Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 517.55

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА К ЗАДАЧЕ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ CR–ГИПЕРФУНКЦИЙ

И. А. Антипова

Аннотация: Установлена когомологическая связь между формой Бохнера — Мартинелли и логарифмическим дифференциалом, которая используется для доказательства критерия голоморфного продолжения в фиксированную область CR-гиперфункций, заданных на произвольной вещественно аналитической гиперповерхности. Библиогр. 19.

1. Введение

Наряду с хорошо изученными вопросами голоморфного продолжения в область функций, заданных на полной границе (см., например, обзор [1]), в последние годы широко изучалась задача одностороннего голоморфного продолжения CR-функций с гиперповерхности. В работе Л. А. Айзенберга, А. М. Кытманова [2] дан критерий одностороннего голоморфного продолжения в заданную область CR-распределений, определенных на произвольной гладкой гиперповерхности Γ. А именно, показано, что необходимым и достаточным условием голоморфного продолжения CR-распределений в одностороннюю окрестность гиперповерхности является условие гармонического продолжения сквозь Γ соответствующего преобразования Бохнера — Мартинелли. А. М. Кытманов и С. Г. Мысливец доказали критерий голоморфного продолжения CR-функций класса $\mathscr{C}^k(\Gamma)$ в терминах преобразования, связанного с логарифмическим дифференциалом (см. [3]). Прототипом этих результатов для функций одного переменного явилось обобщение теоремы Фока — Куни, изложенное также в работе [2].

В данной работе продолжено изучение условий голоморфного продолжения CR-гиперфункций, заданных на произвольной вещественно аналитической гиперповерхности, начатое в совместных работах автора с А. М. Кытмановым (см., например, [4]).

Пусть Γ — гладкая вещественно аналитическая гиперповерхность в области голоморфности $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ вида

$$\Gamma = \{z \in \Omega : \varrho(z) = 0\}, \tag{1}$$

где ϱ — вещественно аналитическая функция в Ω и $d\varrho \neq 0$ на Γ. Предполагается, что Γ связна и делит Ω на два открытых множества $\Omega^{\pm} = \{z \in \Omega : \varrho(z) \gtrless 0\}$, ориентация Γ согласована с Ω^+.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00790).

Обозначим через E_Ω разность по Минковскому

$$\Omega - \Omega = \{\zeta - z : \zeta, z \in \Omega\}.$$

Пусть U — область голоморфности, $E_\Omega \subset U$. Рассмотрим голоморфное отображение

$$f(w) = (f_1(w), \dots, f_n(w)) : U \to \mathbb{C}^n,$$

имеющее в U единственный нуль $w = 0$ кратности μ. $\bar\partial$-Замкнутую дифференциальную форму

$$\omega(f(\zeta - z)) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar f_k(\zeta - z)}{|f(\zeta - z)|^{2n}} d\bar f(\zeta - z)[k] \wedge df(\zeta - z) \qquad (2)$$

с вещественно аналитическими коэффициентами при $\zeta \neq z$ будем называть *логарифмическим дифференциалом*, соответствующим отображению f (z считаем фиксированным).

Для гиперфункции Ψ с компактным носителем на Γ определим преобразование, связанное с логарифмическим дифференциалом:

$$\mathscr{F}(\Psi)(z) = \left\langle \Psi_\zeta, \frac{\omega(f(\zeta - z))|_\Gamma}{d\sigma(\zeta)} \right\rangle, \qquad (3)$$

$d\sigma(\zeta)$ — элемент поверхности Γ. Заметим, что $\mathscr{F}(\Psi)(z)$ — вещественно аналитическая функция вне носителя Ψ.

Построим исчерпание области Ω монотонным семейством ограниченных областей голоморфности Ω_j: $\overline{\Omega}_j \Subset \Omega_{j+1} \subset \Omega$. Соответственно определяется исчерпание гиперповерхности Γ с помощью $S_j = \Gamma \cap \Omega_j$, $\overline{S}_j \subset S_{j+1}$. Для произвольной гиперфункции Ψ на Γ проведем локализацию, т. е. сопоставим ей последовательность гиперфункций $\{\Psi_j\}$ со свойствами: $\operatorname{supp} \Psi_j \subset \overline{S}_{j+1}$, $\Psi_{j+1} - \Psi_j = 0$ на $S_j \cup (\Gamma \setminus \overline{S}_{j+1})$, в результате чего

$$\Psi = \sum_{j=0}^{\infty} (\Psi_{j+1} - \Psi_j), \quad \Psi_0 = 0.$$

Теорема 1. *Если Ψ — CR-гиперфункция на Γ, то для голоморфного продолжения Ψ в Ω^+ необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{F}(\Psi_j)(z)$ продолжалась вещественно аналитически из связной компоненты $\Omega^- \cap \Omega_j$ в Ω_j для всех j.*

Доказательство критерия существенно опирается на свойства формы Бохнера — Мартинелли и преобразования, связанного с этой формой. Теорема 2 из п. 3 утверждает, что μ-кратная форма Коши — Фантаппье и логарифмический дифференциал $\bar\partial$-когомологичны в классе форм с вещественно аналитическими коэффициентами. Из этой теоремы получаем следствие 2 о $\bar\partial$-когомологичности формы Бохнера — Мартинелли и логарифмического дифференциала, умноженного на $\frac{1}{\mu}$.

