Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 519.214.8

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С СЕМИЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

А. А. Боровков

Аннотация: Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины с общей функцией распределения $F(t)$,

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j, \quad \overline{S}_n(a) = \max_{k \le n}(S_k - ak).$$

Изучена асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(S_n > x)$, $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$ в области больших уклонений, включая асимптотические разложения, в случае, когда «хвосты» распределений скачков $V(t) = 1 - F(t)$ имеют вид

$$V(t) = e^{-t^\alpha L(t)}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

где $L(t)$ — медленно меняющаяся функция при $t \to \infty$. Библиогр. 19.

§ 1. Введение

1.1. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины с общей функцией распределения $F(t)$,

$$\mathbf{E}X_j = 0, \quad \mathbf{E}X_j^2 = 1, \quad \mathbf{E}|X_j|^b < \infty, \quad b > 2. \tag{1.1}$$

Основным объектом изучения будут следующие функционалы от случайного блуждания:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad \overline{S}_n(a) = \max_{k \le n}(S_k - ak), \quad \overline{S}_n = \overline{S}_n(0). \tag{1.2}$$

Очевидно, что $\overline{S}_n(a)$ суть максимумы сумм случайных величин соответственно с отрицательным (при $a > 0$) и положительным (при $a < 0$) сносом. Относительно F будет предполагаться, что «хвосты» $V(t) = 1 - F(t)$ распределения F имеют вид

$$V(t) = \mathbf{P}(X_1 \ge t) = e^{-l(t)}; \quad l(t) = t^\alpha L(t), \quad \alpha \in (0, 1), \tag{1.3}$$

где $L(t)$ — медленно меняющаяся функция (м.м.ф.) при $t \to \infty$. Такие распределения мы будем называть распределениями с *семиэкспоненциальными* хвостами (или просто «семиэкспоненциальными распределениями»). Существуют и другие названия для (1.3): легкие хвосты, умеренно тяжелые хвосты, субэкспоненциальные распределения. Однако эти названия используются и для других распределений, отличных от (1.3), в частности, субэкспоненциальные распределения охватывают широкий класс распределений, обладающих свойством $V * V(t) \sim 2V(t)$. К ним относятся, например, распределения вида

$$V(t) = t^{-\beta} L(t), \tag{1.4}$$

где $L(t)$, как и прежде, — медленно меняющаяся функция.

Остановимся кратко на том, что уже известно относительно вероятностей больших уклонений функционалов (1.2) для распределений (1.3). Задачи об «умеренно больших» уклонениях сумм S_n для семиэкспоненциальных распределений изучались в [1–7] и ряде других работ, где, в частности, установлено, что для некоторого класса функций λ, близких к классу функций l в (1.3), выполнение условия

$$\mathbf{E} e^{\lambda(|X_j|)} < \infty \tag{1.5}$$

(или иных условий, включающих (1.3), см. ниже) влечет за собой справедливость так называемого крамеровского приближения для $\mathbf{P}(S_n > x)$ в области $x \le N(n)$, где $N(n)$ — решение уравнения $x^2 = n\lambda(x)$, т. е. справедливо равномерное при $x \le N(n)$ приближение для $\mathbf{P}(S_n > x)$ в виде

$$\mathbf{P}(S_n > x) = \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right] e^{-n\Lambda_k^0(\frac{x}{n})}(1 + o(1)); \tag{1.6}$$

здесь $\Phi(t)$ — функция распределения нормального закона,

$$\Lambda_k^0\left(\frac{x}{n}\right) = \Lambda_k\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x^2}{2n^2},$$

$\Lambda_k\left(\frac{x}{n}\right)$ — «урезанный ряд Крамера» или, что то же, урезанное разложение в ряд, соответствующее «функции уклонений для X» (формально определенной лишь при выполнении условия Крамера):

$$\Lambda_k(t) = \sum_{j=2}^{k} \frac{v_j t^j}{j!}, \tag{1.7}$$

где $k = \left[\frac{1}{1-\alpha}\right] + 1$, $v_2 = 1$, $v_3 = \gamma_3$, $v_4 = \gamma_4 - 3\gamma_3^2$ и т. д. (см., например, [1–3]), γ_j — семиинварианты распределения X_j, так что $\gamma_2 = 1$. Из (1.6) следует, в частности, что

$$\mathbf{P}(S_n > x) \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x} e^{-n\Lambda_k(\frac{x}{n})} \tag{1.8}$$

при $x \gg \sqrt{n} \to \infty$ и что

$$\mathbf{P}(S_n > x) \sim 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \tag{1.9}$$

при $x = o(n^{2/3})$. Соотношение $a_n \sim b_n$ означает, что $a_n = b_n(1 + o(1))$ при $n \to \infty$.

Аналогичные результаты для $\overline{S}_n$ установлены в [8]: при выполнении (1.5) равномерно по $x \le N(n)$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right] e^{-n\Lambda_k^0(\frac{x}{n})}(1 + o(1)); \tag{1.10}$$

там же представление вида (1.6) получено для $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$ при $a < 0$.

Вслед за зоной уклонений $x \le N(n) \approx n^{\frac{1}{2-\alpha}}$ можно выделить еще две зоны $N(n) < x \le N_2(n)$ и $x > N_2(n)$, где поведение асимптотики $\mathbf{P}(S_n > x)$ будет различным. В зоне уклонений $x \gg N_2(n) \approx n^{\frac{1}{2-2\alpha}}$ (асимптотика $N_2(n)$ будет уточнена позже) начинает действовать «принцип максимального скачка», т. е. основной вклад в большие уклонения S_n начинает вносить $\overline{X}_n = \max_{j\le n} X_j$, так что

$$\mathbf{P}(S_n > x) \sim \mathbf{P}(\overline{X}_n > x) = nV(x)(1 + o(1)). \tag{1.11}$$

Асимптотическое представление (1.11) для $x \gg n^{\frac{1}{2-2\alpha}}$ получено в [9–11]. Оно следует также из неравенств в [12]. О результатах, касающихся больших уклонений S_n для распределений (1.3), (1.5), см. также [13] (там же см. более полную библиографию). В [11] установлена также асимптотика $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ в тех случаях, когда она совпадает с асимптотикой $\mathbf{P}(S_n > x)$. В [10] рассматривались теоремы об асимптотике $\mathbf{P}(S_n > x)$, действующие на всей оси. В частности, найден вид $\mathbf{P}(S_n > x)$ в так называемой промежуточной зоне $x \in (N(n), N_2(n))$, но при условиях, смысл которых автору полностью уяснить не удалось. Промежуточная зона уклонений $N(n) < x \le N_2(n)$ изучалачь также в [14]. В этой работе рассмотрен весьма частный случай, когда распределение F имеет плотность

$$f(t) \sim e^{-|t|^\alpha};$$

асимптотика $\mathbf{P}(S_n > x)$ найдена при $\alpha > 1/2$ в виде рекуррентных соотношений, извлечь из которых явный вид асимптотики $\mathbf{P}(S_n > x)$ в общем случае нам не удалось.

Асимптотические представления для $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ в промежуточной зоне уклонений $N(n) < x \le N_2(n)$ нам были не известны. Они будут получены в настоящей работе (наряду с представлениями для $\mathbf{P}(S_n > x)$; представление (1.11) для $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ при $x \gg N_2(n)$ вытекает также из неравенств в [12], см. следствие 6.4). То же относится и к распределению $\overline{S}_n(a)$ при $a < 0$.

Как сообщил нам Д. А. Коршунов, в случае $a > 0$ в [15] установлено следующее асимптотическое представление для $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$ (см. также [16]):

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \sim \frac{1}{a} \int_x^{x+an} V(u)\, du,$$

справедливое при $x \to \infty$ и всех n для всех так называемых сильно субэкспоненциальных распределений $V(t)$. Д. А. Коршунов сообщил нам также, что достаточные условия для принадлежности классу сильно субэкспоненциальных распределений, приведенные в [15], будут выполнены, если выполнены (1.3) и условия $[\mathrm{D}_1]$, приведенные ниже.

Основной целью настоящей работы является:

1. Отыскание асимптотик (приближений первого порядка) вероятностей больших уклонений функционалов (1.2) в тех случаях, когда они были неизвестны.

2. Получение асимптотических разложений для этих вероятностей (приближений более высокого порядка) в области, где действует приближение максимальным скачком вида (1.11) (т. е. при $x \gg N_2(n)$). Исследование асимптотических разложений для $\mathbf{P}(S_n > x)$, $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ в области $x < N(n)$ должны проводиться иными методами, и оно выходит за рамки настоящей работы

(относительно $\mathbf{P}(S_n > x)$ см. [5,6]). Наличие таких разложений позволит, по-видимому, получать разложения и в области $N(n) < x < N_2(n)$.

Предлагаемая работа является в известном смысле продолжением работ [17–19], где изучалась асимптотика (включая асимптотические разложения) вероятностей больших уклонений функционалов (1.2), а также вероятностей пересечения траекторией случайного блуждания произвольной удаленной границы в случае, когда распределение скачков имеет вид (1.4) (для $\beta > 2$ в [17,18] и $\beta \in (1,2)$ в [19]). Мы будем использовать те же подходы, что и в [17–19], но в их модифицированном виде. При этом ввиду более значительных технических трудностей класс задач будет несколько сужен; вероятности пересечения произвольной границы рассматриваться не будут, хотя никаких существенных препятствий для их получения нет.

В § 2 будут изучены вероятности больших уклонений для S_n, § 3 посвящен получению того же сорта результатов для максимумов $\overline{S}_n$. Асимптотика $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$ соответственно в случаях $a > 0$ и $a < 0$ исследована в § 4, 5. Названные исследования во многом опираются на оценки, полученные в [12].

1.2. Рассмотрим теперь два вида условий (помимо (1.1), (1.3)), которые мы будем использовать. Условия первого типа относятся к гладкости функции $L(t)$ в (1.3). Мы приведем эти условия сначала в их упрощенной форме.

[D$_1$]. *Функция $L(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \ge t_0$ и некотором $t_0 > 0$,*

$$L'(t) = o\left(\frac{L(t)}{t}\right) \text{ при } t \to \infty. \tag{1.12}$$

Из (1.12) следует, что

$$l'(t) = \alpha t^{\alpha-1} L(t)(1+o(1)) = \frac{\alpha l(t)}{t}(1+o(1)). \tag{1.13}$$

Интегрируя это равенство в пределах от t до $t+u$, $u = o(t)$, $t \to \infty$, получим

$$l(t+u) - l(t) = ul'(t)(1+o(1)) = \frac{\alpha u l(t)}{t}(1+o(1)). \tag{1.14}$$

Для получения асимптотических разложений нам понадобится также более сильное условие

[D$_2$]. *Выполнено* [D$_1$], *и существует*

$$l''(t) = \alpha(\alpha-1)\frac{l(t)}{t^2}(1+o(1)). \tag{1.15}$$

В этом случае наряду с (1.14) будем иметь при $t \to \infty$

$$l(t+u) - l(t) = \int_t^{t+u} \left[l'(t) + \int_t^{t+v} l''(w)\,dw \right] dv = [\alpha t^{\alpha-1} L(t) + t^\alpha L'(t)]u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^{\alpha-2} L(t) u^2 (1+o(1)). \tag{1.16}$$

Мы будем использовать условия [D$_1$], [D$_2$] главным образом в форме соотношений (1.14), (1.16), при этом ограниченные приращения u в (1.12) и тем более приращения $u = o(1)$ в дальнейшем существенной роли играть не будут и в этом смысле условия (1.14), (1.16) трудно считать условиями обычной дифференцируемости. Они будут таковыми относительно Δ, если, например, вместо (1.14) рассмотреть эквивалентное условие вида

$$l(t(1+\Delta)) - l(t) = \alpha\Delta l(t)(1+o(1)) \tag{1.17}$$

при $t \to \infty$, $\Delta \to 0$. Однако здесь участвует растущий параметр t. Условия (1.14), (1.16) можно назвать условиями дифференцируемости «на бесконечности».

Если $l(t)$ определена только в целочисленных точках t (решетчатый случай), то при выполнении (1.14), (1.16) $l(t)$ всегда можно доопределить до дифференцируемой функции.

Все достаточно гладкие м.м.ф. удовлетворяют условиям [D_1], [D_2]. Например, для $L(t) = (\ln t)^\gamma$

$$L'(t) = \frac{\gamma}{t}(\ln t)^{\gamma-1} = o\left(\frac{L(t)}{t}\right), \quad l''(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}(\ln t)^\gamma\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln t}\right)\right).$$

Рассмотрим теперь условия второго вида. Они будут обеспечивать приближения вида (1.6), (1.10). Если бы мы предполагали выполненным (1.5), то эти условия не понадобились бы. Но условия (1.5), обеспечивающие (1.6), являются завышенными в части, касающейся отрицательных хвостов. Нет никаких сомнений в том, что, например, (1.6) по-прежнему останется справедливым, если потребовать лишь, чтобы

$$\mathbf{E}(e^{\lambda(X_1)}; X_1 > 0) < \infty \tag{1.18}$$

и число b в (1.1) было достаточно велико (ср. с [7, 10]). Нам представляется целесообразным наряду с (1.1), (1.3) предполагать в этой работе лишь то, что нам потребуется, а именно что справедливо приближение (1.6), которое мы будем называть *крамеровской аппроксимацией*. (Для приближения вида (1.11) мы уже использовали название *аппроксимации максимальным скачком*.) Чтобы сформулировать соответствующие условия, остановимся более подробно на характеристиках крамеровской зоны уклонений, промежуточной зоны и зоны, где действует аппроксимация максимальным скачком.

