*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6*

*УДК 510.5*

# О СВОДИМОСТЯХ ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

**А. Н. Дегтев, Е. С. Сакунова**

**Аннотация:** Рассматриваются $m$-, $p$- и $e$-сводимости частично-рекурсивных функций (ЧРФ). Доказывается, что верхняя полурешетка $L$ $e$-степеней ЧРФ изоморфна прямому произведению верхней полурешетки $T$-степеней на полурешетку рекурсивно-перечислимых множеств (РПМ). Вводятся две сводимости попарно не пересекающихся $n$-ок РПМ и показывается, что при $n \geq 2$ $p$-сводимость строго сильнее их $mp$-сводимости. Доказывается, что $\mathrm{Th}(L_p^s) \neq \mathrm{Th}(L_p^t)$ при $s \neq t$, где $L_p^n$ — верхняя полурешетка $n$-ок РПМ относительно $p$-сводимости. Библиогр. 5.

В статье [1] определена $e$-сводимость нумерации $\nu_0$ множества $S_0$ к нумерации $\nu_1$ множества $S_1$, где $S_0 \subseteq S_1$. Именно, $\nu_0 \leq_e \nu_1$, если существует оператор перечисления $\Phi$ такой, что

$$(\forall_s \in S_0)\bigl(\eta_0^{-1}(s) = \Phi\bigl(\nu_1^{-1}(s)\bigr)\bigr).$$

Напомним, что отображение $\Phi$ множества $\{X : X \subseteq N\}$, $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, в себя называется *оператором перечисления* (*$e$-оператором*), если существует рекурсивно перечислимое множество (РПМ) $W$ такое, что для всех $X \subseteq N$

$$\Phi(X) = \{x : (\exists y)(\langle x, y\rangle \in W \wedge D_y \subseteq X)\},$$

где $\langle x, y\rangle$ — канторовский номер пары $(xy)$, $x, y \in N$, а $D_y$ — конечное множество с каноническим номером $y$. Ниже будем отождествлять $\Phi$ с РПМ $W$, его определяющим. В частности, $\Phi$ называется $m$- или $p$-оператором, если существует общерекурсивная функция (ОРФ) $f$ такая, что

$$(\forall X \subseteq N)(\Phi(X) = \{x : f(x \in X\}),$$

соответственно

$$(\forall X \subseteq N)(\Phi(X) = \{x : (\exists y \in D_{f(x)})(D_y \subseteq X)\}).$$

Если ограничиться только $m$- или $p$-операторами, то придем к определению $m$- (обычной) и $p$- (позитивной) сводимостям нумераций, являющимся частными случаями $e$-сводимости.

Взглянем теперь на производную ЧРФ $\alpha$ как на вычислимую нумерацию некоторого подмножества $\{\varnothing, 0, 1, \dots\}$, полагая

$$\alpha(x) = \begin{cases} n, & \text{если } \alpha(x) = n, \\ \varnothing, & \text{если } \alpha(x) \text{ не определено.} \end{cases}$$

Это позволяет для любых двух ЧРФ $\alpha$ и $\beta$ определить как их $m$-сводимость, которая рассматривалась в [2, 3], так и сводимость. Точнее, $\alpha \leq_p \beta$, если существует ОРФ $f$ такая, что

$$(\forall z \in R(\alpha))(\alpha^{-1}(z) = \{x : (\exists y \in D_{f(x)})(D_y \subseteq \beta^{-1}(z))\}),$$

где $R(\alpha) = \rho(\alpha) \cup \{\varnothing\}$, $\rho(\alpha)$ — обычная область значений $\alpha$. В этом случае (и если $\alpha(x) = \beta f(x)$) полагаем, что $\alpha \leq_p \beta$ ($\alpha \leq_m \beta$) посредством ОРФ $f$. Аналогично $\alpha \leq_e \beta$, если найдется РПМ $W$ такое, что

$$(\forall z \in R(\alpha))(\alpha^{-1}(z) = \{x : (\exists y)(\langle x, y\rangle \in W \wedge D_y \subseteq \beta^{-1}(z))\}).$$