Из теоремы 1 вытекает следствие, для формулировки которого введем некоторые дополнительные предположения. Пусть точка 0 принадлежит Ω^-. Рассмотрим для $\mathscr{F}^-(\Psi_j)(z) = \mathscr{F}(\Psi_j)(z)|_{\Omega^-}$ разложение в ряд Тейлора в окрестности точки 0. Выделим из него голоморфные слагаемые и обозначим их сумму через $\mathscr{F}^h(\Psi_j)(z)$ и аналогично сумму неголоморфных слагаемых через $\mathscr{F}^g(\Psi_j)(z)$. Тогда

$$\mathscr{F}^-(\Psi_j)(z) = \mathscr{F}^h(\Psi_j)(z) + \mathscr{F}^g(\Psi_j)(z)$$

в окрестности точки 0.

Предположим, что область Ω такова, что ее сечения комплексными прямыми, проходящими через 0, связны и односвязны. Области Ω_j выбираются таким образом, чтобы они обладали тем же свойством.

Следствие 1. *CR-гиперфункция Ψ голоморфно продолжается в Ω^+ тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}^h(\Psi_j)(z)$ голоморфно продолжается из окрестности нуля на множество Ω_j для всех j.*

В п. 5 данной работы теорема 1 применена к исследованию условий локального голоморфного продолжения CR-гиперфункций. А именно, в теореме 4 доказан признак для гиперповерхности Γ, согласно которому для продолжения любой CR-гиперфункции Ψ в одностороннюю окрестность $V_p^- \subset \Omega^-$ точки $p \in \Gamma$ достаточно, чтобы в этой точке существовал росток голоморфной кривой, расположенный в Ω^+. Прототипом этого результата служит известная теорема Г. Леви (см. [5]). Различные ее аналоги и обобщения можно найти в работах [1, 6, 7].

Утверждение теоремы 4 уместно сравнить с результатами теоремы Трепро [7] , в которой доказано, что достаточным условием голоморфного продолжения CR-функций в одностороннюю окрестность точки $p \in \Gamma$ является несуществование ростка комплексной гиперповерхности H такого, что $p \in H \subset \Gamma$. В $\mathbb{C}^2$ условие теоремы 4 более жесткое, нежели условие упомянутой выше теоремы Трепро. А именно, Кон и Ниренберг построили пример гиперповерхности, проходящей через точку $z = 0$, «протыкаемой» любым ростком комплексной кривой в этой точке (см. [8]). Таким образом, для такой гиперповерхности нельзя построить ни вложенную, ни касающуюся комплексные кривые.

2. Предварительные сведения о гиперфункциях

Определим CR-гиперфункции на гиперповерхности. Пусть $\mathscr{A}'(K)$ — пространство аналитических функционалов, сосредоточенных на компакте K (с опорой на K) [9]. Если $K \subset \mathbb{R}^n$, то любой элемент $\Psi \in \mathscr{A}'(K)$ имеет минимальную опору, называемую носителем Ψ и обозначаемую через $\operatorname{supp}\Psi$. Согласно Мартино гиперфункции в $\mathbb{R}^n$ определяются таким образом, чтобы локально они были эквивалентны аналитическим функционалам в $\mathbb{C}^n$ с компактными носителями в $\mathbb{R}^n$. Отождествим $\mathbb{R}^n$ с подпространством из $\mathbb{C}^n$ вида

$$\{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Im} z_j = 0,\ j = 1, \dots, n\}.$$

Если $X \subset \mathbb{R}^n$ открыто и ограничено, то пространство гиперфункций $\mathfrak{B}(X)$ в X определяется как

$$\mathfrak{B}(X) = \mathscr{A}'(\overline{X})/\mathscr{A}'(\partial X).$$

Гиперфункции в $\mathfrak{B}(X)$ с компактными носителями могут быть отождествлены с функционалами из

$$\mathscr{A}'(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{K \Subset \mathbb{R}^n} \mathscr{A}'(K),$$

имеющими носители в X.

Пучок гиперфункций $\mathfrak{B}(\Gamma)$ на вещественно аналитической гиперповерхности Γ определяется следующим образом. Выберем атлас аналитических диффеоморфизмов $\varkappa_j : S_j \to X_j$ координатных окрестностей $S_j \Subset \Gamma$ на открытые ограниченные множества $X_j \subset \mathbb{R}^{2n-1}$. Гиперфункцию $\Psi \in \mathfrak{B}(\Gamma)$ можно определить как набор гиперфункций $\Psi_j \in \mathfrak{B}(X_j)$, причем

$$\Psi_k = \left(\varkappa_j \circ \varkappa_k^{-1}\right)^* \Psi_j$$

в $\varkappa_k(S_j \cap S_k)$ (см. [9, гл. 9]). Будем обозначать пространство $\mathfrak{B}(X_j)$ через $\mathfrak{B}(S_j)$. По аналогии с пучком $\mathfrak{B}$ гиперфункций в $\mathbb{R}^n$ набор $\{\mathfrak{B}(S_j)\}_{S_j}$ порождает пучок гиперфункций $\mathfrak{B}(\Gamma)$ на многообразии Γ. Этот пучок также является вялым.

Определим условия Коши — Римана. Рассмотрим набор векторных полей $\{L_{\alpha\beta}\}$, $1 \le \alpha, \beta \le n$, определенных вблизи Γ следующим образом:

$$L_{\alpha\beta} = \frac{(2i)^n}{2|\partial\rho|}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_\beta} - \frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_\beta}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_\alpha}\right), \quad 1 \le \alpha, \beta \le n. \tag{4}$$

Под действием $L_{\alpha\beta}$ на функционал $\Psi \in \mathscr{A}'(K)$ будем понимать

$$\langle L_{\alpha\beta}\Psi, \varphi\rangle = \langle \Psi, L_{\alpha\beta}\widetilde{\varphi}\rangle\,,$$

где $\widetilde{\varphi}$ — вещественное аналитическое продолжение функции $\varphi \in \mathscr{A}(\Gamma)$ ($\mathscr{A}(\Gamma)$ — пространство вещественно аналитических функций на многообразии Γ) в некоторую окрестность Γ. Результат действия $L_{\alpha\beta}\widetilde{\varphi}$ не зависит от продолжения φ в окрестность Γ, так как $L_{\alpha\beta}$ — касательный оператор.