В дальнейшем основным условием на хвосты распределения X_j будет условие (1.3), где l удовлетворяет [D_1]. Рассмотрим сначала границу крамеровской зоны уклонений. Мы определим ее как значение $x = N_1 = N_1(n)$, при котором логарифмическая крамеровская аппроксимация

$$\ln \mathbf{P}(S_n > x) \sim -\frac{x^2}{2n} \tag{1.19}$$

имеет тот же порядок малости, что аппроксимация максимальным скачком

$$\ln \mathbf{P}(S_n > x) \sim \ln nV(x).$$

Другими словами, рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{2n} = -\ln nV(x),$$

или, что, с точки зрения асимптотики N, одно и то же, уравнение

$$\frac{x^2}{2n} = l(x). \tag{1.20}$$

Однако и это уравнение нам будет удобно несколько изменить, убрав из левой части коэффициент $1/2$. Итак, положим

$$w_1(t) = t^{-2}l(t) = t^{\alpha-2}L(t), \tag{1.21}$$

$$N_1(n) = w_1^{(-1)}\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1.22}$$

где $w_1^{(-1)}$ — функция, обратная к w_1. Так как в силу $[\mathrm{D}_1]$ функции $l(t)$ и $w_1(t)$ дифференцируемы (а стало быть, и непрерывны) при $t \ge t_0$ и некотором $t_0 > 0$ (из $[\mathrm{D}_1]$ можно извлечь также монотонность w_1), то можно записать

$$w_1(N_1(n)) = \frac{1}{n} \quad \text{при } n > \frac{1}{w_1(t_0)}.$$

Очевидно, что решение уравнения (1.20) равно $N_1(2n)$ и отличается от $N_1(n)$ постоянным множителем, близким к $2^{\frac{1}{2-\alpha}}$ (см. также (1.24)). Если функция $L(t)$ обладает свойством

$$L(tL^{\frac{1}{2-\alpha}}(t)) \sim L(t) \text{ при } t \to \infty \tag{1.23}$$

(этим свойством обладают степени $(\ln t)^\gamma$, $\gamma > 0$, и все еще более медленно меняющиеся функции), то нетрудно видеть, что

$$N_1(n) = n^{\frac{1}{2-\alpha}}L_1(n), \quad L_1(n) \sim L^{\frac{1}{2-\alpha}}(n^{\frac{1}{2-\alpha}}). \tag{1.24}$$

Уклонения $x = s_1N_1(n)$, где $s_1 \le 1$, мы будем относить к *«крамеровской области»*. Если $s_1 \to \infty$, то будем относить их к *«промежуточной области»*. Характеризацию уклонений можно эквивалентным образом проводить с помощью числа

$$\sigma_1 = \sigma_1(x) = nw_1(x). \tag{1.25}$$

Очевидно, что если $s_1 = \frac{x}{N_1(n)}$ фиксировано, то

$$\sigma_1(x) = nw_1(sN_1(n)) \sim s_1^{\frac{1}{\alpha-2}}, \tag{1.26}$$

так что уклонения относятся к крамеровской области, если $\sigma_1(x) > 1$.

Мы можем сформулировать теперь требуемое условие

[CA]. *В области*

$$0 < x \le N_+(n) = N_1(n)(1-\varepsilon(n)), \tag{1.27}$$

где $\varepsilon(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *справедливо равномерное приближение* (1.6).

Если выполнено условие

$$\mathbf{P}(|X_j| > t) \le e^{-l(t)}, \tag{1.28}$$

где l определена в (1.3), то выполнено (1.4) при $\lambda(t) = l(t) - \ln t$. Нетрудно видеть, что функция $N(n)$, являющаяся решением уравнения $x^2 = n\lambda(x)$ и определяющая область, где выполнено (1.6) (см. [2]), имеет вид

$$N(n) = N_1(n)(1-\varepsilon(n)),$$

где

$$\varepsilon(n) \sim \frac{\ln N_1}{(2-\alpha)l(N_1)} \to 0$$

при $n \to \infty$ (в работе [2], где установлено (1.6), предполагается также, что функция λ удовлетворяет некоторым условиям, которые будут выполнены, если выполнено $[\mathrm{D}_1]$ и l' монотонна).

Таким образом, при выполнении (1.28) условие [CA] всегда выполнено.

Ожидаемый результат состоит в том, что *для выполнения* [CA] *достаточно условий* (1.1) *при достаточно большом* b, (1.3) (или (1.18) при $\lambda = l$) *и условия* $[\mathrm{D}_1]$. Некоторые результаты в этом направлении содержатся в [10, лемма 1b] и [7, теорема 4]. Однако найти в этих работах подходящие утверждения, на которые можно было бы сослаться, нам не удалось.

Отметим, что в области отрицательных уклонений справедливо

$$\mathbf{P}(S_n < -t) = \Phi\left(-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)(1 + o(1)) \tag{1.29}$$

равномерно по

$$t \le N_-(n) \equiv (1-\varepsilon)\sqrt{(b-2)n\ln n}, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.30}$$

Если выполнено (1.28), то, очевидно, для $\mathbf{P}(S_n < -t)$ будет также справедливо приближение вида (1.6).

Аналогичным образом при изучении $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ мы будем использовать условие

$[\overline{\mathrm{CA}}]$. *В области* $0 < x \le N_+(n) = N_1(n)(1-\varepsilon(n))$, *где* $\varepsilon(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *справедливо равномерное приближение* (1.11).

Аналогично предыдущему с помощью результатов [8] нетрудно установить, что $[\overline{\mathrm{CA}}]$ всегда выполнено, если выполнено (1.28), $[\mathrm{D}_1]$. *Ожидаемый результат*, как и в случае с [CA], состоит в том, что для выполнения $[\overline{\mathrm{CA}}]$ достаточно выполнения (1.1), (1.3) (или (1.18) при $\lambda = l$) и $[\mathrm{D}_1]$.

Вернемся к характеризации областей уклонений. Введем в рассмотрение функцию

$$w_2(t) = w_1(t)l(t) = t^{-2}l^2(t) = t^{2\alpha-2}L^2(t) \tag{1.31}$$

и положим

$$N_2(n) = w_2^{(-1)}\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2-2\alpha}}L_2(t). \tag{1.32}$$

При выполнении (1.23) м.м.ф. L_2, как и L_1, можно найти в явном виде.

Из последующих утверждений будет видно, что уклонения $x = s_2N_2(n)$, $s_2 \to 0$, можно относить к *промежуточной* области. Если $s_2 \to \infty$ — то к области *аппроксимации максимальным скачком.*

В этом случае характеризацию уклонений также можно эквивалентным образом проводить с помощью значений

$$\sigma_2(x) = \sigma_2 = nw_2(x), \tag{1.33}$$

относя уклонение к промежуточной области, если $\sigma_2 \to \infty$.

§ 2. Большие уклонения сумм S_n

Для формулировки основного утверждения нам понадобятся некоторые предварительные рассмотрения.

Введем в рассмотрение функцию

$$g_2(t) = l(x-t) + \frac{t^2}{2n}. \tag{2.1}$$

Согласно [D_1] она дифференцируема при $t \le x - t_0$.

Если уклонения x принадлежат промежуточной области, т. е. (см. (1.25), (1.26))

$$\sigma_1 = nw_1(x) = nx^{-2}l(x) \to 0, \tag{2.2}$$

то функция $g_2(t)$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ имеет на интервале $(0, \varepsilon x)$ минимум, достигаемый в точке $t^* > 0$, $t^* = o(x)$. Действительно, $g_2'(t) < 0$ при $t \le 0$. С другой стороны, при достаточно больших x

$$g_2'(\varepsilon x) = -l'(x(1-\varepsilon)) + \frac{\varepsilon x}{n} = -\alpha x^{\alpha-1}(1-\varepsilon)^{\alpha-1}L(x)(1+o(1)) + \frac{\varepsilon x}{n} \ge \frac{x}{n}(\varepsilon - \alpha(1-\varepsilon)^{\alpha-1}\sigma_1) > 0 \tag{2.3}$$

в силу (2.2). Отсюда следует, что $t^* = o(x)$.

В дальнейшем наряду с $l(x)$ важную роль будет играть функция

$$z = z(x) = (l'(x))^{-1} \sim \frac{x}{\alpha l(x)} = \frac{x^{1-\alpha}}{\alpha L(x)}. \tag{2.4}$$

Свойство (2.2) в терминах z можно записать в виде

$$n \ll xz. \tag{2.5}$$

Для отыскания приближения для t^* заметим, что

$$\frac{d}{dt} l(x-t)\Big|_{t=t^*} = -l'(x)(1+o(1))$$

и, следовательно,

$$g_2'(t^*) = 0 = -l'(x)(1+o(1)) + \frac{t^*}{n}.$$

Отсюда находим

$$t^* = nl'(x)(1+o(1)) = \frac{n}{z}(1+o(1)) = o(n). \tag{2.6}$$

Заметим теперь, что поскольку

$$n\Lambda_k\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{t^2}{2n}(1+o(1)), \quad \Lambda_k'\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{t}{n}(1+o(1)), \tag{2.7}$$

то все сказанное (и, в частности, соотношение (2.6)) сохранится, если в определении функции $g_2(t)$ (2.1) функцию $\frac{t^2}{2n}$ заменить на $n\Lambda_k\left(\frac{t}{n}\right)$, т. е. под t^* понимать точку минимума функции

$$g_k(t) = g_k(t,x,n) = l(x-t) + n\Lambda_k\left(\frac{t}{n}\right). \tag{2.8}$$

Положим при $k = \left[\frac{1}{1-\alpha}\right] + 1$

$$M = M(x,n) = \min_t g_k(t,x,n). \tag{2.9}$$

Очевидно, что в силу [D_1]

$$M = l(x-t^*) + n\Lambda_k\left(\frac{t^*}{n}\right) = l(x) - \frac{n}{2}(l'(x))^2(1+o(1)) = l(x) - \frac{n\alpha^2}{2}\left(\frac{l(x)}{x}\right)^2(1+o(1)) = l(x) - \frac{\alpha^2}{4}nw_2(x)(1+o(1)) = l(x)\left(1 - \frac{\alpha^2}{4}nw_1(x)(1+o(1))\right). \tag{2.10}$$

Поэтому если $\sigma_2 = nw_2(x) \to 0$, т. е. уклонения принадлежат области аппроксимации максимальным скачком, то

$$M = l(x) + o(1). \tag{2.11}$$

Если уклонения лежат в промежуточной области, т. е. $\sigma_1 = nw_1(x) \to 0$, то

$$M = l(x)(1 + o(1)). \tag{2.12}$$

Мы можем сформулировать теперь основное утверждение.

Теорема 2.1. 1. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.3), [D_2] *и* [CA]. *Тогда в промежуточной зоне уклонений*

$$\mathbf{P}(S_n > x) = ne^{-M}(1 + \varepsilon(x, n)), \tag{2.13}$$

где $\varepsilon(x, n) = o(1)$ *равномерно (см. замечание* 2.2*) в области значений* x, n *такой, что*

$$n \to \infty, \quad s_1 = \frac{x}{N_1(n)} \to \infty.$$

Значения $M = M(x, n)$, $N_1(n)$, $N_2(n)$ *определены в* (2.8)–(2.11), (1.22), (1.32). *Условие* $s_1 \to \infty$ *можно заменить на* $\sigma_1 \to 0$.

2. *Пусть выполнено* [D_1] *и* $s_2 = \frac{x}{N_2(n)} \to \infty$ *или, что то же,* $\sigma_2 = nw_2(x) \to 0$ *(область аппроксимации максимальным скачком). Тогда равномерно по* x *и* n *из указанной области*

$$\mathbf{P}(S_n > x) = nV(x)(1 + o(1)). \tag{2.14}$$

3. *Пусть выполнено* [D_2] *и* $s_2 = \frac{x}{N_2(n)} \to \infty$ ($\sigma_2 = nw_2(x) \to 0$ *или, что то же,* $n = o(z^2)$, *где* $z = (l'(x))^{-1} \sim \frac{x}{\alpha l(x)}$). *Тогда равномерно по* x *из указанной области и при всех* n

$$\mathbf{P}(S_n > x) = nV(x)\left[1 + \frac{n-1}{2z^2} + \frac{(\alpha - 1)(n-1)}{2xz}(1 + o(1)) + O\left(\frac{\sqrt{n}}{z}\right)^{b'}\right], \tag{2.15}$$

где $b' = \min(3, b)$.

Замечание 2.1. Как уже отмечалось, условие [CA] в п. 1 теоремы, по-видимому, излишне.

Замечание 2.2. Равномерность в первом утверждении теоремы означает следующее. Для любых последовательностей $n' \to \infty$, $s_1' \to \infty$ можно построить $\varepsilon' = \varepsilon'(n', s_1') \to 0$ такое, что в (2.13) выполняется $\varepsilon(x, n) \le \varepsilon'$ при всех $n \ge n'$, $s_1 \ge s_1'$.

Аналогичный смысл имеет равномерность остальных членов в других утверждениях теоремы (2.14) и (2.15).

Замечание 2.3. Из (2.10)–(2.12) видно, что

$$e^{-M} = V(x)e^{\frac{\alpha^2}{4}\sigma_2(1+o(1))}$$

и, стало быть, при $\sigma_2 \to \infty$ (в промежуточной области уклонений) $e^{-M} \gg V(x)$, так что асимптотики (2.13) и (2.14) существенно различны. С другой стороны, из (2.12) следует, что «грубые асимптотики», т. е. асимптотики $\ln \mathbf{P}(S_n > x)$, в промежуточной области ($\sigma_1 \to 0$, см. (2.10), (2.12)) совпадают:

$$\ln \mathbf{P}(S_n > x) = [\ln nV(x)](1 + o(1)) = [\ln V(x)](1 + o(1)).$$

Как уже отмечалось, утверждение, близкое к (2.14), установлено в [9].

Замечание 2.4. При $b > 3$ в п. 3 теоремы можно получать более полные асимптотические разложения.

Для доказательства теоремы нам потребуются два вспомогательных утверждения. Первое из них относится к оценкам вероятностей $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ и $P \equiv \mathbf{P}\left(\overline{S}_n > x; \bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \le y\}\right)$ при фиксированном $r = \frac{x}{y} \ge 1$.

Буквой c с индексами или без в дальнейшем обозначаются различные постоянные, не обязательно одни и те же, если они присутствуют в разных формулах.

Лемма 2.1. 1. *Пусть выполнено* $[\mathrm{D}_1]$. *Тогда существует постоянная* $c < \infty$ *такая, что при любом фиксированном* $h > 1$, *всех* n *и всех достаточно больших* y *выполняется*

$$P \le c[nV(y)]^{r - \frac{h\sigma_1(y)}{2}}, \quad r = \frac{x}{y}. \tag{2.16}$$

2. *Если при каких-нибудь фиксированных* $h > 1$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполняется* $\sigma_1 h \ge 1 + \varepsilon$, *то при* $x = y$ *и всех достаточно больших* n

$$P \le e^{-\frac{x^2}{2nh}}. \tag{2.17}$$

3. *Если* $\sigma_1 h < 2^{\alpha-1}$, *то*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le cnV(x)^{(1+\sigma^*)^{-\alpha}}, \tag{2.18}$$

где $r_0 = 1 + \sigma^*$ *есть решение уравнения* $1 = r - \frac{\sigma_1 h}{2} r^{2-\alpha}$, $\sigma^* \sim \frac{\sigma_1 h}{2}$ *при* $\sigma_1 \to 0$.