Нетрудно проверить, что отношения $\leq_m$, $\leq_p$, и $\leq_e$ на множестве всех ЧРФ являются предпорядками. Поэтому обычным образом можно определить $m$-, $p$- и $e$-степени ЧРФ и их верхние полурешетки. В частности, точной верхней гранью двух $m$- ($p$- или $m$-) степеней, содержащих ЧРФ $\alpha$ и $\beta$, будет $m$- ($p$- или $m$-) степени, содержащие ЧРФ $\alpha \oplus \beta$, где

$$(\alpha \oplus \beta)(x) = \begin{cases} \alpha(y), & \text{если } x = 2y, \\ \beta(y), & \text{если } x = 2y + 1. \end{cases}$$

Договоримся, что если $\mathscr{T} = \langle T; \leq\rangle$ и $\mathscr{E} = \langle E; \subseteq\rangle$ — два частично упорядоченных множества, то пусть

$$\mathscr{T} \times \mathscr{E} = \langle \mathscr{E} \times E; \lhd\rangle,$$

где $T \times E = \{(t, e) : t \in T \wedge e \in E\}$, причем

$$(t_1, e_1) \lhd (t_2, e_2) \risingdotseq t_1 \leq t_2 \wedge e_1 \leq e_2.$$

Обозначим через $\mathscr{L}$ ($\mathscr{T}$, $\mathscr{E}$) верхнюю полурешетку $e$-степеней всех ЧРФ, не являющихся ОРФ (всех рекурсивно перечислимых $T$-степеней и всех РПМ относительно $\subseteq$).

**Предложение 1.** *Полурешетки $\mathscr{L}$ и $\mathscr{T} \times \mathscr{E}$ изоморфны.*

Доказательство. Будем обозначать через $\delta(\alpha)$, $\delta(\beta)$ области определения ЧРФ $\alpha$, $\beta$, а $\overline{X} = N \setminus X$ для $X \subseteq N$. Для любых ЧРФ $\alpha$ и $\beta$, $\delta(\alpha), \delta(\beta) \neq N$, достаточно показать, что

$$\alpha \leq_e \beta \Leftrightarrow \delta(\alpha) \leq_T \delta(\beta) \wedge \rho(\alpha) \subseteq \rho(\beta).$$

Если $\alpha \leq_e \beta$, то $\rho(\alpha) \subseteq \rho(\beta)$, $\overline{\delta(\alpha)} \leq_e \overline{\delta(\beta)}$. Но $e$- сводимость дополнений РПМ равносильна их $T$-сводимости.

Обратно, если $\rho(\alpha) \subseteq \rho(\beta)$, $\delta(\alpha) \leq_+ \delta(\beta)$, то существует $e$-оператор $\Phi$ такой, что $\overline{\delta(\alpha)} = \Phi(\overline{\delta(\beta)})$. Пусть $b = \min\{x \in \delta(\beta)\}$ и

$$\Psi = \{\langle x, y\rangle : (\exists z)(\langle x, z\rangle \in \Phi \wedge D_y = D_z \cup \{b\})\} \\ \vee \{\langle x, y\rangle : x \in \delta(\alpha) \wedge D_y = \{x\} \wedge z \in \delta(\beta) \wedge \alpha(x) = \beta(z)\}.$$

Легко проверить, что $\alpha \leq_e \beta$ посредством $e$-оператора $\Psi$. $\square$

**Следствие 1.** *Верхняя полурешетка всех $e$-степеней* ЧРФ, *не являющихся* ОРФ, *$T$-степени областей определения которых равны, изоморфна решетке $\mathscr{E}$.*

**Следствие 2.** *Верхняя полурешетка всех $e$-степеней* ЧРФ, *не являющихся* ОРФ, *с равными областями значений изоморфна полурешетке $\mathscr{T}$.*

Пусть теперь $R(\alpha) = R(\beta) = \{\varnothing, 0, 1, \dots, n-1\}$ и $\alpha \leq_p \beta$. Это означает существование $p$-оператора $\Phi$ такого, что

$$(\forall z \in R(\alpha)(\alpha^{-1}(z) = \Phi(\beta^{-1}(z))).$$

Положим $A_i = \alpha^{-1}(i)(B_i = \beta^{-1}(i))$ для $i \in \rho(\alpha)$ ($\rho(\beta)$). Получим два набора непустых попарно не пересекающихся РПМ $\langle A_0, \dots, A_{n-1}\rangle$, $\langle B_1, \dots, B_{n-1}\rangle$, причем первый $p$-сводим ко второму в смысле

$$(\forall i < n)(A_i = \Phi(B_i)) \wedge \overline{\rho(\alpha)} = \Phi(\overline{\rho(\beta)}) \tag{1}$$

посредством $p$-оператора $\Phi$.