Пусть S — открытое подмножество многообразия Γ. Выберем семейство координатных окрестностей $S_j \subset S$ ($\cup S_j = S$).

Определение 1. Гиперфункция $\Psi \in \mathfrak{B}(\Gamma)$, заданная набором гиперфункций $\Psi_j \in \mathfrak{B}(S_j)$, *удовлетворяет на S касательным уравнениям Коши — Римана*, если

$$\operatorname{supp} L_{\alpha\beta} f_j \subset \partial S_j \quad \text{для всех } j,\ 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n,$$

где $f_j \in \mathscr{A}'(\overline{S}_j)$ — представитель Ψ_j.

Пусть заданы функционал $\Psi \in \mathscr{A}'(K)$ (K — компакт на гиперповерхности Γ) и дифференциальная форма

$$\xi = \sum_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant n} \xi_{\alpha\beta}(\zeta)\, d\bar{\zeta}[\alpha,\beta] \wedge d\zeta$$

с вещественно аналитическими коэффициентами на Γ. Справедливо равенство, являющееся содержанием леммы 1 из [10]:

$$\left\langle \Psi, \frac{(\bar{\partial}\xi)|_\Gamma}{d\sigma}\right\rangle = \left\langle \Psi, \sum_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant n} (-1)^{\alpha+\beta} L_{\alpha\beta}\xi_{\alpha\beta}\right\rangle. \tag{5}$$

Из результатов Полкинга и Уэллса [6] известно, что CR-гиперфункции на границе области можно интерпретировать как граничные значения голоморфных функций в этой области. В совместных работах автора с А. М. Кытмановым (см., например, [4]) этот подход обобщен для CR-гиперфункций, заданных на вещественно аналитической гиперповерхности. Описано гармоническое представление гиперфункций, а именно введено понятие граничного значения гармонической функции, применение которого к голоморфной функции определяет CR-гиперфункцию на гиперповерхности Γ. Изначально конструкция граничного значения рассматривалась в $\mathbb{R}^n$, именно в таком виде мы ее и приводим. В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим гладкую вещественно аналитическую гиперповерхность

$$\Gamma = \{x \in \Omega : \varrho(x) = 0\}$$

и компактное множество $K \subset \Gamma$. Пусть f — гармоническая функция в $\Omega \setminus K$, f^+ и f^- — сужения f на Ω^+ и Ω^- соответственно. Определим граничные значения (при подходе к Γ и, в частности, к K):

$$\begin{aligned} [f^+]_0(\varphi) &= \int f\Delta(\chi V^-_{(\tilde{\chi}\varphi)})\, dv(y), \\ [f^-]_0(\varphi) &= \int f\Delta(\chi V^+_{(\tilde{\chi}\varphi)})\, dv(y), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\varphi \in \mathscr{A}(\Gamma)$, $\tilde{\chi}$, χ — гладкие финитные функции в Ω, равные единице в окрестностях компакта K, причем $\operatorname{supp}\chi \subset \{\tilde{\chi} = 1\}$, а $V^+_{\tilde{\chi}\varphi}$, $V^-_{\tilde{\chi}\varphi}$ суть сужения потенциала простого слоя $V_{\tilde{\chi}\varphi}$ на Ω^+ и Ω^- соответственно. Интегралы (6) задают непрерывные линейные функционалы, сосредоточенные на носителе функции χ (см. [4]).

3. Форма Бохнера — Мартинелли и ее связь с логарифмическим дифференциалом

Рассмотрим дифференциальную форму Бохнера — Мартинелли

$$\omega(\zeta - z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta.$$

Докажем ряд утверждений, устанавливающих когомологическую связь логарифмического дифференциала (2) с формой Коши — Фантаппье специального вида и формой Бохнера — Мартинелли. Рассмотрим разложение Хефера для функций $f_i(w)$, $i = 1, \ldots, n$:

$$f_i(w) - f_i(0) = \sum_{k=1}^{n} (w_k - 0) P_{ik}(w, 0)$$

или, поскольку $f_i(0) = 0$,

$$f_i(w) = \sum_{k=1}^{n} w_k P_{ik}(w, 0).$$

Тогда

$$|f(w)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i(w) \left(\sum_{k=1}^{n} w_k P_{ik}(w, 0) \right) = \sum_{k=1}^{n} w_k \sum_{i=1}^{n} P_{ik}(w, 0) \bar{f}_i(w),$$

а заменив w на $\zeta - z$, получим

$$|f(\zeta - z)|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\zeta_k - z_k) \sum_{i=1}^{n} P_{ik}(\zeta - z, 0) \bar{f}_i(\zeta - z).$$

Для вектор-функции

$$\lambda(\zeta, z) = (\lambda_1(\zeta, z), \ldots, \lambda_n(\zeta, z)),$$

где

$$\lambda_k(\zeta, z) = \sum_{i=1}^{n} P_{ik}(\zeta - z, 0) \bar{f}_i(\zeta - z),$$

рассмотрим дифференциальную форму Коши — Фантаппье

$$\omega(\zeta - z, \lambda) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\lambda_k(\zeta, z) d\lambda[k]}{\langle \zeta - z, \lambda(\zeta, z) \rangle^n} \wedge d\zeta. \tag{7}$$

Связь между формой Коши — Фантаппье и логарифмическим дифференциалом (2) описывается следующим утверждением, в котором μ — кратность отображения f в точке $w = 0$.

