theta_{1y_1}((u_{y_1})^2 - (u_{y_2})^2) + 2\theta_{1y_2}u_{y_1}u_{y_2})\biggr) - \int\limits_{\Omega}(\theta_1 f)_{y_1}u,$$

где Ω_ε — подмножество Ω, определяемое числом $r > \varepsilon$ (рис. 6). Пусть γ_ε — кривая, заданная числом $r = \varepsilon$, и $0 < \theta < 2\pi$.

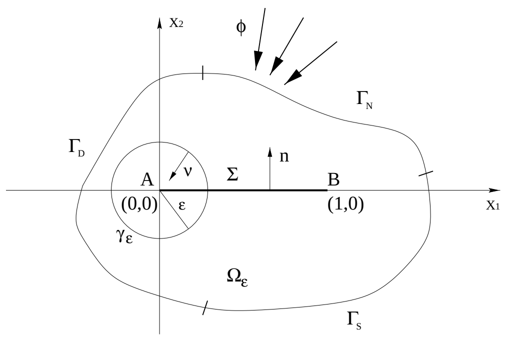

Рис. 6. Область Ω_ε.

Введем обозначение

$$A_\varepsilon = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}(\theta_{1y_1}((u_{y_1})^2 - (u_{y_2})^2) + 2\theta_{1y_2}u_{y_1}u_{y_2}). \tag{46}$$

Интегрируя по частям, получим

$$A_\varepsilon = \int\limits_{\Omega_\varepsilon}\theta_1\biggl(\frac{1}{2}((u_{y_1})^2 - (u_{y_2})^2)_{y_1} + (u_{y_1}u_{y_2})_{y_2}\biggr)\,dy$$
$$+ \int\limits_{\gamma_\varepsilon}\theta_1\biggl(\frac{1}{2}\cos\theta((u_{y_1})^2 - (u_{y_2})^2) + \sin\theta\, u_{y_1}u_{y_2}\biggr)\,d\sigma.$$

Используя это равенство для решения u:

$$\frac{1}{2}((u_{y_1})^2-(u_{y_2})^2)_{y_1}+(u_{y_1}u_{y_2})_{y_2}=u_{y_1}(u_{y_1y_1}+u_{y_2y_2})=u_{y_1}\Delta u=-fu_{y_1},$$

приходим к формуле

$$A_\varepsilon=-\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\theta_1 fu_{y_1}\,dy+\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\theta_1\left(\frac{1}{2}\cos\theta((u_{y_1})^2-(u_{y_2})^2)+\sin\theta u_{y_1}u_{y_2}\right)d\sigma. \tag{47}$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\theta_1 fu_{y_1}\,dx\to\int\limits_{\Omega}\theta_1 fu_{y_1}\,dx \text{ при } \varepsilon\to 0^+.$$

Пусть

$$B_\varepsilon=\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\theta_1\left(\frac{1}{2}\cos\theta((u_{y_1})^2-(u_{y_2})^2)+\sin\theta u_{y_1}u_{y_2}\right)d\sigma.$$

Известно, что

$$u=u^R+cS, \tag{48}$$

где $S=\sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2})$ и $u^R\in H^2(U)$ (U — малая окрестность A в Ω такая, что $\overline{U}\cap\Gamma=\varnothing$) и c — коэффициент сингулярности решения вариационного неравенства (25). Принимая во внимание разложение (48), для достаточно малого ε, поскольку $\theta_1\equiv -1$ на γ_ε, имеем

$$\begin{aligned}B_\varepsilon=c^2\int\limits_0^{2\pi}\varepsilon\left(\frac{1}{2}\cos\theta((S_{y_1})^2-(S_{y_2})^2)+\sin\theta(S_{y_1}S_{y_2})\right)d\theta\\ +c\int\limits_0^{2\pi}\varepsilon\big(\cos\theta\big(u^R_{y_1}S_{y_1}-u^R_{y_2}S_{y_2}\big)+\sin\theta\big(u^R_{y_1}S_{y_2}+u^R_{y_2}S_{y_1}\big)\big)\,d\theta\\ +\int\limits_0^{2\pi}\varepsilon\left(\frac{1}{2}\cos\theta\big(\big(u^R_{y_1}\big)^2-\big(u^R_{y_2}\big)^2\big)+\sin\theta\big(u^R_{y_1}u^R_{y_2}\big)\right)d\theta=B^{(1)}_\varepsilon+B^{(2)}_\varepsilon+B^{(3)}_\varepsilon.\end{aligned}$$