**Лемма 1.** *Соотношение* $\langle A_0,\dots,A_{n-1}\rangle \le_p \langle B_0,\dots,B_1\rangle$ *имеет место тогда и только тогда, когда существуют* $p$*-операторы* $\Phi_i$, $i\le n$, *такие, что*

$$(\forall i<n)(A_i=\Phi_i(B_i))\wedge\overline{\bigcup_{i<n}A_i}=\Phi_n\Bigl(\overline{\bigcup_{i<n}B_i}\Bigr). \tag{2}$$

Доказательство. В одну сторону утверждение следует из (1).

Обратно, пусть $p$-операторы $\Phi_i$, $i\le n$, с условием (2) существуют. Для каждого $i\le n$ положим

$$\Psi_i\{\langle x,y\rangle:(\exists z)(\langle x,z\rangle\in\Phi_i\wedge D_y=D_z\cup\{b_i\})\},$$

где $b_i=\min\{x\in B_i\}$ для $i<n$ и $b_n=\min\{x\in\overline{\bigcup_{i<n}B_i}\}$. Легко понять, что $\langle A_0,\dots,A_{n-1}\rangle\le_p\langle B_0,\dots,B_{n-1}\rangle$ посредством $p$-оператора $\Psi=\bigcup_{i\le n}\Psi_i$. □

Определим теперь кратную позитивную ($mp$-) сводимость наборов из $n$ множеств так:

$$\langle A_0,\dots,A_{n-1}\rangle\le_{mp}\langle B_0,\dots,B_{n-1}\rangle\leftrightharpoons(\forall i<n)(A_i=\Phi(B_i)) \tag{3}$$

для подходящего $p$-оператора $\Phi$. Ясно, что $p$-сводимость наборов из $m$ множеств влечет их $mp$-сводимость. Из доказательства леммы 1 получим также

**Следствие 3.** *Соотношение* $\langle A_0,\dots,A_{n-1}\rangle\le_{mp}\langle B_0,\dots,B_{n-1}\rangle$ *имеет место тогда и только тогда, когда существуют* $p$*-операторы* $\Phi_i$, $i<n$, *такие, что* $(\forall i)(A_i=\Phi_i(B_i))$.

**Лемма 2.** $A\le_p B\Rightarrow\overline{A}\le_p\overline{B}$.

Доказательство. Предположим, что $A\le_p B$, т. е. существует ОРФ $f$ такая, что

$$(\forall x)(x\in A\Leftrightarrow(\exists y\in D_{f(x)}(D_y\subseteq B)).$$

Если $D_{f(x)}=\{y_0,\dots,y_m\}$, то пусть $D_{z(x)}=\{u_0,\dots,u_s\}$ состоит из номеров всех тех конечных множеств $D_u$, для которых $|D_u|=m+1$ и

$$(\forall y)(y\in D_{f(x)}\Rightarrow|D_y\cap D_u|=1).$$

Но $x\in\overline{A}\Leftrightarrow D_y\cap\overline{B}=\varnothing$ для всех $y\in D_{f(x)}$. Поэтому $D_u\subseteq\overline{B}$ для некоторого $u\in D_{z(x)}$. Так как $z(x)$ находится эффективно по $x$, то $z(x)=g(x)$ — ОРФ. Поэтому $\overline{A}\le_p\overline{B}$ посредством ОРФ $g$. □

Из леммы 2 следует, что при $n=1$ $p$-сводимость совпадает с $mp$-сводимостью.