Теорема 2. *Форма Коши — Фантаппье, умноженная на кратность μ, и логарифмический дифференциал (2) $\bar\partial$-когомологичны в области $\zeta \neq z$:*

$$\mu\omega(\zeta - z, \lambda(\zeta, z)) - \omega(f(\zeta - z)) = \bar\partial\chi(\zeta, z) \wedge d\zeta,$$

где

$$\chi(\zeta, z) = \frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^{n} q_j(\zeta - z) \sum_{l \neq j} (-1)^l \frac{\bar f_l d\bar f[j,l]}{|f|^{2n-2}}, \tag{8}$$

$q_j(w) \in \mathscr{O}(U)$.

Лемма 1. *Справедлива формула*

$$\mu\omega(\zeta - z, \lambda) - \omega(f(\zeta - z)) = [\mu H_f(\zeta - z, 0) - J_f(\zeta - z)] \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar f_k d\bar f[k]}{|f|^{2n}} \wedge d\zeta,$$

здесь $H_f(\zeta - z, 0)$ — определитель матрицы $\|P_{jk}(\zeta - z, 0)\|_{j,k=\overline{1,n}}$ из коэффициентов Хефера, $J_f(\zeta - z)$ — якобиан отображения f.

Доказательство леммы. Вычислим

$$d\lambda[k] = \bigwedge_{j \neq k} d \sum_{l=1}^{n} P_{lj}(\zeta - z, 0) \bar f_l(\zeta - z) = \bigwedge_{j \neq k} \sum_{l=1}^{n} P_{lj}(\zeta - z, 0) d\bar f_l(\zeta - z) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} A_{jk} d\bar f[j],$$

здесь A_{jk} — алгебраические дополнения к элементам матрицы из коэффициентов Хефера $\|P_{jk}\|_{j,k=\overline{1,n}}$. Подставим полученные выражения в (7):

$$\omega(\zeta - z, \lambda) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} P_{ik} \bar f_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} A_{jk} d\bar f[j]\right)}{\langle \zeta - z, \lambda(\zeta, z)\rangle^n} \wedge d\zeta$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\left(\bar f_k \sum\limits_{j=1}^{n} A_{kj} P_{kj} + \sum\limits_{i=1 (i \neq k)}^{n} \bar f_i \sum\limits_{l=1}^{n} A_{kl} P_{il}) d\bar f[k]\right)}{\langle \zeta - z, \lambda(\zeta, z)\rangle^n} \wedge d\zeta$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar f_k H_f(\zeta - z, 0) d\bar f[k]}{\langle \zeta - z, \lambda(\zeta, z)\rangle^n} \wedge d\zeta.$$

С учетом формулы (2) получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим функцию

$$h(w) = \mu H_f(w, 0) - J_f(w).$$

Покажем, что локальный вычет в нуле $\operatorname*{res}_0{}_f(hg)$ относительно отображения f равен нулю для всех $g \in \mathscr{O}_0$ ($\mathscr{O}_0$ обозначает кольцо ростков голоморфных функций в нуле).

Локальный вычет в нуле функции $\mu H_f(w,0)g(w)$ относительно отображения f определяется интегралом

$$\operatorname*{res}_0{}_f \mu H_f(w,0)g(w) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{\mu H_f(w,0)g(w)dw}{f_1(w)\cdot\ldots\cdot f_n(w)},$$

здесь $\Gamma_0 = \{w \in U : |f_j(w)| = \varepsilon_j, j = \overline{1,n}\}$, U — окрестность нуля. По формуле Вейля (см. [11, гл. 4]) получаем

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{\mu g(w)H_f(w,0)dw}{f_1(w)\cdot\ldots\cdot f_n(w)} = \mu g(0).$$

Рассмотрим локальный вычет в нуле относительно отображения f функции $\mu J_f(w)g(w)$. Он может быть представлен как $(2n-1)$-мерный интеграл (см. [11, гл. 2]):

$$\operatorname*{res}_0{}_f \mu J_f(w)g(w) = \int\limits_{\partial U_0} J_f(w)g(w)\frac{\omega(f(w))}{J_f(w)},$$

здесь ∂U_0 — кусочно-гладкая граница окрестности нуля. По формуле логарифмического вычета (см. [12, гл. 1]) получим

$$\operatorname*{res}_0{}_f J_f(w)g(w) = \int\limits_{\partial U_0} J_f(w)g(w)\frac{\omega(f(w))}{J_f(w)} = \mu g(0).$$

Таким образом,

$$\operatorname*{res}_0{}_f (\mu H_f(w,0) - J_f(w))g(w) = 0$$

для любой $g \in \mathscr{O}_0$. По локальной теореме двойственности (см. [11, гл. 2])

$$h(w) = \mu H_f(w,0) - J_f(w) \in I_0(f)$$

($I_0(f)$ — идеал, порожденный отображением f в кольце $\mathscr{O}_0$). Так как предполагается, что f имеет единственный нуль при $w = 0$, по следствию из теоремы Картана (см. [13, гл. 7]) существуют такие функции $q_1(w),\ldots,q_n(w) \in \mathscr{O}(U)$, что

$$h(w) = \sum_{i=1}^n q_i(w)f_i(w).$$

Дифференциальная форма

$$\widetilde{\omega}(f(\zeta - z)) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{l=1}^n (-1)^{l-1}\frac{\bar{f}_l d\bar{f}[l]}{|f|^{2n}} \wedge d\zeta$$

при $n > 1$ является $\bar\partial$-точной в области $\{\zeta : f_i(\zeta - z) \neq 0\}$. Более точно,

$$\widetilde{\omega}(f(\zeta - z)) = \bar\partial\biggl(\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\sum_{l\neq i}(-1)^l\frac{\bar{f}_l d\bar{f}[i,l]}{f_i|f|^{2n-2}}\wedge d\zeta\biggr).$$