При $\sigma_2 < c_1$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le c_2 nV(x). \tag{2.19}$$

4. *Если* $\sigma_1 h \ge 2^{\alpha-1}$, *то*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le cnV(x)^{\frac{1}{2\sigma_1 h}}.$$

Пусть $h > 1$, $\varepsilon > 1$ — *любые фиксированные числа. Если* $\sigma_1 h \ge 1 + \varepsilon$, *то при* $l(x) > 2\ln n$ *и всех достаточно больших* n

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le e^{-\frac{x^2}{2nh}} = V(x)^{\frac{1}{2\sigma_1 h}}. \tag{2.20}$$

В этом утверждении области уклонений y (или x) можно эквивалентным образом характеризовать с помощью параметров $s_1 = \frac{y}{N_1(n)}$ и $s_2 = \frac{y}{N_2(n)}$, поскольку для не очень быстро растущих s_i выполняется

$$s_1 \sim \sigma_1^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad s_2 \sim \sigma_2^{\frac{1}{2\alpha-2}}.$$

Лемма 2.1 вытекает из теоремы 5.1 и следствия 5.1 в [12].

Второе вспомогательное утверждение описывает следствие условия [CA].

Лемма 2.2. *Пусть* X *имеет распределение* (1.3) *и не зависит от* S_n. *Тогда при выполнении* [CA]

$$\mathbf{P}(X + S_n > x; N_- < S_n \le N_+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int\limits_{N_-}^{N_+} V(x-t) e^{-n\Lambda_k(\frac{t}{n})}\, dt (1 + o(1)), \tag{2.21}$$

где $N_\pm$ *определены в* (1.27), (1.30).

Доказательство. Вероятность

$$p \equiv \mathbf{P}(X+S_n>x; N_- < S_n \le N_+)$$

представим в виде

$$p = -\int dV(t)\mathbf{P}(S_n > x-t; N_- < S_n \le N_+)$$
$$= \mathbf{P}(N_- < S_n \le N_+)V(x-N_-) - \int\limits_{x-N_+}^{x-N_-} dV(t)\mathbf{P}(S_n > x-t). \quad (2.22)$$

Будем рассматривать правую часть (1.6) без множителя $(1+o(1))$ как распределение Q_n некоторой случайной величины S_n^*:

$$Q_n(x) = \mathbf{P}(S_n^* > x) = \left[1-\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right] e^{-n\Lambda_k(\frac{x}{n})+\frac{x^2}{2n}}.$$

Тогда S_n^* имеет плотность

$$q_n(x) = -Q_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-n\Lambda_k(\frac{x}{n})}(1+o(1))$$

равномерно на $[N_-, N_+]$. Далее, в силу (2.22) и (1.6)

$$p = \left[\mathbf{P}(N_- < S_n^* \le N_+)V(x-N_-) - \int\limits_{x-N_+}^{x-N_-} dV(t)Q_n(x-t)\right](1+o(1))$$
$$= \mathbf{P}(X+S_n^* > x, N_- < S_n^* \le N_+)(1+o(1)) = \int\limits_{N_-}^{N_+} q_n(t)V(x-t)\,dt(1+o(1))$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int\limits_{N_-}^{N_+} e^{-n\Lambda_k(\frac{t}{n})} V(x-t)\,dt(1+o(1)).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Обозначим

$$B_j = \{X_j \le y\}, \quad B = \bigcap_{j=1}^n B_j, \quad G_n = \{S_n > x\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(S_n > x) = \mathbf{P}(G_nB) + \mathbf{P}(G_n\overline{B}), \quad (2.23)$$

где $P = \mathbf{P}(G_nB)$ оценено в лемме 2.1:

$$P \le c[nV(y)]^{r-\frac{h\sigma_1(y)}{2}}, \quad r = \frac{x}{y}, \quad \sigma_1(y) = nw_1(y).$$

Так как по условию $\sigma_1 \equiv \sigma_1(x) \to 0$, то при $y = \delta x$, где $\delta \in (0,1)$ фиксировано, выполняется $\sigma_1(y) \to 0$,

$$V(y)^{r-\frac{h\sigma_1(y)}{2}} = V(y)^{r+o(1)} = e^{-l(\delta x)(1/\delta+o(1))}$$
$$= \exp\{-l(x)(\delta^{\alpha-1}+o(1))\} \le V(x)^{1+\varphi} \quad (2.24)$$

при $\varphi \geq \frac{\delta^{\alpha-1}-1}{2} > 0$ и всех достаточно больших x. При $x \gg \sqrt{n}$ та же оценка будет справедлива, очевидно, и для P.

Для второго слагаемого в (2.23) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(G_n\overline{B}) \geq \mathbf{P}(G_n\overline{B}) \geq \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) - \sum_{j<i} \mathbf{P}(G_n\overline{B}_i\overline{B}_j)$$
$$\geq \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) - \frac{n(n-1)}{2}\mathbf{P}^2(X_1 > y), \quad (2.25)$$

так что при $y = \delta x$, $\delta \in (0,1)$, $x \gg \sqrt{n}$

$$\mathbf{P}(G_n\overline{B}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) + O((nV(y))^2),$$
$$\mathbf{P}(G_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) + O(V(x)^{1+\varphi}), \quad \varphi > 0. \quad (2.26)$$

Таким образом, основная задача теперь состоит в оценке слагаемых

$$\mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) = \mathbf{P}(G_n\overline{B}_n) = \mathbf{P}(S_{n-1} + X_n > x, X_n > y)$$
$$= \mathbf{P}(X_n > y, S_{n-1} > x-y) + \mathbf{P}(S_{n-1} \leq x-y, S_{n-1} + X_n > x). \quad (2.27)$$

Здесь первое слагаемое равно

$$P_{(1)} \equiv V(y)\mathbf{P}(S_{n-1} > x - y).$$

В силу п. 3 леммы 2.1 при $y = \delta x$ получаем

$$P_{(1)} \leq cnV(\delta x)V\left(x(1-\delta)\left(1 - \frac{\sigma_1(x(1-\delta))h}{2}\right)\right). \quad (2.28)$$

Последующие оценки не чувствительны по отношению к асимптотике $L(x)$. Поэтому для простоты положим на время $L(x) \equiv 1$. Тогда из (2.28) получаем

$$P_{(1)} \leq cn\exp\left\{-(\delta x)^\alpha - \left[x(1-\delta)\left(1 - \frac{\sigma_1(x(1-\delta))h}{2}\right)\right]^\alpha\right\}$$
$$= cn\exp\{-x^\alpha[\delta^\alpha + (1-\delta)^\alpha + O(\sigma_1)]\}. \quad (2.29)$$

Функция $\varphi(\delta) = \delta^\alpha + (1-\delta)^\alpha - 1$ выпукла на $[0,1]$, симметрична относительно точки $\delta = 1/2$, $\varphi'(0) = \infty$. Поэтому $\varphi(\delta) > 0$ при $\delta \in (0,1)$ и для любого $\delta \in (0,1/2)$ выполняется

$$\varphi(\delta) > 2\delta(2^{1-\alpha} - 1), \quad P_{(1)} \leq cn\exp\{-x^\alpha(1 + \varphi(\delta) + O(\sigma_1))\}. \quad (2.30)$$

В общем случае при произвольной м.м.ф. L в этой оценке вместо x^α будет стоять $l(x)$, а при $\varphi(\delta)$ появится множитель $(1 + o(1))$. В итоге правая часть в (2.30) допускает оценку $cn(V(x))^{1+\varphi}$, $\varphi > 2/3\varphi(\delta)$, что при $x \gg \sqrt{n}$ дает

$$nP_{(1)} \leq (V(x))^{1+\varphi}, \quad \varphi > \frac{\varphi(\delta)}{2} > 0. \quad (2.31)$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (2.27):

$$P_{(2)} \equiv \mathbf{P}(S_{n-1} \leq x - y, S_{n-1} + X_n > x)$$
$$= \mathbf{E}[V(x - S_{n-1}); S_{n-1} \leq x - y] = E_1 + E_2 + E_3, \quad (2.32)$$

где при $N_- = -c\sqrt{n \ln n}$ положим (см. (1.27), (1.30))

$$\begin{gathered} E_1 = \mathbf{E}[V(x - S_{n-1}); S_{n-1} \le N_-], \\ E_2 = \mathbf{E}[V(x - S_{n-1}); N_- \le S_{n-1} \le N_+], \\ E_3 = \mathbf{E}[V(x - S_{n-1}); N_+ < S_{n-1} \le (1-\delta)x]. \end{gathered} \tag{2.33}$$

Начнем с оценки E_1. Так как $\mathbf{E}|X_1|^b < \infty$ при $b > 2$, в силу оценок из [12] (см. там следствие 4.2)

$$\mathbf{P}(S_n \le N_-) \le cn|N_-|^{-b},$$

$$\begin{aligned} E_1 \le V(x - N_-)\mathbf{P}(S_n \le N_-) \le cnV(x)|N_-|^{-b} \\ \le cV(x)n^{-\frac{b-2}{2}}(\ln n)^{-b/2} = o(V(x)n^{-\frac{b-2}{2}}). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Рассмотрим теперь E_2. Согласно лемме 2.2 (для упрощения записи мы заменяем $n-1$ на n — это в асимптотике E_2 ничего не меняет)

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int\limits_{N_-}^{N_+} V(x-t)e^{-n\Lambda_k(\frac{t}{n})}\, dt(1+o(1)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int\limits_{N_-}^{N_+} e^{-g_k(t)}\, dt(1+o(1)). \tag{2.35}$$

Свойства функции

$$g_k(t) = l(x-t) + n\Lambda_k\left(\frac{t}{n}\right)$$

уже обсуждались перед формулировкой теоремы 2.1. При $t = o(x)$, $t = o(n)$ в силу [D$_2$] имеем

$$g_k''(t) = \alpha(\alpha-1)\frac{l(x)}{x^2}(1+o(1)) + \frac{1+o(1)}{n} = \alpha(\alpha-1)w_1(x)(1+o(1)) + \frac{1+o(1)}{n} \sim \frac{1}{n}$$

при $\sigma_1 \to 0$. Поэтому

$$g_k(t) = g_k(t^*) + \frac{(t-t^*)^2}{n}(1+o(1)). \tag{2.36}$$

Покажем теперь, что точка максимума t^* и ее $\sqrt{n}$-окрестность лежат внутри интервала интегрирования $[N_-, N_+]$. Если $s_1 \to \infty$ настолько медленно, что $L(s_1 N_1(n)) \sim L(N_1(n))$, то в силу (2.6)

$$t^* \sim \alpha n\frac{l(x)}{x} = \alpha x n w_1(x) = \alpha n s_1 N_1(n) w_1(s_1 N_1(n)) \sim \alpha s_1^{\alpha-1} N_1(n) = o(N_1(n)). \tag{2.37}$$

Если $s_1 \to \infty$ более быстрым образом, то тем более

$$t^* = o(N_1(n)). \tag{2.38}$$

Кроме того, в силу условия [CA] $N_+ \sim N_1$

$$t^* = o(N_+(n)). \tag{2.39}$$

Так как $\sqrt{n} = o(N_+(n))$, наряду с (2.39) выполняется также соотношение

$$t^* + c\sqrt{n} \ll N_+.$$

Все это вместе с (2.36) позволяет заключить, что

$$E_2 = e^{-g_k(t^*)}(1+o(1)) = e^{-M}(1+o(1)). \tag{2.40}$$

Нам остается оценить

$$E_3 = \mathbf{E}[V(x - S_{n-1}); N_+ < S_{n-1} \le (1-\delta)x] = -\int\limits_{N_+}^{(1-\delta)x} V(x-u)d\mathbf{P}(S_{n-1} > u)$$

$$= -V(x-u)\mathbf{P}(S_{n-1} > u)\Big|_{N_+}^{(1-\delta)x} + \int\limits_{N_+}^{(1-\delta)x} \mathbf{P}(S_{n-1} > u)V(x-u)l'(x-u)\,du.$$

В силу леммы 2.1 и того, что $l'(x) \to 0$ при $x \to \infty$, получаем

$$E_3 \le V(x-N_+)\mathbf{P}(S_{n-1} > N_+) + \int\limits_{N_+}^{(1-\delta)x} V(x-u)l'(x-u)cnV\left(u\left(1-\frac{\sigma_1(u)h}{2}\right)\right)du$$

$$\le cnV(x-N_+)V\left(N_+\left(1-\frac{\sigma_1(N_+)h}{2}\right)\right)$$

$$+ cn\int\limits_{N_+}^{(1-\delta)x} V(x-u)V\left(u\left(1-\frac{\sigma_1(u)h}{2}\right)\right)du\, o(1), \quad (2.41)$$

где $\sigma_1(u) \le \sigma_1(N_+) \sim \sigma_1(N_1) = 1$. Произведения вида

$$V(x-u)V\left(u\left(1-\frac{\sigma_1(u)h}{2}\right)\right),$$

присутствующие в (2.41), уже оценивались нами в (2.28), (2.29), но при u, сравнимом с x, в то время как в (2.41) возможно $u = o(x)$. В этом случае при $h \le 4/3$, $u \ge N_+$

$$V(x-u)V\left(u\left(1-\frac{\sigma_1(u)h}{2}\right)\right) = \exp\left\{-l(x-u) - l\left(u\left(1-\frac{\sigma_1(u)h}{2}\right)\right)\right\}$$

$$\le \exp\left\{-l(x) + \frac{\alpha u l(x)}{x}(1+o(1)) - l\left(u\left(1-\frac{h}{2}\right)\right)(1+o(1))\right\}$$

$$\le \exp\left\{-l(x) + \frac{\alpha u l(x)}{x}(1+o(1)) - 3^{-\alpha}l(u)(1+o(1))\right\},$$

где $\frac{l(x)}{x} = o\left(\frac{l(u)}{u}\right)$ при $u = o(x)$. Поэтому для таких $u \to \infty$

$$V(x-u)V\left(u\left(1-\frac{\sigma_1(u)h}{2}\right)\right) \le V(x)V(u)^\gamma$$

при некотором фиксированном $\gamma > 0$. Отсюда и из (2.41) следует, что при достаточно больших n

$$E_3 \le V(x)V(N_1)^\varphi \quad (2.42)$$

при некотором φ, $0 < \varphi < 1$.

Собирая оценки (2.34), (2.40), (2.42), получим

$$P_{(2)} = e^{-M}(1+o(1)).$$

Вместе с (2.26), (2.28) это доказывает первое утверждение теоремы.

Второе утверждение (2.14) вытекает из оценок в [12] (см. следствие 6.4). Оно будет следовать также из последующих рассуждений (см. (2.43)–(2.47)). Если выполнены [D_2] и [CA], то оно вытекает из первого утверждения и (2.11).

Докажем третье утверждение (2.15). Оценка $P_{(1)}$ остается прежней. Изменится лишь оценка $P_{(2)}$. Здесь вместо (2.32), (2.33) надо использовать иное разбиение на части области интегрирования $S_{n-1} \le x - y$, не предполагая теперь, вообще говоря, что $n \to \infty$.