В этом случае вид сингулярных функций известен:

$$S_{y_1}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),\quad S_{y_2}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Первый из интегралов в B_ε принимает вид

$$\begin{aligned}B^{(1)}_\varepsilon=c^2\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\theta}{2}\left(\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)+\frac{\sin\theta}{4}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)d\theta\\ =\frac{c^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta=\frac{2\pi c^2}{8}=\frac{\pi c^2}{4}.\end{aligned}$$

Имеем

$$B^{(1)}_\varepsilon=\frac{\pi c^2}{4}. \tag{49}$$

Нетрудно видеть, что $B_\varepsilon^{(2)} \to 0$ и $B_\varepsilon^{(3)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0^+$ (на самом деле мы имеем оценки $B_\varepsilon^{(2)} = O(\sqrt{\varepsilon})$, $B_\varepsilon^{(3)} = O(\varepsilon)$). Таким образом,

$$B_\varepsilon \to \frac{\pi c^2}{4}, \quad A_\varepsilon \to -\int\limits_\Omega \theta_1 f u_{y_1}\,dy + \frac{\pi c^2}{4} \text{ при } \varepsilon \to 0^+,$$

откуда

$$dJ(\Omega; V) = -\int\limits_\Omega ((\theta_1 f)_{y_1} u)\,dy - \int\limits_\Omega \theta_1 f u_{y_1}\,dy + \frac{\pi c^2}{4}$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int\limits_{\Omega_\epsilon} ((\theta_1 f)_{y_1} u + \theta_1 f u_{y_1})\,dy\right) + \frac{\pi c^2}{4}$$

и, наконец,

$$dJ(\Omega; V) = \frac{\pi c^2}{4} = \alpha_A. \tag{50}$$

Коэффициент $\alpha_A = \pi c^2/4$ совпадает с выражением эйлеровой полупроизводной $dJ(\Omega; V)$, определяемой структурной теоремой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bui H. D., Ehrlacher A.* Developments of fracture mechanics in France in the last decades // Fracture Research in Retrospect. Rotterdam, 1997. P. 369–387.
2. *Destyunder Ph., Jaoua M.* Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile // Math. Methods Appl. Sci. 1981. V. 3. P. 70–87.
3. *Grisvard P.* Singularities in boundary value problems. Berlin: Springer-Verl., 1992. (Rech. Math. Appl.).
4. *Blat J., Morel J. M.* Elliptic problems in image segmentation and their relation to fracture theory // Recent advances in nonlinear elliptic and parabolic problems. Proc. Intern. Conf. Longman Scientific and Technical. 1988. V. 10. P. 379–394.
5. *Destyunder Ph.* Calcul de forces d'avancement d'une fissure en tenant compte du contact unilatéral entre les lèvres de la fissure // C. R. Acad. Sci., Sér. 2. 1983. T. 296. P. 745–748.
6. *Sokolowski J., Zolésio J. P.* Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis.. Berlin etc.: Springer-Verl, 1992. (Comput. Math.; V. 16).
7. *Khludnev A. M., Sokolowski J.* The Griffith formula and the Rice — Cherepanov integral for crack problems with unilateral conditions in nonsmooth domains // European J. Appl. Math. 1999. V. 10, N 4. P. 379–394.
8. *Khludnev A. M., Sokolowski J.* Griffith formula for elasticity system with unilateral conditions in domains with cracks // European J. Mech. A. Solids. 2000. V. 19, N 1. P. 105–120.
9. *Aubin J. P.* Initiation à l'analyse appliquée. Paris: Masson, 1994. (Found. appl. anal.).
10. *Delfour M. C.* Shape derivatives and differentiability of Min Max // Shape optimization and free boundaries. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute and Séminaire de mathématiques supérieures, held Montreal, Canada, June 25-July 13, 1990. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992 (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys.; 380). P. 36–112.
11. *Delfour M. C., Zolésio J. P.* Structure of shape derivatives for nonsmooth domains // J. Funct. Anal. 1992. V. 104, N 1. P. 1–33.

Статья поступила 3 марта 1999 г.

Université Henri Poincaré (Nancy I), Institut de Mathématiques Elie Cartan, B.P. 239, F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex, France

fremiot@iecn.u-nancy.fr

sokolows@iecn.u-nancy.fr