Следовательно,

$$\mu\omega(\zeta - z, \lambda(\zeta,z)) - \omega(f(\zeta - z))$$

$$= \frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\sum_{j=1}^n q_j(\zeta - z)f_j(\zeta - z)\bar\partial\biggl(\sum_{l\neq j}(-1)^l\frac{\bar{f}_l d\bar{f}[j,l]}{f_j|f|^{2n-2}}\wedge d\zeta\biggr)$$

$$= \bar\partial\biggl(\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\sum_{j=1}^n q_j(\zeta - z)\sum_{l\neq j}(-1)^l\frac{\bar{f}_l d\bar{f}[j,l]}{|f|^{2n-2}}\wedge d\zeta\biggr). \quad \square$$

Известно, что разность форм Бохнера — Мартинелли и Коши — Фантаппье есть $\bar\partial$-точная форма с вещественно аналитическими коэффициентами при $\zeta \neq z$:

$$\omega(\zeta - z) - \omega(\zeta - z, \lambda) = \bar\partial_\zeta \eta(\zeta, z) \wedge d\zeta \tag{9}$$

(см. лемму 1.3 из [14]). Тогда с учетом теоремы 2 получаем, что

$$\omega(\zeta - z) - \frac{1}{\mu}\omega(f(\zeta - z)) = \bar\partial_\zeta \tilde\eta \wedge d\zeta,$$

где форма $\tilde\eta(\zeta, z) = \eta(\zeta, z) + \frac{1}{\mu}\chi(\zeta, z)$ имеет вещественно аналитические коэффициенты при $\zeta \neq z$. Таким образом, из приведенных рассуждений вытекает

Следствие 2. *Форма Бохнера — Мартинелли и логарифмический дифференциал* (2)*, умноженный на* $1/\mu$*,* $\bar\partial$*- когомологичны в области* $\zeta \neq z$*:*

$$\omega(\zeta - z) - \frac{1}{\mu}\omega(f(\zeta - z)) = \bar\partial_\zeta\Big(\eta(\zeta, z) + \frac{1}{\mu}\chi(\zeta, z)\Big) \wedge d\zeta,$$

где $\chi(\zeta, z)$ *— дифференциальная форма* (8)*, а* $\eta(\zeta, z)$ *— дифференциальная форма из равенства* (9)*.*

В заключение пункта сформулируем ряд нужных утверждений, касающихся преобразования Бохнера — Мартинелли, которые ранее доказаны в работах [15, 4].

Рассмотрим вновь гиперповерхность Γ вида (1). Определим преобразование Бохнера — Мартинелли для гиперфункций $\Psi \in \mathscr{A}'(K)$ (K — компакт на Γ). Сужение известной формы Бохнера — Мартинелли на гиперповерхность Γ имеет вид

$$M(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar\zeta_k - \bar z_k}{|\zeta - z|^{2n}} \frac{\partial\varrho}{\partial\zeta_k} \frac{1}{|\mathrm{grad}\varrho|}$$

(см. [16, гл. 1]). Тогда преобразование Бохнера — Мартинелли для гиперфункции $\Psi \in \mathscr{A}'(K)$ определяется следующим образом:

$$M(\Psi)(z) = \langle \Psi_\zeta, M(\zeta, z)\rangle.$$

Функция $M(\Psi)(z)$ гармонична вне компакта $K \subset \Gamma$. Если $z \in \Omega^+$, то будем писать $M^+(\Psi)$, если $z \in \Omega^-$, то $M^-(\Psi)$.

Из [15, лемма 5] следует, что

$$[M^+(\Psi)]_0 - [M^-(\Psi)]_0 = \Psi \quad \text{на } \Gamma. \tag{10}$$

Для функций f^+ (f^-), гармонических в Ω^+ (Ω^-), введем операторы $\bar\partial_{+\nu}$ ($\bar\partial_{-\nu}$) следующим образом:

$$\bar\partial_{\pm\nu} f^\pm(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial f^\pm}{\partial \bar z_k}\right]_0 \left(\frac{\partial\varrho}{\partial z_k} \frac{\varphi}{|\partial\varrho|}\right),$$

где φ — аналитическая функция на Γ.

В работе [4] показано, что для $\Psi \in \mathscr{A}'(K)$ скачок нормальных производных преобразования Бохнера — Мартинелли равен нулю:

$$\bar\partial_{+\nu} M^+(\Psi) - \bar\partial_{-\nu} M^-(\Psi) = 0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{11}$$

Кроме того, имеет место следующая

Теорема 3 [4]. *Пусть* $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus K)$ (K *— компакт на* Γ)*. Если* $[f^+]_0 = [f^-]_0$ *на* Γ *и* $\bar\partial_{+\nu} f^+ = \bar\partial_{-\nu} f^-$ *на* Γ*, то существует функция* F*, гармоническая в* Ω*, такая, что* $F|_{\Omega^+} = f^+$*,* $F|_{\Omega^-} = f^-$*, т. е.* f^+ *и* f^- *являются гармоническими продолжениями друг друга.*

4. Доказательство теоремы 1 и ее следствия

Подействовав гиперфункцией на разность ядер и воспользовавшись следствием 2, получим

$$\left\langle \Psi_j, \frac{(\omega(\zeta - z) - \frac{1}{\mu}\omega(f(\zeta - z))|_\Gamma}{d\sigma(\zeta)} \right\rangle = \left\langle \Psi_j, \frac{(\bar\partial_\zeta \tilde\eta \wedge d\zeta)|_\Gamma}{d\sigma(\zeta)} \right\rangle.$$