Положим при $z = \frac{1}{l'(x)} \sim \frac{x}{\alpha l(x)}$

$$P_{(2)} = E_1' + E_2' + E_3',$$

где

$$\begin{gathered} E_1' = \mathbf{E}[V(x - S_{n-1}); S_{n-1} < -z], \\ E_2' = \mathbf{E}[V(x - S_{n-1}); |S_{n-1}| \le z], \\ E_3' = \mathbf{E}[V(x - S_{n-1}); z < S_{n-1} \le (1-\delta)x]. \end{gathered} \tag{2.43}$$

Оценка E_1' вытекает из неравенства Чебышева:

$$E_1' \le V(x+z)\mathbf{P}(S_{n-1} < -z) \le V(x) O\left(\frac{n^{b/2}}{z^b}\right). \tag{2.44}$$

Оценка E_2' для доказательства (2.14) также вполне очевидна. Так как $V(x+v) = V(x)(1+o(1))$ при $v = o(z)$ и $0 < c_1 < V(x+v)/V(x) < c_2 < \infty$ при $|v| < z$, то в силу центральной предельной теоремы

$$E_2' = V(x)(1+o(1)). \tag{2.45}$$

Для доказательства (2.15) потребуется более детальный анализ E_2', который будет приведен ниже.

Для оценки E_3' следует различать два случая: $z \le N_1$ и $z > N_1$.

Во втором случае в силу леммы 2.1 аналогично (2.41) находим

$$\begin{aligned} E_3' = \mathbf{E}[V(x - S_{n-1}); z < S_n \le (1-\delta)x] \le V(x-z)\mathbf{P}(S_{n-1} > z) \\ + \int\limits_z^{x(1-\delta)} V(x-u) l'(x-u) 2nV\left(u\left(1 - \frac{\sigma_1(u)h}{2}\right)\right) du, \end{aligned} \tag{2.46}$$

где $\frac{\sigma_1(u)h}{2} \le \frac{h}{2}$ при $u \ge z \ge N_1$. Повторяя рассуждения, следующие за (2.41), при $z \le u \le x(1-\delta)$ получим

$$\begin{gathered} V(x-u)V\left(u\left(1 - \frac{\sigma_1(u)h}{2}\right)\right) \le V(x)V(y)^\gamma, \quad \gamma > 0, \\ E_3' \le V(x)V(z)^\varphi, \quad 0 < \varphi < 1. \end{gathered} \tag{2.47}$$

Если $z \le N_1$, то интеграл E_3' надо разбить на две части:

$$E_{3,1} = \mathbf{E}[V(x - S_{n-1}); z < S_{n-1} \le N_1]$$

и

$$E_{3,2} = \mathbf{E}[V(x - S_{n-1}); N_1 < S_{n-1} \le (1-\delta)x]. \tag{2.48}$$

Интеграл $E_{3,2}$ совпадает с E_3' в предыдущих рассмотрениях и оценивается величиной $V(x)V(N_1)^\varphi \le V(x)V(z)^\varphi$, $\varphi > 0$.

Для $E_{3,1}$ аналогично предыдущему имеем

$$E_{3,1} = \mathbf{E}[V(x - S_{n-1}); S_{n-1} \in [z, N_1]] = -\int_z^{N_1} V(x-u)\, d\mathbf{P}(S_{n-1} > u)$$

$$\le V(x-z)\mathbf{P}(S_{n-1} > z) + \int_z^{N_1} \mathbf{P}(S_{n-1} > u) V(x-u) l'(x-u)\, du$$

$$\le V(x-z) e^{-\frac{z^2}{2nh}} + \int_z^{N_1} V(x-u) l'(x-u) e^{-\frac{u^2}{2nh}}\, du.$$

Последнее неравенство здесь является следствием п. 4 леммы 2.1. При $u \le N_1 = o(x)$ имеем

$$l(x-u) = l(x) - \frac{\alpha l(x) u}{x}(1 + o(1)).$$

Заметим, что при $u \ge z \sim \frac{x}{\alpha l(x)}$ и $\sigma_2(x) \to 0$ справедливо

$$\frac{nl(x)}{xu} \le cn\left(\frac{l(x)}{x}\right)^2 = c\sigma_2(x) \to 0.$$

Поэтому при достаточно больших x

$$V(x-u) e^{\frac{u^2}{2nh}} \le V(x) e^{-\frac{u^2}{3nh}}, \quad E_{3,1} \le V(x) e^{-\frac{z^2}{3nh}}, \quad E_3' \le V(x)(V^{\varphi}(z) + e^{-\frac{z^2}{3nh}}). \tag{2.49}$$

Так как

$$\frac{z^2}{n} \sim \frac{1}{\alpha^2 \sigma_2(x)} \to \infty,$$

собирая полученные оценки, мы приходим к (2.14).

Осталось установить справедливость асимптотических разложений (2.15). Для этого необходимо более детально исследовать интеграл E_2'. Остальные оценки остаются без изменений. Напомним, что в рассматриваемой области уклонений $z \gg \sqrt{n}$. Имеем

$$E_2' = \mathbf{E}[e^{-l(x - S_{n-1})}; |S_{n-1}| \le z], \tag{2.50}$$

где при $S = o(x)$ в силу [D$_2$] (см. (1.16))

$$\begin{gathered} l(x-S) = l(x) - l'(x)S + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{l(x)}{x^2}S^2(1+o(1)), \\ l(x) - l(x-S) = \frac{S}{z} + \frac{(1-\alpha)}{2}\frac{S^2}{xz}(1+o(1)). \end{gathered} \tag{2.51}$$

Очевидно, что при $S \le z$

$$|l(x-S) - l(x)| \le \text{const}$$

и функцию $e^{l(x)-l(x-S)}$ можно разложить в ряд по степеням $(l(x) - l(x-S))$:

$$e^{l(x)-l(x-S)} = 1 + \frac{S}{z} + \frac{(1-\alpha)}{2}\frac{S^2}{xz}(1+o(1)) + \frac{S^2}{2z^2} + O\left(\frac{|S|^{b'}}{z^{b'}}\right), \tag{2.52}$$

где $b' = \min(b, 3)$, остатки $o(1)$ и $O(\cdot)$ равномерны по $|S| \le z$. Подставляя в (2.52) S_{n-1} вместо S и используя (2.50), получим

$$E_2' = V(x)\mathbf{E}\biggl[1 + \frac{S_{n-1}}{z} + \frac{(1-\alpha)}{2}\frac{S_{n-1}^2}{xz}(1+o(1)) \\ + \frac{S_{n-1}^2}{2z^2} + O\biggl(\frac{|S_{n-1}|^{b'}}{z^{b'}}\biggr); |S_{n-1}| \le z\biggr]. \quad (2.53)$$

Чтобы оценить это выражение, необходимо оценить

$$\begin{gathered} T_k = \mathbf{E}(|S_{n-1}|^k; |S_{n-1}| > z), \quad k = 0, 1, 2; \\ U_k = \mathbf{E}(|S_{n-1}|^{b'}; |S_{n-1}| \le z) \le \mathbf{E}|S_{n-1}|^{b'} = O(n^{b'/2}). \end{gathered} \quad (2.54)$$

Для оценки T_k следует воспользоваться неравенствами в [12] (или неравенствами Нагаева — Фука). Если $z > \sqrt{\frac{(b-2)}{2} n \ln n}$ (см. следствие 4.2 в [12]), то для $v \ge z$

$$\begin{gathered} \mathbf{P}(|S_{n-1}| > v) \le cnv^{-b}, \\ T_k \le c_1 n \int_z^\infty v^{k-b-1}\,dv = \frac{c_1 n z^{k-b}}{b-k} = z^k O\biggl(\biggl(\frac{\sqrt{n}}{z}\biggr)^b\biggr), \quad k = 0, 1, 2. \end{gathered} \quad (2.55)$$

Если $z \le \sqrt{\frac{(b-2)}{2} n \ln n}$, то при $\sqrt{n} \ll z \le v < \sqrt{\frac{(b-2)}{2} n \ln n}$ следует воспользоваться неравенством (см. следствие 4.2 в [12])

$$\mathbf{P}(|S_{n-1}| > v) \le 2e^{-\frac{v^2}{2nh}}, \quad h > 1.$$

Нетрудно видеть, что при оценивании T_k это даст дополнительное слагаемое вида

$$cz^{k-2} n e^{-\frac{z^2}{2nh}}$$

и не ухудшит оценки

$$T_k = z^k O\biggl(\biggl(\frac{\sqrt{n}}{z}\biggr)^b\biggr). \quad (2.56)$$

Возвращаясь теперь к (2.53) и замечая, что $\mathbf{E}S_{n-1} = 0$, $\mathbf{E}S_{n-1}^2 = n-1$, $nz^{-b} = o\bigl(\frac{n^{b'/2}}{z^{b'}}\bigr)$, получим

$$E_2' = V(x)\biggl[1 + \frac{n-1}{2z^2} + \frac{(1-\alpha)}{2}\frac{(n-1)}{xz}\Bigl(1 + o(1)\Bigr) + O\biggl(\frac{n^{b'/2}}{z^{b'}}\biggr)\biggr].$$

Присоединяя оценки для E_1' и E_3', установленные выше, получим (2.15). Равномерность оценок, названная в теореме 2.1, проверяется очевидным образом, так как всюду для $o(1)$ и $O(\cdot)$ можно выписать явные оценки в виде функций от x и n.

Теорема доказана.

§ 3. Большие уклонения максимумов сумм $\overline{S}_n$

Как уже отмечалось, асимптотика $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ в зоне умеренно больших уклонений $x \le N_+(n) \sim N_1(n)$ (N_1 определено в (1.22)) изучалась в [8], где установлено, что при выполнении (1.5) справедливо представление (1.10). В этом параграфе, как и в § 2, нас будут интересовать уклонения $x \gg N_1(n)$.

Аналогично предыдущему отметим, что условие (1.5) завышено для выполнения (1.10) и в связи с этим будем предполагать выполненным условие $[\overline{\mathrm{CA}}]$, приведенное в § 2. Напомним, что *ожидаемый результат*, как и в случае с условием [CA], состоит в том, что выполнение (1.1), (1.3) (или (1.18) при $\lambda = l$) влечет за собой $[\overline{\mathrm{CA}}]$.

Теорема 3.1. 1. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.3), $[\mathrm{D}_2]$ *и* $[\overline{\mathrm{CA}}]$. *Тогда в промежуточной зоне уклонений*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) = 2ne^{-M}(1 + \varepsilon(x,n)), \tag{3.1}$$

где $\varepsilon(x,n) = o(1)$ *равномерно (см. замечание* 2.2) *в области значений* x *и* n *такой, что*

$$n \to \infty, \quad s_1 = \frac{x}{N_1(n)} \to \infty, \quad s_2 = \frac{x}{n_2(n)} \to 0. \tag{3.2}$$

Значения $M = M(x,n)$, $N_1(n)$, $N_2(n)$ *определены в* (2.8)–(2.11), (1.22), (1.30). *Условия* $s_1 \to \infty$, $s_2 \to 0$ *можно заменить на* $\sigma_1 \to 0$, $\sigma_2 \to \infty$.

2. *Пусть выполнено* $[\mathrm{D}_1]$ *и* $s_2 = \frac{x}{N_2(n)} \to \infty$ $(\sigma_2 \to 0)$. *Тогда равномерно по* x *в указанной области*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) = nV(x)(1 + o(1)). \tag{3.3}$$

3. *Пусть выполнено* $[\mathrm{D}_2]$ *и* $s_2 \to \infty$ ($\sigma_2 \to 0$ *или, что то же,* $n \ll z^2$, *где* $z = (l'(x))^{-1} \sim \frac{x}{\alpha l(x)}$). *Тогда равномерно по* x *из указанной области и при всех* n

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) = nV(x)\Biggl\{1 + \frac{1}{zn}\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{E}\overline{S}_i + \frac{1}{2z^2}\Biggl[\frac{(n-1)(n-2)}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\mathbf{E}(\overline{S}_j)^2\Biggr]\Biggl[1 + \frac{(1-\alpha)z}{x}(1+o(1))\Biggr] + O\biggl(\frac{n^{b'/2}}{z^{b'}}\biggr)\Biggr\}, \tag{3.4}$$

где $b' = \min(b,3)$.

Заметим, что здесь в силу принципа инвариантности и равномерной интегрируемости $\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}}$, $\bigl(\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}}\bigr)^2$ (см. [12]) выполняется

$$\mathbf{E}\frac{\overline{S}_j}{\sqrt{j}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \mathbf{E}\frac{\overline{S}_j^2}{j} \sim 1. \tag{3.5}$$

Поэтому из теоремы 3.1 немедленно вытекает

Следствие 3.1. *При выполнении условий п.* 3 *теоремы* 3.1

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) = nV(x)\biggl[1 + \frac{2^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{z}(1+o(1))\biggr] \tag{3.6}$$

(ср. со следствием 2 в [17, 18], где аналогичное (но не такое же) представление получено в случае (1.4)).

Замечание 3.1. Здесь сохраняют свою силу замечания 2.1–2.4 к теореме 2.1.

Доказательство. Положим $G_n = \{\overline{S}_n > x\}$. Тогда аналогично (2.23)

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) = \mathbf{P}(G_n B) + \mathbf{P}(G_n \overline{B}),$$

где B сохраняет прежний смысл и $P = \mathbf{P}(G_n B)$ оценивается с помощью леммы 2.1 точно так же, как в § 2 (см. (2.24)):

$$P \le cV(x)^{1+\varphi}, \quad \varphi > 0.$$

Соотношение (2.26) также сохраняется, так что основная задача состоит в оценке при $y = \delta x$

$$\mathbf{P}(G_n \overline{B}_j) = \mathbf{P}(G_n \overline{B}_j \{\overline{S}_{j-1} > x - y\}) + \mathbf{P}(G_n \overline{B}_j \{\overline{S}_{j-1} \le x - y\}). \tag{3.7}$$

Здесь первое слагаемое $P_{(1)}$ не превосходит в силу леммы 2.1

$$P_{(1)} \le cnV(\delta x) V\biggl(x(1-\delta)\biggl(1 - \frac{\sigma_1(x(1-\delta))h}{2}\biggr)\biggr). \tag{3.8}$$

Такие выражения уже оценивались нами в § 2 (см. (2.28)–(2.31)):

$$nP_{(1)} \le (V(x))^{1+\varphi}, \quad \varphi > 0. \tag{3.9}$$

Для второго слагаемого $P_{(2)}$ в (3.7) имеем

$$P_{(2)} = \mathbf{P}(S_{j-1} + X_j + \overline{S}^*_{n-j} > x, X_j > y, \overline{S}_{j-1} \le x - y), \tag{3.10}$$

где $\overline{S}^*_{n-j}$ распределено так же, как $\overline{S}_{n-j}$, и не зависит от $X_1, \dots, X_j$. Так как

$$\{S_{j-1} \le x - y\} = \{\overline{S}_{j-1} \le x - y\} \cup \{\overline{S}_{j-1} > x - y, S_{j-1} \le x - y\},$$

используя вновь оценки (3.8), (3.9), можно записать

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(G_n \overline{B}_j) &= \mathbf{P}(X_j > x - S_{j-1} - \overline{S}^*_{n-j}; X_j > y, S_{j-1} \le x - y) + O(V(x)^{1+\varphi})\\ &= \mathbf{E}[V(x - S_{j-1} - \overline{S}^*_{n-j}); S_{j-1} + \overline{S}^*_{n-j} \le x - y] + O(V^{1+\varphi}(x)), \quad \varphi > 0. \end{aligned}\tag{3.11}$$

Мы получили то же выражение, что и в (2.32), но с заменой S_{n-1} на $Z_{j-1,n}$, где

$$Z_{j,n} = S_j + \overline{S}^*_{n-j-1}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Если воспользоваться опять представлением

$$\mathbf{E}[V(x - Z_{j,n}); Z_{j,n} \le x - y] = E_{1,j} + E_{2,j} + E_{3,j} \tag{3.12}$$

в виде суммы трех интегралов вида (2.33), то оценки первого и третьего интегралов будут полностью повторять оценки, проведенные выше, поскольку

1) $S_j \le Z_{j,n} \underset{d}{\le} \overline{S}_{n-1}$;

2) ранее везде для оценок распределения S_{n-1} мы на самом деле пользовались оценками для $\overline{S}_{n-1}$ (см. лемму 2.1).