Если Ψ голоморфно продолжается в Ω^+ до функции F, то преобразование Бохнера — Мартинелли $M^-(\Psi_j)$ продолжается гармонически в Ω_j. Действительно, в силу равенств (10), (11)

$$\bar\partial_\nu M^+(\Psi_j) - \bar\partial_{-\nu} M^-(\Psi_j) = 0 \quad \text{на } S_j,$$

$$[M^+(\Psi_j)]_0 - [M^-(\Psi_j)]_0 = \Psi \quad \text{на } S_j.$$

Тогда

$$[M^-(\Psi_j)]_0 = [M^+(\Psi_j) - F]_0 \quad \text{на } S_j$$

и

$$\bar\partial_{-\nu} M^-(\Psi_j) = \bar\partial_\nu M^+(\Psi_j) - \bar\partial_\nu F \quad \text{на } S_j.$$

По теореме 3 функция $M^-(\Psi_j)$ гармонически продолжается в Ω_j.

Так как Ψ — CR-гиперфункция на Γ, то

$$\operatorname{supp} L_{\alpha\beta}\Psi_j \subset \partial S_j \cap \Gamma \quad \forall 1 \le \alpha, \beta \le n.$$

Применим равенство (5):

$$\left\langle \Psi_j, \frac{(\bar\partial_\zeta \tilde\eta)|_\Gamma}{d\sigma} \right\rangle = \left\langle \Psi_j, \sum_{1 \le \alpha < \beta \le n} (-1)^{\alpha+\beta} L_{\alpha\beta} \tilde\eta_{\alpha\beta} \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{1 \le \alpha < \beta \le n} (-1)^{\alpha+\beta} L_{\alpha\beta}\Psi_j, \tilde\eta_{\alpha\beta} \right\rangle,$$

здесь $\tilde\eta_{\alpha\beta}$ — коэффициенты формы $\tilde\eta$. Следовательно,

$$\left\langle \Psi_j, \frac{(\bar\partial_\zeta \tilde\eta)|_\Gamma}{d\sigma} \right\rangle$$

является вещественно аналитической функцией в Ω_j. Значит, функция $\mathscr{F}_j(z)$ вещественно аналитически продолжается из связной компоненты $\Omega^- \cap \Omega_j$ в Ω_j для всех j.

Обратно, если $\mathscr{F}_j(z)$ вещественно аналитически продолжается в Ω_j для всех j, то $M^-(\Psi_j)$ также вещественно аналитически продолжается в Ω_j, а значит, и гармонически, до функции h_j, гармонической в Ω_j для всех j. Тогда, учитывая равенства (10), (11), имеем

$$\bar\partial_\nu h_j - \bar\partial_\nu M^+(\Psi_j) = 0 \quad \text{на } S_j$$

и

$$[h_j - M^+(\Psi_j)]_0 = \Psi \quad \text{на } S_j.$$

В силу следствия 3 из [4] функция $(h_j - M^+(\Psi_j))$ голоморфна в Ω_j. По теореме единственности [4, следствие 2] Ψ голоморфно продолжается в Ω^+. Доказательство теоремы 1 завершено.

Перейдем к доказательству следствия 1. Ввиду теоремы 1 достаточно показать, что неголоморфная часть $\mathscr{F}^g(\Psi_j)$ вещественно аналитически продолжается в область Ω_j. Далее в доказательстве нам понадобится равенство, доказанное в лемме 3 из [17]:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\omega(f(\zeta - z)) = \bar{\partial}_\zeta \omega_k(f(\zeta - z)), \quad k = 1, \dots, n, \tag{12}$$

где $\omega(f(\zeta - z))$ — форма (2), $\omega_k(f(\zeta - z))$ — форма типа $(n, n-2)$ с вещественно аналитическими коэффициентами при $\zeta \neq z$ (явный вид ее приведен в [17]).

Используя формулы (12) и (5), получим

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\mathscr{F}^g(\Psi_j) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\left\langle \Psi_j, \frac{\omega(f(\zeta - z))|_\Gamma}{d\sigma}\right\rangle = \left\langle \Psi_j, \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\omega(f(\zeta - z))|_\Gamma}{d\sigma}\right\rangle$$

$$= \left\langle \Psi_j, \frac{\bar{\partial}_\zeta \omega_k(f(\zeta - z))|_\Gamma}{d\sigma}\right\rangle = \left\langle \Psi_j, \sum_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n} (-1)^{\alpha+\beta} L_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}\right\rangle$$

$$= \sum_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n} \langle L_{\alpha\beta}\Psi_j, a_{\alpha\beta}\rangle,$$

здесь $a_{\alpha\beta}$ — коэффициенты формы $\omega_k(f(\zeta - z))$, z рассматривается из окрестности нуля, $k = 1, \dots, n$.

Так как Ψ удовлетворяет условиям Коши — Римана ($\operatorname{supp} L_{\alpha\beta}\Psi_j \subset \partial S_j$), производные по $\bar{z}_k$ функции $\mathscr{F}^g(\Psi_j)$ продолжаются вещественно аналитически в Ω_j для всех j.

Теперь доказательство заканчивается стандартным образом. Рассмотрим дифференциальный оператор Эйлера

$$T = \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}.$$

Функция $G^j = T\mathscr{F}^g(\Psi_j)$ является вещественно аналитической в области Ω_j. Рассмотрим уравнение

$$TH^j = G^j. \tag{13}$$

Будем искать его решение, пользуясь условием

$$TH^j = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} H^j(tz_1, \dots, tz_n)\bigg|_{t=1}. \tag{14}$$

Решением уравнения (13) является интеграл

$$H^j(z) = \int_0^1 G^j(tz)\frac{d\bar{t}}{\bar{t}}. \tag{15}$$

Вначале покажем, что $H^j(z)$ удовлетворяет уравнению (13) в достаточно малой окрестности нуля. Заметим, что для однородного многочлена степени k

$$G_k^j = \sum_{|\gamma|+|\delta|=k} g_{\gamma\delta} z^\gamma \bar{z}^\delta$$

функция
$$H_k^j(z)=\int\limits_0^1\sum_{|\gamma|+|\delta|=k} g_{\gamma\delta}(tz)^\gamma(\overline{tz})^\delta\frac{d\bar t}{\bar t}=\sum_{|\gamma|+|\delta|=k}\frac{g_{\gamma\delta}}{|\delta|}z^\gamma\bar z^\delta$$
удовлетворяет уравнению (13). Действительно,
$$TH_k^j=\frac{\partial}{\partial\bar t}\sum_{|\gamma|+|\delta|=k} t^\gamma\bar t^\delta\frac{g_{\gamma\delta}}{|\delta|}z^\gamma\bar z^\delta\bigg|_{t=1}=\sum_{|\gamma|+|\delta|=k} g_{\gamma\delta}z^\gamma\bar z^\delta=G_k^j.$$

Произвольная функция G^j в окрестности нуля может быть разложена в ряд по однородным многочленам:
$$G^j=\sum_k G_k^j.$$

Тогда решение уравнения (13) в рассматриваемой окрестности запишется в виде
$$H^j=\sum_k H_k^j.$$

Для произвольной точки $z\in\Omega_j$ значение $H^j(z)$ может быть получено в результате аналитического продолжения локального решения вдоль кривой, соединяющей точки 0 и z.

5. Теорема о локальном голоморфном продолжении

В качестве применения теоремы 1 приведем один признак для гиперповерхности Γ, обеспечивающий одностороннее локальное голоморфное продолжение с Γ любой CR-гиперфункции. Напомним, что Γ — гладкая вещественно аналитическая гиперповерхность в $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, разделяющая Ω на две части: Ω^+ и Ω^-.

Теорема 4. *Если в точке p гиперповерхности Γ существует росток голоморфной кривой*
$$\{f_1=\dots=f_{n-1}=0\},$$
расположенный в Ω^+, то всякая CR-гиперфункция Ψ на Γ голоморфно продолжается в некоторую одностороннюю окрестность $V_p^-\subset\Omega^-$ этой точки.

Доказательство теоремы. Без ограничения общности считаем $p=0$. Для данной CR-гиперфункции Ψ на Γ проведем ее локализацию, т. е. сопоставим ей функционал с носителем в любой наперед заданной окрестности $\Omega_1\subset\Omega$ точки $p=0$.

Выберем Ω_1 так, чтобы росток
$$\gamma=\{\zeta\in\overline{\Omega}_1: f_1(\zeta)=\dots=f_{n-1}(\zeta)=0\}$$
пересекал Γ лишь в точке $p=0$. А локализацию проведем таким образом, что
$$\operatorname{supp}L_{\alpha\beta}\Psi\subset(\Omega_1\setminus B)\cap\Gamma,\quad \alpha,\beta=1,\dots,n,\tag{16}$$
здесь $B\subset\Omega_1$ — какая-либо окрестность точки $p=0$, в которой функционал совпадает с исходной гиперфункцией.

Систему функций
$$f'=(f_1,\dots,f_{n-1}),$$

участвующих в определении ростка γ, дополним до системы $f = (f_1, \dots, f_n)$ функцией f_n, имеющей на γ изолированный нуль в точке $p = 0$. Рассмотрим преобразование (3), связанное с логарифмическим дифференциалом для f:

$$\mathscr{F}(\Psi)(z) = \left\langle \Psi_\zeta, \frac{\omega(f(\zeta - z))|_\Gamma}{d\sigma(\zeta)} \right\rangle.$$

Воспользуемся тем фактом, что форма Бохнера — Мартинелли $\omega(t)$ точна вне комплексной прямой

$$\{t' = 0\} := \{t_1 = \dots = t_{n-1} = 0\},$$

т. е.

$$\omega(t) = \bar{\partial}\mu(t),$$

где

$$\mu(t) = \frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \bar{t}_n \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|t|^{2j}(|t_1|^2 + \dots + |t_{n-1}|^2)^{n-j+1}} \right) \times \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \bar{t}_k d\bar{t}[k,n] \wedge dt \right). \quad (17)$$

Выражение (17) для $\bar{\partial}$-первообразной формы $\omega(t)$ может быть получено с помощью леммы 1 из [18], хотя в равенстве $\omega(t) = \bar{\partial}\mu(t)$ можно убедиться непосредственно. Ввиду коммутирования операторов f^* и $\bar{\partial}$ имеем

$$\omega(f(w)) =: f^*\omega(t) = f^*\bar{\partial}\mu(t) = \bar{\partial}\mu(f(w)),$$

поэтому в области $f'(\zeta - z) \neq 0$ приходим к равенству

$$\bar{\partial}_\zeta \mu(f(\zeta - z)) = \omega(f(\zeta - z)). \quad (18)$$

Используя (5) и (18), получим

$$\left\langle \Psi_\zeta, \frac{(\bar{\partial}\mu(f(\zeta - z)))|_\Gamma}{d\sigma(\zeta)} \right\rangle = \left\langle \Psi_\zeta, \sum_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n} (-1)^{\alpha+\beta} L_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}(\zeta - z) \right\rangle$$

$$= \sum_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n} (-1)^{\alpha+\beta} \langle L_{\alpha\beta}\Psi_\zeta, a_{\alpha\beta}(\zeta - z) \rangle,$$

где $a_{\alpha\beta}(\zeta - z)$ — коэффициенты формы $\mu(f(\zeta - z))$.