Рассмотрим теперь

$$E_{2,j} = \mathbf{E}[V(x - Z_{j,n}); N_- < Z_{j,n} \le N_+], \tag{3.13}$$

где $N_\pm$ те же, что в (2.33). Чтобы оценить этот интеграл, надо знать асимптотику $\mathbf{P}(Z_{j,n} > t)$.

Лемма 3.1. *Пусть при каком-нибудь фиксированном* $\delta \in (0, 1/2)$ *выполняются соотношения* $\delta n < j \le (1-\delta)n$, $\sqrt{n} \ll t < \delta N_+$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(Z_{j-1,n} > t) \sim 2\mathbf{P}(S_{n-1} > t). \tag{3.14}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}(Z_{j-1,n} > t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \mathbf{P}(S_{j-1} \in du)\mathbf{P}(\overline{S}_{n-j} > t-u) + \mathbf{P}(S_{j-1} > t).$$

Разобьем интеграл на две части:

$$\int\limits_{-\infty}^{t} = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = \int\limits_{-\infty}^{N_-}$ по лемме 2.1 не превосходит

$$I_1 \le \mathbf{P}(S_{j-1} \le N_-)\mathbf{P}(\overline{S}_{n-j} > t - N_-) \le e^{-\frac{t^2}{2(n-j)h}}. \tag{3.15}$$

Во втором интеграле $I_2 = \int\limits_{N_-}^{t}$ вероятность $\mathbf{P}(\overline{S}_{n-j} > t-u)$ находится в зоне действия равномерного приближения (1.10), поскольку $|N_-| = o(N_+)$ и, стало быть,

$$t - u \le t - N_- < \delta N_+(n)(1+o(1)) < N_+(\delta n) \le N_+(n-j). \tag{3.16}$$

Поэтому

$$I_2 = 2\int\limits_{N_-}^{t} \mathbf{P}(S_{j-1} \in du)\left[1 - \Phi\left(\frac{t-u}{\sqrt{n-j}}\right)\right] e^{-(n-j)\Lambda_k(\frac{t-u}{\sqrt{n-j}}) + \frac{(t-u)^2}{2(n-j)}}(1+o(1))$$

$$= 2\int\limits_{N_-}^{t} \mathbf{P}\big(S_{j-1} \in du\big)\mathbf{P}(S_{n-j} > t-u)(1+o(1)).$$

Оценивая интеграл этого вида в пределах от $-\infty$ до N_- (это опять дает оценку (3.15)) и замечая, что интеграл этого вида в пределах от t до ∞ не превосходит $\mathbf{P}(S_{j-1} > t)$, получим

$$I_2 = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(S_{j-1} \in du)\mathbf{P}(S_{n-j} > t-u)(1+o(1))$$

$$+ O(e^{-\frac{t^2}{2(n-j)h}}) - 2\theta\mathbf{P}(S_{j-1} > t), \quad 0 < \theta \le 1;$$

$$\mathbf{P}(Z_{j-1,n} > t) = 2\mathbf{P}(S_{n-1} > t)(1+o(1)) + O(e^{-\frac{t^2}{2(n-j)h}}) + O(e^{-\frac{t^2}{2jh}}). \tag{3.17}$$

Так как h можно брать сколь угодно близким к 1, его всегда можно выбрать так, что $\frac{1}{(1-\delta)h} > 1 + \delta/2$. Тогда

$$\frac{t^2}{2(n-j)h} - \frac{t^2}{2n} > \frac{\delta t^2}{4n}.$$

Такое же неравенство будет выполняться для $\frac{t^2}{2jh} - \frac{t^2}{2n}$. Поскольку $t \gg \sqrt{n}$, остаточный член в (3.17) будет $o(\mathbf{P}(S_{n-1} > t))$ и, следовательно,

$$\mathbf{P}(Z_{j-1,n} > t) = 2\mathbf{P}(S_{n-1} > t)(1 + o(1)). \tag{3.18}$$

Лемма доказана.

Вернемся к вычислению $E_{2,j}$ в (3.13). Эта задача совершенно аналогична вычислению E_2 в (2.33), (2.35), поскольку асимптотика $\mathbf{P}(Z_{j-1,n} > t)$ согласно (3.18) с точностью до множителя $2(1 + o(1))$ совпадает с асимптотикой вероятности $\mathbf{P}(S_{n-1} > t)$ (в области $\sqrt{n} \ll t < \delta N_+$), которая определяет интеграл E_2 в (2.33), (2.35). Поэтому аналогично лемме 2.2 будем иметь

$$\mathbf{E}[V(x - Z_{j,n}); v\sqrt{n} < Z_{j,n} < \delta N_+] = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \int\limits_{v\sqrt{n}}^{\delta N_+} V(x-t) e^{-n\Lambda_k(\frac{t}{n})}\, dt (1 + o(1)), \tag{3.19}$$

где $v \to \infty$ достаточно медленно. Вычисления этого интеграла повторяют рассмотрения в (2.35)–(2.40), так как по-прежнему справедливо (2.36) и $t^* + c\sqrt{n} \ll N_+$. Кроме того,

$$t^* \sim \alpha n \frac{l(x)}{x} = \alpha\sqrt{n\sigma_2} \gg \sqrt{n}.$$

Следовательно, как и в (2.40), для (3.19) получим асимптотику

$$2e^{-M}(1 + o(1)). \tag{3.20}$$

Оценка разности между $E_{2,j}$ и интегралом (3.19) в силу неравенств

$$S_j \le Z_{j,n} \underset{d}{\le} \overline{S}_{n-1} \tag{3.21}$$

осуществляется без труда с помощью вычислений, которые уже проводились, и мы предоставляем ее читателю. Это доказывает, что $E_{2,j}$ при $\delta n \le j \le (1-\delta)n$ также имеет асимптотику (3.20).

Кроме того, в силу (3.21) при всех j

$$E_{2,j} \le 2e^{-M}(1 + o(1)).$$

Суммируя проведенные оценки, получаем

$$\mathbf{P}(G_n) = (1 + o(1)) \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}[V(x - Z_{j,n}); N_- < Z_{j,n} \le N_+] + O(V(x)n^{-\frac{b-2}{2}})$$
$$= (1 + o(1))[2(n - 2\delta n)e^{-M} + r_n],$$

где $0 \le r_n \le 4\delta n e^{-M}(1 + o(1))$. Так как $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, отсюда следует первое утверждение теоремы (3.1).

Перейдем к доказательству (3.3), (3.4). Здесь, как и в теореме 2.1, при доказательстве пп. 2, 3 потребуется иное, чем в (3.12), разбиение на части интеграла

$$E = \mathbf{E}[V(x - Z_{j,n}); Z_{j,n} \le x - y]. \tag{3.22}$$

Теперь аналогично (2.43) рассмотрим разбиение $E = E'_{1,j} + E'_{2,j} + E'_{3,j}$, где

$$\begin{aligned} E'_{1,j} &= \mathbf{E}[V(x - Z_{j,n}); Z_{j,n} < -z], \\ E'_{2,j} &= \mathbf{E}[V(x - Z_{j,n}); |Z_{j,n}| \le z], \\ E'_{3,j} &= \mathbf{E}[V(x - Z_{j,n}); z < Z_{j,n} \le (1-\delta)x]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Здесь опять оценки $E'_{1,j}$, $E'_{3,j}$ в силу (3.21) полностью повторяют оценки, проведенные в доказательстве теоремы 2.1 (см. (2.44), (2.47), (2.49)).

Так как при $s_2 = \frac{x}{N_2(n)} \to \infty$ выполняется $z \gg \sqrt{n}$ и основная масса распределения $Z_{j,n}$ сосредоточена в $\sqrt{n}$-окрестности точки 0, то, как и прежде, получаем (ср. с (2.45))

$$E'_{2,j} = V(x)(1+o(1)).$$

Это доказывает (3.3).

Докажем теперь справедливость асимптотических разложений (3.4). Здесь также все происходит аналогично предыдущему. На основании (2.51), (2.52) имеем

$$E'_{2,j} = V(x)\mathbf{E}\biggl[1+\frac{Z_{j,n}}{z}+\frac{(1-\alpha)Z_{j,n}^2}{2xz}(1+o(1))+\frac{Z_{j,n}^2}{2z^2}+O\biggl(\frac{|Z_{j,n}|^{b'}}{z^{b'}}\biggr); |Z_{j,n}|\le z\biggr] \tag{3.24}$$

Здесь потребуются чуть более детальные оценки, чем (2.54)–(2.56). Так как $Z_{j,n} \ge S_j$, то

$$T^-_{k,j} = \mathbf{E}(|Z_{j,n}|^k; Z_{j,n} < -z),\ k=0,1,2; \quad U^- = \mathbf{E}(|Z_{j,n}|^{b'}; Z_{j,n}\in(-z,0))$$

оцениваются как и прежде:

$$T^-_{k,j} \le \frac{cnz^{k-b}}{b-k}, \quad U^- = O(n^{b'/2}).$$

Далее, так как $z \gg \sqrt{n}$, то также аналогично предыдущему (ср. с (2.55), (2.56); можно воспользоваться также более сильными неравенствами в лемме 2.1)

$$T^+_{k,j} = \mathbf{E}\bigl(Z^k_{j,n}; Z_{j,n} > z\bigr) \le \mathbf{E}\bigl(\overline{S}^k_{n-1}; \overline{S}_{n-1} > z\bigr) = z^k O\biggl(\biggl(\frac{\sqrt{n}}{z}\biggr)^b\biggr);$$

$$U^- \le \mathbf{E}\bigl(Z^{b'}_{j,n}; Z_{j,n}\in(o,z)\bigr) \le \mathbf{E}(\overline{S}_{n-1})^{b'} \le cn^{b'/2}.$$

Учитывая далее, что

$$\mathbf{E}Z_{j,n} = \mathbf{E}\overline{S}_{n-j-1}, \quad \mathbf{E}Z^2_{j,n} = j + \mathbf{E}(\overline{S}_{n-j-1})^2,$$

в итоге получим

$$E'_{2,j} = V(x)\biggl[1+\frac{\mathbf{E}\overline{S}_{n-j-1}}{z}+\frac{1}{2z^2}(j+\mathbf{E}(\overline{S}_{n-j-1})^2)\biggl(1+\frac{z}{x}(1+o(1))\biggr)+O\biggl(\biggl(\frac{\sqrt{n}}{z}\biggr)^{b'}\biggr)\biggr].$$

Соединяя это с оценками, полученными ранее, приходим к (3.4).

Теорема доказана.

§ 4. Большие уклонения для $\overline{S}_n(a)$ при $a>0$

Как уже отмечалось, для вероятностей больших уклонений

$$\overline{S}_n(a) = \max_{k\le n}(S_k - ak)$$

в случае $a>0$ в [15] (см. также [16]) установлено следующее асимптотическое представление (приближение первого порядка):

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \sim \frac{1}{a}\int_x^{x+an} V(u)\,du, \tag{4.1}$$

справедливое для всех так называемых сильно субэкспоненциальных распределений X_j при $x \to \infty$ и всех n. Можно показать, что достаточные условия для принадлежности классу сильно субэкспоненциальных распределений, приведенные в [15], будут выполнены, если выполнены (1.3) и $[\mathrm{D}_1]$. Ниже мы в дополнение к (4.1) получим также асимптотические разложения для $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$, справедливые при $x \to \infty$ равномерно при всех $n = 1, 2, \dots$.

Пусть, как и прежде, $z = z(x) = (l'(x))^{-1}$. Аргумент у функции $z(\cdot)$ будем указывать лишь в случае, когда он отличен от x.

Теорема 4.1. 1. *Пусть $a > 0$ и выполнено* $[\mathrm{D}_1]$. *Тогда при $x \to \infty$*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) = \frac{z}{a} V(x)(1 - e^{-\frac{an}{z}})(1 + o(1)) \tag{4.2}$$

равномерно по всем n.

2. *Пусть выполнено условие* $[\mathrm{D}_2]$, $x_j = x + aj$, $z_j = z(x_j)$, $m = \min(n, z)$, $b' = \min(3, b)$. *Тогда при $x \to \infty$ равномерно по n*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) = \sum_{j=0}^{n-1} V(x_j) \bigg[1 + \frac{\mathbf{E}\overline{S}_{n-j-1}(a)}{z_j} + \frac{1}{2z_j^2}(j + \mathbf{E}(S_{n-j-1}(a))^2) \\ \times \bigg(1 + \frac{(1-\alpha)z_j}{x_j}(1 + o(1))\bigg)\bigg] + V(x) O\bigg(\frac{m^{\frac{b'+2}{2}}}{z^{b'}}\bigg). \tag{4.3}$$

Для упрощения записи правой части в (4.3) можно суммы заменить интегралами (см. лемму 4.1) и воспользоваться сходимостью

$$\mathbf{E}\overline{S}_{n-j-1}(a) \to \mathbf{E}\overline{S}_{\infty}(a) \quad \text{при } n - j \to \infty;$$

$$\frac{x_j}{x} \to 1, \quad \frac{z_j}{z} \to 1 \quad \text{при } j = o(x).$$

Однако это повлечет за собой появление новых погрешностей, связанных с этими приближениями.

Суммы в (4.3) и соответствующие им интегралы могут быть вычислены с помощью следующей леммы и ее дальнейших уточнений.