Из (17) видно, что $a_{\alpha\beta}(\zeta - z)$ — вещественно аналитические функции с особенностями на множестве $f'(\zeta - z) = 0$. Для z из некоторой окрестности точки p и $\zeta \in \overline{\Omega}_1$ это множество представляет собой сдвиг $\gamma + z$ ростка γ на вектор z. Поскольку расстояние от γ до $(\Omega_1 \setminus B) \cap \Gamma$ отлично от нуля, сдвиг $\gamma + z$ для z из достаточно малой окрестности V_p точки $p = 0$ по-прежнему не пересекает $(\Omega_1 \setminus B) \cap \Gamma$. Иными словами, при $z \in V_p$ особенности функций $a_{\alpha\beta}(\zeta - z)$ не выходят на $(\Omega_1 \setminus B) \cap \Gamma$. Ввиду (16) заключаем, что функции

$$F_{\alpha\beta}(z) = \langle L_{\alpha\beta}\Psi_\zeta, a_{\alpha\beta}(\zeta - z) \rangle, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n,$$

вещественно аналитичны в V_p. По теореме 1 гиперфункция Ψ голоморфно продолжается в одностороннюю окрестность $V_p^- = V_p \cap \Omega^-$ точки $p = 0$.

Доказанный результат несет в себе новизну и для обычных CR-функций. Он обобщает теорему Леви [5] и ее аналог для интегрируемых функций [1]. Теорема 16 из [1] утверждает, что интегрируемая CR-функция, заданная на гладкой вещественной гиперповерхности

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n : \varrho(z) = 0\} \quad (\varrho \in C^2,\ \varrho(0) = 0,\ d\varrho(0) \neq 0),$$

голоморфно продолжается в окрестность U точки $0 \in \Gamma$, если сужение формы Леви в 0 на комплексную касательную плоскость $T_0^c(\Gamma)$ не равно тождественно нулю. Как видно из доказательства этой теоремы, невырожденность формы Леви влечет за собой возможность коснуться гиперповерхности в нуле комплексной кривой, лежащей в области $\{z \in \mathbb{C}^n : \varrho(z) \geqslant 0\}$, т. е. условие теоремы 4 выполняется (см. [19]). Однако обратная импликация неверна. Это показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть Γ — гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$ вида

$$\Gamma = \bigl\{z \in \mathbb{C}^2 : \rho(z) = \mathrm{Re}\bigl(z_2 - \bar{z}_1^2 + |z_1|^4 + |z_2|^8\bigr) = 0\bigr\}.$$

Форма Леви в точке $0 \in \Gamma$ тождественно равна нулю. Но кривая

$$\gamma = \{z_1 = t,\ z_2 = t^2\},$$

расположенная в области

$$\{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) > 0\},$$

касается Γ в точке нуль. Действительно,

$$\rho|_\gamma = \mathrm{Re}(t^2 - \bar{t}^2 + |t|^4 + |t|^8) = |t|^4 + |t|^8 \geq 0.$$

Кроме того, $\rho|_\gamma = 0$ тогда и только тогда, когда $t = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хенкин Г. М., Чирка Е. М.* Граничные свойства голоморфных функций нескольких переменных // Современные проблемы математики (фундаментальные направления). М.: ВИНИТИ, 1975. Т. 4. С. 13–142. (Итоги науки и техники).
2. *Айзенберг Л. А., Кытманов А. М.* О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 4. С. 490–507.
3. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* Об одностороннем голоморфном продолжении CR-функций вдоль комплексных кривых (в печати).
4. *Кытманов А. М., Цих И. А.* О голоморфном продолжении CR-гиперфункций в фиксированную область // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1319–1334.
5. *Levi H.* On the local character of the solution of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables // Ann. of Math. 1956. V. 64. P. 514–522.
6. *Polking J. C., Wells R. O. Jr.* Boundary values of Dolbeault cohomology classes and a generalized Bochner — Hartogs theorem // Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg. 1978. V. 47. P. 3–24.
7. *Trepreau J.-M.* Sur le prolongment holomorphe des fonctions CR definies sur une hypersurface reele de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$ // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1985. V. 301, N 3. P. 61–63.
8. *Kohn J. J., Nirenberg L.* A Pseudo-convex domain not admitting a holomorphic support function // Math. Ann. 1973. V. 201. P. 265–268.
9. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
10. *Кытманов А. М., Цих И. А.* Об устранении особенностей CR-гиперфункций, заданных на гиперповерхности // Вопросы математического анализа: Сборник научных статей. 1997. Вып. 2. С. 151.
11. *Цих А. К.* Многомерные вычеты и их применения. Новосибирск: Наука, 1988.

12. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
13. *Хёрмандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
14. *Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А.* Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства. Новосибирск: Наука, 1975.
15. *Кытманов А. М., Якименко М. Ш.* О голоморфном продолжении гиперфункций // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 113–122.
16. *Кытманов А. М.* Интеграл Бохнера — Мартинелли и его применения. Новосибирск: Наука, 1992.
17. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* О голоморфности функций, представимых формулой логарифмического вычета // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 2. С. 351–361.
18. *Kytmanov A. M., Nikitina T. N.* On the removable singularities of CR-functions given on a generic manifold // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1994. V. 167. P. 165–189.
19. *Tsikh I. A.* A theorem on local holomorphic extension of CR hyperfunctions given on a hypersurface // Research Reports in Math. Stockholm: Stockholm Univ., 1997. N 8.

Статья поступила 7 мая 1999 г.

г. Красноярск
Красноярский гос. технический университет, кафедра прикладной математики
tsikh@math.kgu.krasnoyarsk.su