Обозначим при $v > 0$, $r > 0$

$$S(k, r) = \sum_{j=0}^{n-1} j^k V^r(x + vj). \tag{4.4}$$

Тогда, очевидно,

$$S(k, r) = I(k, r)(1 + \varepsilon_n) \le c I(k, r),$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$,

$$I(k, r) = \int_0^n t^k V^r(x + vt)\, dt = \frac{1}{v^{k+1}} \int_0^{nv} u^k V^r(x + u)\, du. \tag{4.5}$$

Лемма 4.1. 1. *При выполнении* $[\mathrm{D}_1]$

$$\begin{gathered} S(0, 1) = \frac{z}{v} V(x)[1 - e^{-\frac{nv}{z}}](1 + o(1)), \\ S(1, 1) = V(x) \frac{z^2}{v^2} \bigg[1 - e^{-\frac{nv}{z}} - \frac{nv}{z} e^{-\frac{nv}{z}}\bigg](1 + o(1)). \end{gathered} \tag{4.6}$$

2. *При выполнении* [D$_2$]

$$S(0,1)=\frac{1}{v}\int\limits_{x-1/2}^{x+(n-1/2)v}V(u)\,du(1+O(z^2))=\frac{1}{v}\int\limits_{x}^{x+nv}V(u)\,du\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right),\quad (4.7)$$

$$I(k,r)=\left(\frac{z}{rv}\right)^{k+1}V^r(x)\int\limits_0^{\frac{rvn}{z}}t^ke^{-t}\,dt\left(1+O\left(\frac{z}{x}\right)\right)$$
$$=k!\left(\frac{z}{rv}\right)^{k+1}V^r(x)\left[1-e^A\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{A^j}{j!}\right)\right]\left(1+O\left(\frac{z}{x}\right)\right),\quad A=\frac{rvn}{z}.\quad (4.8)$$

В частности,

$$I(0,1)=\frac{z}{v}V(x)(1-e^{-\frac{vn}{z}})\left(1+O\left(\frac{z}{x}\right)\right).\quad (4.9)$$

Доказательство. Пусть выполнено [D$_1$]. Тогда при $n<zx^\gamma$, $\alpha>\gamma>0$, $u\le n=o(x)$ выполняется

$$V(x+u)=V(x)e^{-\frac{u}{z}(1+o(1))},$$

$$S(1,1)=\sum_{j=0}^{n-1}jV(x+vj)=V(x)\sum_{j=0}^{n-1}je^{-\frac{vj}{z}(1+o(1))}\left(1+O\left(\frac{j^2}{xz}\right)\right)$$
$$\sim V(x)\int\limits_0^n te^{-\frac{vt}{z}}\,dt=V(x)\left(\frac{z}{v}\right)^2\int\limits_0^{\frac{nv}{z}}ue^{-u}\,du=V(x)\left(\frac{z}{v}\right)^2\left[1-e^{-\frac{nv}{z}}-\frac{nv}{z}e^{-\frac{nv}{z}}\right].$$

При $n>zx^\gamma$ ответ, очевидно, сохранится, так как

$$\int\limits_{zx^\gamma}^{\infty}uV(x+u)\,du=z^2V(x)O(e^{-x^\gamma}).$$

Вычисление $S(0,1)$ отличается только упрощениями.

Пусть теперь выполнено [D$_2$]. Тогда при $|u-x_j|<c$

$$V(u)=V(x_j)+(u-x_j)V'(x_j)+O((u-x_j)^2V''(x_j)),$$

где

$$V'(x_j)=\frac{V(x_j)}{z_j},\quad V''(x_j)\sim\frac{V(x_j)}{z_j^2}.$$

Стало быть,

$$V(x_j)=\frac{1}{v}\int\limits_{x_j-v/2}^{x_j+v/2}V(u)\,du(1+O(z_j^{-2}));$$
$$S(0,1)=\frac{1}{v}\int\limits_{x-v/2}^{x+v(n-1/2)}V(u)\,du(1+O(z^2)).\quad (4.10)$$

Это доказывает первое равенство в (4.7).

Докажем второе равенство и (4.9).

Для $n \le zx^\gamma$, $\alpha > \gamma > 0$, $u \le n = o(x)$ имеем

$$V(x+u) = V(x)e^{-u/z}\left(1 + O\left(\frac{u^2}{xz}\right)\right). \tag{4.11}$$

Делая замену $\frac{u}{z} = t$, получим

$$vI(0,1) = \int\limits_0^{nv} V(x+u)\,du = zV(x)\int\limits_0^{\frac{nv}{z}} e^{-t}\,dt\left(1 + O\left(\frac{t^2 z}{x}\right)\right)$$
$$= zV(x)(1 - e^{-\frac{nv}{z}})\left(1 + O\left(\frac{z}{x}\right)\right).$$

Ясно, что для $n > zx^\gamma$ ответ сохранится, так как

$$\int\limits_{zx^\gamma}^{\infty} V(x+u)\,du = zV(x)O(e^{-x^\gamma}).$$

Это доказывает (4.9) и второе равенство в (4.7).

Совершенно аналогично

$$I(k,r) = \int\limits_0^n t^k V^r(x+vt)\,dt = \frac{z^{k+1}}{v^{k+1}}V^r(x)\int\limits_0^{\frac{vn}{z}} t^k e^{-tr}\,dt\left(1 + O\left(\frac{z}{x}\right)\right).$$

Так как

$$\int\limits_0^{\gamma} u^k e^{-u}\,du = k!\left[1 - e^{-\gamma}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{\gamma^j}{j!}\right)\right],$$

отсюда получаем (4.8).

Лемма доказана.

Отметим, что в силу неравенства

$$\int\limits_0^A t^k e^{-t}\,dt \le \min\left(k!, \frac{A^{k+1}}{k+1}\right)$$

из леммы 4.1 вытекает неравенство

$$S(k,r) \le k!V^r(x)\min\left(\left(\frac{z}{rv}\right)^{k+1}, \frac{n^{k+1}}{(k+1)!}\right)(1+\varepsilon_n), \tag{4.12}$$

$\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$; в частности,

$$S(0,1) \le V(x)\min\left(\frac{z}{v}, n\right)(1+\varepsilon_n). \tag{4.13}$$

Из теоремы 4.1 и леммы 4.1 вытекает также

Следствие 4.1. *При $x \to \infty$, $n \to \infty$ и выполнении* [D_2]

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) = \frac{1}{a} \int\limits_{x-a/2}^{x+(n-1/2)a} V(u)du\biggl(1 + \frac{\mathbf{E}\overline{S}}{z} + o\biggl(\frac{1}{z}\biggr)\biggr)$$

$$= \frac{z}{a}V(x)(1 - e^{-\frac{na}{z}})\biggl(1 + \frac{\mathbf{E}\overline{S}}{z}\biggr) + \frac{1}{2a^2}V(x)\biggl[1 - e^{-\frac{na}{z}} - \frac{na}{z}e^{-\frac{na}{z}}\biggr] + o(V(x)), \tag{4.14}$$

где $\overline{S} = \overline{S}_\infty(a)$.

Для доказательства теоремы 4.1 нам понадобится ряд вспомогательных предложений. Обозначим в этом параграфе

$$B_j(v) = \{X_j \le y + jv\}, \quad B(v) = \bigcap_{j=1}^n B_j(v), \quad G_n = \{\overline{S}_n(a) > x\}.$$

Лемма 4.2. 1. *Пусть δ, $0 < \delta < 1$, фиксировано, $v \le \frac{a(1-\delta)}{r}$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$, всех достаточно больших x и $y \ge \varepsilon x$*

$$P_n(v) \equiv \mathbf{P}(G_n B(v)) \le c \min(z(y)^{r+1}, n^r)V^r(y), \tag{4.15}$$

где, как и прежде, $z(y) = \frac{1}{l'(y)} \sim \frac{y}{\alpha l(y)}$, $r = \frac{x}{y} \ge 1$.

2. *Имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \le cmV(x), \quad m = \min(z, n), \quad z = z(x).$$

Лемма 4.2 вытекает из результатов [12] (см. теоремы 5.2, 5.3).

Доказательство теоремы 4.1. Аналогично предыдущему

$$\mathbf{P}(G_n) = \mathbf{P}(G_n B(v)) + \mathbf{P}(G_n \overline{B}(v)),$$

где первое слагаемое $P_n(v)$ оценено в лемме 4.2. Для второго слагаемого аналогично (2.25) получаем

$$\mathbf{P}(G_n \overline{B}(v)) = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n \overline{B}_j(v)) + O\Biggl(\biggl(\sum_{j=1}^n V(y + vj)\biggr)^2\Biggr),$$

где в силу леммы 4.1 (см. (4.13))

$$\sum_{j=1}^n V(y + vj) \le c \min(z(y), n)V(y).$$

Поэтому при $y = \delta x$ ($\delta \in (0,1)$ фиксировано)

$$\biggl(\sum_{j=1}^n V(y + vj)\biggr)^2 \le cm^2 V^2(\delta x) < V^{1+\varphi}(x)$$

при достаточно больших x, где φ, $0 < \varphi < 2\delta^\alpha - 1$, можно выбрать сколь угодно близким к $2\delta^\alpha - 1 > 0$ при $\delta > 2^{-1/\alpha}$.

Так как в силу леммы 4.2 для $P_n(v)$ имеем оценку (4.15), то $P_n(v)$ также может быть оценена с помощью $V^{1+\varphi}(x)$ при $\varphi > 0$, $\varphi < r\delta^\alpha - 1 > 0$, если $\delta > r^{-1/\alpha}$, $r > 1$. Это дает в итоге

$$\mathbf{P}(G_n) = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n \overline{B}_j(v)) + O(V^{1+\varphi}(x)), \quad \varphi > 0. \tag{4.16}$$

Рассмотрим теперь (опять аналогично предыдущему) слагаемые

$$\mathbf{P}(G_n\overline{B}_j(v)) = \mathbf{P}(G_n\overline{B}_j(v)\{\overline{S}_{j-1}(a) > x-y\}) \\ + \mathbf{P}(G_n\overline{B}_j(v)\{\overline{S}_{j-1}(a) \le x-y\}) \equiv P_{1,j} + P_{2,j}. \quad (4.17)$$

Первое слагаемое здесь в силу п. 2 леммы 4.2 не превосходит

$$P_{1,j} \le c\min(j, z(x-y))V(x-y)V(y+jv) \le cV(y_j)V(x_j-y_j)\min(j, z(x_j-y_j)),$$

где $x_j = x + jv$, $y_j = y + jv$. Полагая для простоты опять, как и в (2.29), $L(x) \equiv 1$, получим

$$V(y_j)V(x_j-y_j) = \exp\{-x_j^\alpha(\gamma^\alpha + (1-\gamma)^\alpha)\},$$

где $\gamma = \gamma_j = \frac{y_j}{x_j} \ge \delta$, $\delta < 1/2$. Если $j \le \frac{x}{v}$, то будет выполнено также $\gamma \le \frac{1+\delta}{2} < 1$.

Функция $\varphi(\gamma) = \gamma^\alpha + (1-\gamma)^\alpha - 1 > 0$ уже изучалась нами в (2.29)–(2.31). Как и в названных рассмотрениях, будут справедливы неравенства

$$V(y_j)V(x_j-y_j) \le V(x_j)^{1+\varphi}, \quad P_{1,j} \le V(x_j)^{1+\varphi}, \quad \varphi > 0 \quad \text{при } j \le \frac{x}{v}.$$

Поэтому в силу леммы 4.1 (см. (4.12)) при $n \le \frac{x}{v}$

$$\sum_{j=1}^{n} P_{1,j} \le S(0, 1+\varphi) \le c\min(z,n)V^{1+\varphi}(x). \quad (4.18)$$

Если $n \ge n_0 = \frac{x}{v}$, то $y_j \ge y_{n_0} = x(1+\delta)$ и

$$P_{1,j} \le cz(x(y-\delta))V(y_j), \qquad \sum_{j=n_0}^{n} P_{1,j} \le cz^2V(x(1+\delta)) \le V(x)^{1+\varphi},\ \varphi > 0,$$

так что неравенство (4.18) справедливо при всех n.

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (4.17). Аналогично (3.10), (3.11) при $S_j(a) = S_j - aj$, $Z_{j,n} = S_j + \overline{S}^*_{n-j-1}(a)$ получаем

$$\begin{aligned} P_{2,j} &= \mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x, X_j > y_j, \overline{S}_{j-1}(a) \le x-y) \\ &= \mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x, X_j > y_j, S_{j-1} \le x-y) + O(V(x)^{1+\varphi}) \\ &= \mathbf{P}(S_{j-1}(a) + X_j - a + S^*_{n-j-1}(a) > x, X_j > y_j, S_{j-1}(a) \le x-y) + O(V^{1+\varphi}(x)) \\ &= \mathbf{E}[V(x - Z_{j-1,n} + aj); Z_{j-1,n} \le x - y_j + aj] + O(V^{1+\varphi}(x)), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $\overline{S}^*_{j-1}(a)$ совпадает по распределению с $\overline{S}_{n-j}(a)$ и не зависит от $X_1, \dots, X_j$.

Положим здесь

$$x_j = x + ja, \quad y_j = y + jv, \quad z_j = z(x_j) \quad (4.20)$$

(в некоторых предыдущих рассмотрениях использовалось обозначение $x_j = x + jv$; в дальнейшем это к недоразумениям не приводит). Тогда главную часть в (4.19) можно записать в виде, аналогичном (3.22), (3.23):

$$E_{(j)} \equiv \mathbf{E}[V(x_j - Z_{j-1,n}); Z_{j-1,n} \le x_j - y_j] = E_{1,j} + E_{2,j} + E_{3,j},$$

где

$$\begin{aligned} E_{1,j} &= \mathbf{E}[V(x_j - Z_{j-1,n}); Z_{j-1,n} < -z_j], \\ E_{2,j} &= \mathbf{E}[V(x_j - Z_{j-1,n}); |Z_{j-1,n}| \le z_j], \\ E_{3,j} &= \mathbf{E}[V(x - Z_{j-1,n}); z_j < Z_{j-1,n} \le x_j - y_j = (1-\delta)x_j + (a\delta - v)j]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Чтобы оценить эти слагаемые, нам понадобятся оценки для распределения $Z_{j,n}$. Очевидно,

$$S_j \le Z_{j,n} \underset{d}{\le} S_j + \zeta, \tag{4.22}$$

где $\zeta \underset{d}{=} \overline{S}_\infty(a)$ и от S_j не зависит,

$$\mathbf{P}(\zeta > x) \le \overline{V}(x) \equiv czV(x)$$

(см. (4.1) и лемму 4.1). В силу первого неравенства в (4.22) $E_{1,j}$ оценивается точно так же, как и прежде (см. (2.44)):

$$E_{1,j} \le V(x_j)O\biggl(\frac{j^{b/2}}{z_j^b}\biggr). \tag{4.23}$$

Так как ζ — собственная случайная величина, $\sqrt{j} \ll z_j$, аналогично (2.45) получаем

$$E_{2,j} = V(x_j)(1+o(1)). \tag{4.24}$$

(Для получения асимптотических разложений нам понадобится более полный анализ $E_{2,j}$, который будет проведен позже).

Для того чтобы оценить $E_{3,j}$, нам понадобятся оценки для распределения $S_j+\zeta$ (см. (4.22)). Ниже под $\sigma_1 = \sigma_1(x)$ мы будем понимать значение (1.25) при $n = j$, т. е. $\sigma_1(x) = jl(x)x^{-2}$. Напомним, что соотношения $\sigma_1(x) \le 1$ и $x \ge N_1(j)$ эквивалентны.

Лемма 4.3. *Имеет место оценка*

$$P_j(v) \equiv \mathbf{P}(S_j + \zeta > v) \le \begin{cases} ce^{-\frac{v^2}{2hj}} & \text{при } v \le N_1(j), \\ V(v(1-\Delta)) & \text{при } v \ge N_1(j), \end{cases}$$

где $\Delta = \frac{h\sigma_1}{2}(v)(1+o(1))$ *при* $v \to \infty$, $\sigma_1(v) \to 0$; $\Delta \le \Delta_0 < 1$ *при* $\sigma_1(v) \le 1$.

Следствие 4.2. *Справедлива оценка*

$$P_j(x) \le \begin{cases} cV(x)^{\frac{1}{2h\sigma_1}} & \text{при } \sigma_1 \ge 1, \\ V(x)^{(1-\Delta)^\alpha} & \text{при } \sigma_1 \le 1, \end{cases}$$

где Δ *обладает свойствами, описанными в лемме* 4.3.

Доказательство следствия вытекает из соотношений

$$e^{-\frac{x^2}{2hj}} = e^{-\frac{l(x)}{2h\sigma_1}} = V(x)^{\frac{1}{2h\sigma_1}}, \quad V(x(1-\Delta)) = V(x)^{(1-\Delta)^\alpha(1+o(1))}.$$

Доказательство леммы 4.3. Пусть сначала $x \le N_1(j)$ ($\sigma_1 \ge 1$). Тогда в силу леммы 2.1

$$P_j(x) = \int_0^\infty \mathbf{P}(\zeta \in dt)\mathbf{P}(S_j > x - t) \le \overline{V}(x) + \int_0^x e^{-\frac{(x-t)^2}{2jh}}\mathbf{P}(\zeta \in dt) \tag{4.25}$$

(здесь мы считаем для простоты, что неравенство (2.20) в лемме 2.1 справедливо при всех $x \le N_1(j)$; изменения, которые надо внести для x таких, что $l(x) \le 2\ln j$, очевидны, и мы предоставляем их читателю). Так как подынтегральная функция в последнем интеграле возрастает по t, этот интеграл не превосходит

$$-\int_0^x e^{\frac{(x-t)^2}{2jh}}\,d\overline{V}(t) = \int_0^x e^{-\frac{(x-t)^2}{2jh}}V_1(t)\,dt = e^{-\frac{x^2}{2jh}}\int_0^x e^{q(t)}V_1(t)\,dt, \tag{4.26}$$

где

$$q(t) = \frac{xt}{jh} - \frac{t^2}{2jh}, \quad V_1(t) = -\overline{V}'(t) = cV(t)[z^2(t) - z'(t)] \sim cz^2(t)V(t) = cz^2(t)e^{-l(t)}. \tag{4.27}$$

Функция $q(t)$ возрастает на $(0, x)$ и достигает в точке x своего максимума, равного

$$q(x) = \frac{x^2}{2jh} = \frac{l(x)}{2h\sigma_1} \le \frac{l(x)}{2h} \quad \text{при } \sigma_1 \ge 1.$$

Учитывая характер функций $q(t)$, $l(t)$, нетрудно убедиться, что неравенство $q(t) \le \frac{l(t)}{2h}$ будет справедливым при всех $t \le x$. Поэтому

$$q(t) - l(t) \le -l(t)\left(1 - \frac{1}{2h}\right), \quad t \in (0, x).$$

Кроме того, $\frac{x}{n} \to 0$ и $q(t) \to 0$ при каждом фиксированном t. Поэтому интеграл в (4.26) сходится к $c = \int\limits_0^\infty V_1(t)\,dt$. Кроме того,

$$\overline{V}(x) = cze^{-l(x)} = cze^{-\frac{x^2}{j\sigma_1}} = o(e^{-\frac{x^2}{z_j\sigma_1}}).$$

Вместе с (4.25) это доказывает первое утверждение леммы.

Пусть теперь $x \ge N_1(j)$ $(\sigma_1 \le 1)$. Тогда при $\delta \in (0, 1)$ в силу леммы 2.1

$$\begin{aligned} P_j(x) &\le \mathbf{P}(S_j > x) + \int\limits_{-\infty}^{x} \mathbf{P}(S_j \in dt)\overline{V}(x - t) \\ &\le cjV\left(x\left(1 - \frac{\sigma_1 h}{2}\right)\right) + \overline{V}(x) + \int\limits_0^{N_1} e^{-\frac{t^2}{2jh}}\overline{V}(x - t)\frac{t}{jh}\,dt \\ &\quad + cj\int\limits_{n_1}^{x} V\left(t\left(1 - \frac{\sigma_1(t)h}{2}\right)\right)\overline{V}(x - t)l'(t)\,dt. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Здесь первые два слагаемые в правой части, очевидно, могут быть записаны при $x \to \infty$ в виде $V(x(1 - \Delta))$, где $\Delta \le \frac{\sigma_1 h}{2}$, $h \in (1, 2)$ по-прежнему может быть выбрано близким к 1 (оно отлично от h в (4.28).

Третье слагаемое I_3 есть разновидность интеграла E_2 в (2.35) (при $n = j$), где функция $g_k(t)$ заменена на $g_2(t) = l(x - t) - \frac{t^2}{2jh}$, а степенной множитель $\frac{1}{\sqrt{j}}$ заменен на $\frac{tz(x-t)}{j}$. Если $\sigma_1 \to 0$ $(s_1 = \frac{x}{N_1(j)} \to \infty)$, то совершенно аналогично (2.40) получаем для него значение

$$\frac{ct^* z(x - t^*)}{\sqrt{j}}e^{-g_2(t^*)},$$

где аналогично (2.6), (2.37) $t^* \sim \alpha j\frac{l(x)h}{x} = \alpha h\sigma_1 x$. Но

$$\begin{aligned} g_2(t^*) = l(x - t^*) + \frac{(t^*)^2}{2jh} &= l(x) - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 hjl^2(x)}{x^2}(1 + o(1)) \\ &= l(x)\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 h\sigma_1(1 + o(1))\right). \end{aligned}$$

Суммируя сказанное, получим, что третье слагаемое в (4.28) также допускает оценку

$$I_3 \le V(x(1-\Delta)), \quad \Delta \le \frac{h\sigma_1}{2} = o(1) \quad \text{при } \sigma_1 \to 0. \tag{4.29}$$

Если $\sigma_1 \ge \sigma_0 > 0$, то $x \le \sigma_0^{\frac{1}{\alpha-2}} N_1(j)$. В этом случае рассмотрим две возможности $t^* \le N_1/2$ и $t^* > N_1/2$. В первом случае $I_3 \le N_1 \overline{V}\big(\frac{N_1}{2}\big)$; во втором —

$$I_3 \le N_1 e^{-\frac{N_1^2}{8jh}} = N_1 e^{-\frac{l(N_1)}{8h\sigma_1}} = N_1 V(N_1)^{\frac{1}{8h\sigma_1}}.$$

Так как $N_1 \ge x\sigma_0^{\frac{1}{2-\alpha}}$, в обоих случаях

$$I_3 \le cxV(x)^{\gamma_1} \le V(x)^{\gamma}, \quad \gamma > 0,$$

при некотором фиксированном $\gamma > 0$ и достаточно больших j (или x). Таким образом, (4.29) остается справедливым при всех $\sigma_1 \le 1$ и $\Delta \le \Delta_0 < 1$.

Остается оценить последний интеграл в (4.28). Часть этого интеграла $\int\limits_{N_1}^{x(1-\delta)}$ уже оценивалась нами (см. оценку E_3 в (2.41), (2.42)); это дает оценку $V(x)V(N_1)^{\varphi}$. Оценка оставшегося интеграла $\int\limits_{x(1-\delta)}^{x}$ также не составляет труда. Нетрудно видеть, что он асимптотически эквивалентен

$$c_j V\left(x\left(1 - \frac{\sigma_1 h}{2}\right)\right) l'(x) \int\limits_0^{\infty} \overline{V}(u)\,du = V(x(1-\Delta)), \quad \Delta = \frac{\sigma_1 h}{2}(1+o(1)),$$

где $\Delta = o(1)$ при $\sigma_1 \to 0$, $\Delta \le \Delta_0 < 1$ при $\sigma_1 \le 1$. Лемма доказана.

Мы можем теперь продолжить оценки слагаемых в (4.21). Если считать для простоты $v \ge a\delta$, то вид $E_{3,j}$ в (4.21) совершенно аналогичен виду E_3' в (2.46) (или $E_{3,j}$ в (3.23)):

$$E_{3,j} \le \mathbf{E}[V(x_j - Z_{j-1,n}); z_j < Z_{j-1,n} \le (1-\delta)x_j],$$

где $x_j = x + aj$, $z_j = z(x_j)$. Однако непосредственно использовать результаты § 2 (см. (2.49)) здесь нельзя, так как в (2.49) использовалось условие $\sigma_2 \to 0$. Для оценки $E_{3,j}$, как и в § 2, рассмотрим две возможности: $z_j \le N_1(j)$ и $z_j > N_1(j)$. Если $z_j > N_1(j)$, то оценка происходит точно так же, как в (2.46), (2.47); это дает

$$E_{3,j} \le V(x_j)V(z_j)^{\varphi}, \quad \varphi > 0. \tag{4.30}$$

Если $z_j \le N_1(j)$, то $E_{3,j}$, как и (2.48), надо разбить на две части:

$$E_{3,j,1} = \mathbf{E}[V(x_j - Z_{j-1,n}); z_j < Z_{j-1,n} \le N_1(j)]$$

и

$$E_{3,j,2} = \mathbf{E}[V(x_j - Z_{j-1,n}); N_1(j) < Z_{j-1,n} \le (1-\delta)x_j].$$

Оценка для $E_{3,j,2}$, очевидно, совпадает с правой частью (4.30), так как $V(z_j) \ge V(N_1(j))$. Оценим $E_{3,j,1}$. Аналогично рассмотрениям в § 2 в силу леммы 4.3 получаем

$$E_{3,j,1} \le V(x_j - z_j)e^{-\frac{z_j^2}{2jh}} + \int\limits_{z_j}^{N_1} V(x_j - u)l'(x_j - u)e^{-\frac{u^2}{2jh}}\,du.$$

Так как $N_1(j) = o(x_j)$, то
$$l(x_j - u) = l(x_j) - \frac{u}{z_j}(1 + o(1))$$
и подынтегральная функция в последнем интеграле не будет превосходить
$$V(x_j)\exp\left\{\frac{u}{z_j}(1 + o(1)) - \frac{u^2}{2jh}\right\}. \tag{4.31}$$
Пусть сначала $j \le x^\gamma$, где $1-\alpha < \gamma < \min(1, 2-2\alpha)$. Тогда отношение слагаемых под знаком exp в (4.31) имеет порядок
$$\frac{uz_j}{j} \ge \frac{z_j^2}{j} \ge \frac{(x+j)^2}{x^\gamma l^2(x+j)} \sim \frac{x^{2-\gamma}}{l^2(x)} \rightarrowtail \infty,$$
ибо $2 - \gamma > 2\alpha$. Это значит, что второе слагаемое под знаком exp в (4.30) будет доминирующим и само значение (4.31) при достаточно больших x не будет превосходить
$$V(x_j)e^{-\frac{z_j^2}{3jh}}.$$
Таким образом, при $j \le x^\gamma$ справедливо неравенство, аналогичное (2.49):
$$E_{3,j} \le V(x_j)(V^\varphi(z_j) + e^{-\frac{z_j^2}{3jh}}). \tag{4.32}$$
Если $j > x^\gamma$, то воспользуемся очевидными оценками
$$E_{3,j,1} \le N_1(j)V(x_j - N_1(j)), \quad E_{3,j} \le N_1(j)V(x_j - N_1(j)). \tag{4.33}$$
Так как $\sqrt{j} \ll z_j$, то, собирая оценки (4.23), (4.24), (4.32), при $j \le x^\gamma$ получим
$$P_{2,j} = V(x_j)(1 + o(1)) + O(V^{1+\varphi}(x)).$$
Вместе с соотношениями (4.16)–(4.18) это при $n \le x^\gamma$ дает
$$\mathbf{P}(G_n) = \sum_{j=1}^n V(x_j)(1 + o(1)) + O(V^{1+\varphi}(x)) = \sum_{j=1}^n V(x_j)(1 + o(1)). \tag{4.34}$$

Если $n > x^\gamma$, то в $\mathbf{P}(G_n)$ будет входить также сумма (см. (4.33) и лемму 4.1)
$$\sum_{j\ge x^\gamma} \mathbf{P}(G_n\overline{B}_j(v)) \le \sum_{j\ge x^\gamma}(P_{1,j} + P_{2,j}) \le (1 + o(1)) \sum_{j\ge x^\gamma} N_1(j)V(x + aj - N_1(j))$$
$$\le c\sum_{j\ge x^\gamma} jV\left(x + \frac{aj}{2}\right)c_1 z^2 V\left(x + \frac{x^\gamma a}{2}\right) \le V(x)e^{-x^\varphi}, \quad \varphi > 0. \tag{4.35}$$

Последнее неравенство следует из того, что
$$l\left(x + \frac{x^\gamma a}{2}\right) = l(x)\left[1 + \frac{\alpha x^{\gamma-1}a}{2}(1 + o(1))\right],$$
где при $\gamma > 1 - \alpha$
$$\frac{\alpha a}{2}l(x)x^{\gamma-1} > x^\varphi, \quad \varphi > 0.$$
Поэтому равенство (4.34) сохранится при любых n. Остается воспользоваться леммой 4.1. Первое утверждение теоремы 4.1 доказано.

Доказательство второго утверждения сводится к более точной оценке $E_{j,2}$; все остальные оценки могут быть использованы без изменений. Пользуясь опять разложениями вида (1.16), (2.51), (2.52), получим аналогично (2.53)

$$\begin{aligned} E_{2,j} &= V(x_j)\mathbf{E}\left[1 + \frac{Z_{j-1,n}}{z_j} + \frac{Z_{j-1,n}^2}{2z_j^2} + \frac{(1-\alpha)Z_{j-1,n}^2}{2x_jz_j}(1+o(1)); |Z_{j-1,n}| \le z_j\right] \\ &= V(x_j)\left[1 + \frac{\mathbf{E}Z_{j-1,n}}{z_j} + \frac{\mathbf{E}Z_{j-1,n}^2}{2z_j^2}\left(1 + \frac{(1-\alpha)z_j}{x_j}(1+o(1))\right) + R_{n,j}\right], \end{aligned} \tag{4.36}$$

где

$$\begin{gathered} |R_{n,j}| \le R_j^{(0)} + R_j^{(1)} + R_j^{(2)} + R_j^{(b')}, \\ R_j^{(k)} \le \frac{c}{z_j^k}\mathbf{E}(|Z_{j-1,n}|^k; |Z_{j,n}| > z_j), \quad k = 0,1,2; \\ R_j^{(b')} \le z_j^{-b'}\mathbf{E}(|Z_{j-1,n}|^{b'}; |Z_{j-1,n}| \le z_j). \end{gathered} \tag{4.37}$$

В силу неравенств (4.22) и леммы 4.3 моменты $Z_{j,n}$ по множеству $|Z_{j,n}| > z_j$ допускают те же оценки, что и моменты S_j по множеству $|S_j| > z_j$. Поэтому оценки значений $R_j^{(k)}$, $k = 0,1,2,b'$, происходят точно так же, как оценки T_k и U_k в (2.54):

$$R_j^{(k)} \le cjz_j^{-b}, \quad R_j^{(b')} \le cz_j^{-b'}j^{b'/2}. \tag{4.38}$$

Тем самым суммарный остаточный член в силу (4.36)–(4.38) и леммы 4.1 не будет превосходить

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |R_{n,j}| &\le c\left[\sum_{j=1}^n \frac{jV(x_j)}{z_j^b} + \sum_{j=1}^n \frac{j^{b'/2}V(x_j)}{z_j^{b'}}\right] \\ &\le c_1V(x)\left[\frac{m^2}{z^b} + \frac{m^{b'/2+1}}{z^{b'}}\right] \le c_2V(x)\frac{m^{b'/2+1}}{z^{b'}}, \end{aligned}$$

$m = \min(z,n)$. Так как, кроме того,

$$\mathbf{E}Z_{j-1,n} = \mathbf{E}\overline{S}_{n-j}(a), \quad \mathbf{E}(Z_{j-1,n})^2 = j - 1 + \mathbf{E}(\overline{S}_{n-j}(a))^2$$

и все остальные оценки (для $E_{1,j}$, $E_{3,j}$) имеют более высокий порядок малости, то теорема 4.1 доказана.

§ 5. Большие уклонения $\overline{S}_n(-a)$ при $a > 0$

Основным объектом изучения в этом параграфе является асимптотика вероятности

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(-a) - an > x), \quad \overline{S}_n(-a) = \max_{k \le n}(S_k + ak), \quad a > 0, \tag{5.1}$$

при $x \to \infty$. Можно отметить несколько подходов к изучению этой асимптотики. Один из них основан на том, что $S_n(-a)$ при $a > 0$ в известном смысле «почти совпадает» с $S_n + an$. Более точно,

$$S_n \le \overline{S}_n(-a) - an = S_n + \zeta_n, \tag{5.2}$$

где при $X_i(a) = X_i + a$, $S_n(a) = S_n + an$,

$$\zeta_n = \max(0, -X_n(a), -X_n(a) - X_{n-1}(a), \dots, -S_n(a)) \tag{5.3}$$

совпадает по распределению с $\max\limits_{k\le n}(-S_k(a)) = -\min\limits_{k\le n} S_k(a)$ и мажорируется собственной случайной величиной $\zeta = \sup\limits_{k\ge 0}(-S_k(a))$ ($\mathbf{E}\zeta^{b-1} < \infty$, если $\mathbf{E}|X_j|^b < \infty$). Однако оценки вероятностей больших уклонений, основанные на (5.2), затруднены и нежелательны по крайней мере по двум причинам.

1. ζ_n и S_n зависимы.

2. Оценки вероятностей больших уклонений ζ_n накладывают дополнительные условия на «отрицательные хвосты» распределений X_i, которые для рассматриваемых нами задач являются излишними.

Другой подход связан с более грубыми неравенствами

$$S_n \le \overline{S}_n(-a) - an \le \overline{S}_n. \tag{5.4}$$

Эти неравенства и уже полученные результаты дают правильную оценку для асимптотики (5.1) в области $x \gg N_2(n)$ и «почти правильную» (с точностью до множителя 2) в промежуточной области $N_1(n) \ll x \ll N_2(n)$.

В этом параграфе будем использовать тот же подход, что и в § 2–4. Будем предполагать, что выполнено условие [D_1] или [D_2], а для промежуточной области уклонений — также условие (ср. с условиями [CA], [$\overline{\mathrm{CA}}$])

[CA]*. *В области*

$$0 < x < N_+(n) = N_1(n)(1 - \varepsilon(n)),$$

$\varepsilon(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *для* $\mathbf{P}(\overline{S}_n(-a) - an > x)$ *справедливо равномерное приближение, определяемое правой частью* (1.6).

В [8] установлено, что условие [CA]* будет выполнено, если выполнено (1.28). Как и прежде, при выполнении (1.3) и достаточно больших $b > 2$ условие [CA]*, по-видимому, будет излишним.

Если следовать теперь тому же пути, по которому шло изложение в § 2–4, то в силу неравенств (5.2), (5.4) это изложение не претерпит никаких серьезных изменений. Поэтому мы приведем здесь лишь краткую схему доказательства следующего основного утверждения.

Теорема 5.1. 1. *Полностью сохранятся первое и второе утверждения теоремы* 2.1, *если в нем* S_n *заменить на* $\overline{S}_n(-a) - an$, *а условие* [CA] — *на* [CA]*.

2. *Пусть выполнено* [D_2] *и* $s_2 = \frac{x}{N_2(n)} \to \infty$ ($\sigma_2 = nw_2(x) \to 0$). *Тогда равномерно по* x *и* n *из указанной области*

$$\mathbf{P}(S_n(-a) - an > x) = nV(x)\Biggl[1 + \frac{1}{zn}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\zeta_j + \frac{n-1}{2z^2} + \frac{(1-\alpha)(n-1)}{2xz}(1+o(1))$$

$$+ o\biggl(\frac{\sqrt{n}}{z^2}\biggr) + O\biggl(\frac{n^{3-b}}{z^2}\biggr) + O\biggl(\frac{n^{b'/2}}{z^{b'}}\biggr)\Biggr] = nV(x)\biggl[1 + \frac{\mathbf{E}\zeta}{z} + \frac{n}{2z^2} + \frac{(1-\alpha)n}{2xz}(1+o(1))$$

$$+ o\biggl(\frac{1}{z}\biggr) + O\biggl(\frac{n^{b'/2}}{z^{b'}}\biggr) + O\biggl(\frac{n^{3-b}}{z^2}\biggr)\biggr], \tag{5.5}$$

где ζ_j *и* ζ *определены в* (5.3).

Здесь также справедливы аналоги замечаний 2.1–2.3 к теореме 2.1. Сравнение с теоремой 2.1 показывает, что асимптотическое разложение для $\mathbf{P}(S_n > x)$ и $\mathbf{P}(\overline{S}_n(-an) - an > x)$ отличается уже первым членом, если $z \gg n$ ($x \gg n^{\frac{1}{1-\alpha}}$).

Доказательство первой части теоремы не содержит сколько-нибудь значительных отклонений от рассмотрений § 2, 3. Основной вклад в асимптотику

$\mathbf{P}(G_n)$, $G_n = \{\overline{S}_n(-a) - an > x\}$, будет аналогично предыдущему принадлежать слагаемым (ср. с (2.26), (2.27), (3.7))

$$\mathbf{P}(G_n \overline{B}_j \{\overline{S}_{j-1}(-a) - a(j-1) \le x - y\}), \quad \overline{B}_j = \{X_j > y\},$$

которые с точностью до соответствующих поправочных слагаемых более высокого порядка малости (в силу (5.2), (5.4) все оценки сохраняются) можно записать в виде

$$\mathbf{P}\big(S_{j-1} + X_j + \overline{S}^*_{n-j}(-a) - a(n-j) > x, S_{j-1} + \overline{S}_{n-j}(-a) - a(n-j) \le x - y\big)$$
$$= \mathbf{E}\big[V\big(x - S_{j-1} - \overline{S}^*_{n-j}(-a) + a(n-j)\big); S_{j-1} + \overline{S}_{n-j}(-a) - a(n-j) \le x - y\big], \tag{5.6}$$

где $\overline{S}^*_{n-j}(-a)$ не зависит от $X_1, \dots, X_j$ и совпадает по распределению с $\overline{S}_{n-j}(-a)$. Аналогично § 3 (см. лемму 3.1) убеждаемся, что в зоне уклонений $x < \delta N_+$ для $Z_{j-1,n} = S_{j-1} + \overline{S}^*_{n-j}(-a) - a(n-j)$ действуют те же приближения вида (1.6), которые справедливы для S_n (все оценки в силу (5.4) сохраняются). Поэтому и результаты вычислений асимптотики (5.6) будут теми же, что в теореме 2.1. Это доказывает первое утверждение теоремы.

При изучении асимптотических разложений вероятностей (5.1) появятся некоторые изменения по сравнению с теоремой 2.1. Здесь надо воспользоваться представлениями

$$Z_{j-1,n} \equiv S_{j-1} + \overline{S}^*_{n-j}(-a) - a(n-j) \underset{d}{=} S_{n-1} + \zeta^*_{n-j},$$

где ζ^*_{n-j} распределена как ζ_{n-j} и определяется соответствующим образом последними $n-j$ слагаемыми в S_{n-1}. Далее, как и прежде, надо воспользоваться разложениями (2.51), (2.52). Аналогично (2.53), (3.24), (4.36) получим

$$\mathbf{P}(G_n) = nV(x)\Bigg[1 + \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbf{E}\zeta_{n-j}}{zn} + \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbf{E}(Z_{j-1,n})^2}{2z^2 n} \times \left(1 + \frac{(1-\alpha)z}{x}(1+o(1))\right) + R_n(x)\Bigg], \tag{5.7}$$

$$|R_n(x)| \le c\frac{n^{b'/2}}{z^{b'}}.$$

Далее надо воспользоваться соотношениями

$$\mathbf{E}Z_{j-1,n} = \mathbf{E}(S_{n-1} + \zeta^*_{n-j}) = \mathbf{E}\zeta_{n-j} \to \mathbf{E}\zeta \quad \text{при } n - j \to \infty;$$
$$\mathbf{E}Z^2_{j-1,n} = (n-1) + 2\mathbf{E}S_{n-1}\zeta^*_{n-j} + \mathbf{E}\zeta^2_{n-j}.$$

Здесь $\mathbf{E}S_{n-1}\zeta^*_{n-j} = o(\sqrt{n})$, так как $\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}$ и ζ^*_{n-j} асимптотически независимы. Из результатов [12] вытекает, что

$$\mathbf{P}(\zeta_n > x) \le c\min(n, x)x^{-b},$$

так что

$$\mathbf{E}\zeta_n^2 \le c \le \infty \quad \text{при } b \ge 3 \text{ и всех } n \quad \text{и } \mathbf{E}\zeta_n^2 \le cn^{3-b} \text{ при } b < 3.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}Z^2_{j-1,n} = n + o(\sqrt{n}) + O(n^{3-b}).$$

Подставляя это в (5.7), получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Основные результаты работы получены во время пребывания автора в Лунде в ноябре 1999 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
2. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. 1965. Т. 10, № 2. С. 231–254.
3. *Петров В. В.* Предельные теоремы для больших уклонений, когда условие Крамера нарушено. I, II // Вестн. Ленингр. ун-та. I: 1963. Вып. 19. С. 49–68; II: 1969. Вып. 1. С. 58–75.
4. *Вольф В.* О вероятностях больших уклонений в случае нарушения условия Крамера // Math. Nachr. 1975. Bd 70. S. 197–215.
5. *Wolf W.* Asymptotische Entwicklungen fer Wahrscheinlichkeiten grosser Abweichungen // Z. Wahrsch. Verw. Geb. 1977. Bd 40. S. 239–256.
6. *Саулис Л., Статулявичус В.* Предельные теоремы о больших уклонениях. Вильнюс: Мокслас, 1989.
7. *Осипов Л. В.* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1972. Т. 17, № 2. С. 320–341.
8. *Алешкявичене А. К.* О вероятностях больших уклонений максимума сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, № 1. С. 322–337.
9. *Нагаев А. В.* Об одном свойстве сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, № 2. С. 335–346.
10. *Розовский Л. В.* Вероятности больших уклонений на всей оси. // Теория вероятностей и ее применения. 1993. Т. 38, № 1. С. 79–109.
11. *Пинелис И. Ф.* Об асимптотической эквивалентности вероятностей больших уклонений суммы и максимума независимых случайных величин // Тр. Ин-та математики / АН СССР, Сиб. отд-ние. 1985. Т. 5. С. 144–173.
12. *Боровков А. А.* Оценки для распределений сумм и максимумов сумм случайных величин при невыполнении условия Крамера // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 997–1038.
13. *Mikosh T., Nagaev A. V.* Large deviations of heavy-tailed sums with applications in insurance // Extremes. 1998. V. 1, N 1. P. 81–110.
14. *Нагаев А. В.* Интегральные предельные теоремы, включающие большие уклонения, когда условие Крамера не выполнено // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14, № 1. С. 51–64.
15. *Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений максимумов сумм независимых слагаемых с отрицательным средним и субэкспоненциальным распределением // Теория вероятностей и ее применения (в печати).
16. *Veraverbeke N.* Asymptotic behaviour of Wiener — Hopf factors of a random walk // Stochastic Process. Appl. 1977. V. 5, N 1. P. 27–37.
17. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Вероятности больших уклонений для случайных блужданий с регулярным распределением скачков // Докл. РАН. 2000. Т. 371, № 1. С. 14–16.
18. *Borovkov A. A., Borovkov K. A.* On large deviation probabilities for random walks. I. Regularly varying distribution tails. II. Regular exponential tails. Novosibirsk, October, 1999. 42 p. (Preprint №62 / The Sobolev Inst. Math.).
19. *Borovkov A.A., Boxma O.J.* On large deviation probabilities for random walks with heavy tails. Eindhoven, 2000. (Preprint, EURANDOM).

Статья поступила 14 июня 2000 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
borovkov@math.nsc.ru