**Предложение 2.** *При* $n\ge2$ $p$*-сводимость наборов из* $n$ *множеств строго сильнее их* $mp$*-сводимости.*

Доказательство. Проверим этот факт для $n=2$. Пусть $B$ — гиперпростое множество с ретрассируемым дополнением [4] и $B_0$, $B_1$ — его разбиение на два рекурсивно неотделимых РПМ и

$$A_0=\{2x:x\in B_0\},\quad A_1=\{2x+1:x\in B_1\}.$$

В частности, $A_0\oplus A_1=A_0\cup A_1$. Понятно, что $\langle A_0,A_1\rangle\le_{mp}\langle B_0,B_1\rangle$ посредством ОРФ $h$, где

$$D_{h(x)}=\begin{cases}\{u(x)\}, & \text{где } D_{u(x)}=\{b_0,y\},\ \text{если } x=2y;\\ \{v(x)\}, & \text{где } D_{v(x)}=\{b_1,y\},\ \text{если } x=2y+1.\end{cases}$$

Здесь $b_0$ и $b_1$ — фиксированные элементы из $B_0$ и $B_1$. Предположим, что $\langle A_0, A_1\rangle \leq_p \langle B_0, B_1\rangle$. Так как $\overline{A_0 \cup A_1} \leq_p \overline{B_0 \cup B_1}$, то по лемме 2 $A_0 \cup A_1 \leq_p B_0 \cup B_1$. Поскольку $B_0 \cup B_1$ — полурекурсивное множество, то $A_0 \cup A_1 \leq_m B_0 \cup B_1$ [4]. Но РПМ $A_0 \cup A_1$ рекурсивно не отделимо от $A_1 \cup A_0$, а $B_0 \cup B_1$ — простое множество. Приходим к противоречию с $m$-сходимостью таких множеств. $\square$

Обозначим через $L_p^n$ ($L_{mp}^n$) верхнюю полурешетку $p$-степеней всех ЧРФ с областью значений $R = \{\varnothing, 0, \dots, n-1\}$ (соответственно всех $n$-к непустых РПМ). В частности, $L_{mp}^1 = \mathscr{P}$ — верхняя полурешетка всех $p$-степеней непустых РПМ. Из (3) следует, что $L_{mp}^n$ изоморфна $\mathscr{P}^n$, а в [5] доказано, что элементарные теории $\mathrm{Th}\big(L_{pm}^s\big)$ и $\mathrm{Th}\big(L_{pm}^t\big)$ различны при $s \neq t$.

Обратимся теперь к полурешеткам $L_p^n$ и будем отождествлять ЧРФ $\alpha$, $R(\alpha) = \{\varnothing, 0, \dots, n-1\}$, с соответствующими им наборами $\langle A_0, \dots, A_{n-1}\rangle$ попарно не пересекающихся непустых РПМ (такие наборы находятся во взаимно однозначном соответствии с указанными ЧРФ).

Из леммы 1 следует, что $L_p^n$ имеет наименьший (наибольший) элемент $p$-степени таких $\langle A_0, \dots, A_{n-1}\rangle$, что каждое $A_i$, $i < n$, является рекурсивным ($p$-полным). Видимо, $L_p^n$ устроены достаточно сложно, что углубляется еще и следующим фактом.

**Предложение 3.** $\mathrm{Th}\big(L_p^s\big) \neq \mathrm{Th}\big(L_p^t\big)$ *при* $t \neq s$.

Доказательство. Надо почти скопировать доказательство основной теоремы о $\mathrm{Th}\big(L_{mp}^n\big)$ из [5]. Поэтому ограничимся лишь частным случаем: $\mathrm{Th}\big(L_p^2\big) \neq \mathrm{Th}\big(L_p^3\big)$. Для этого покажем, что в $L_p^2$ истинно следующее утверждение: существуют два различных минимальных элемента $a_1$, $a_2$ таких, что

$$(\forall b)(b < a_1 \oplus a_2 \Rightarrow (b \leq a_1 \vee b \leq a_2)), \tag{4}$$

но для любого минимального элемента $b \neq a_1, a_2$

$$(\exists c)((c < a_1 \oplus b \wedge c \nleq a_1 \wedge c \nleq b) \vee (c < a_2 \oplus b \wedge c \nleq a_2 \wedge c \nleq b)). \tag{5}$$

Действительно, минимальными элементами $L_p^n$, как следует из леммы 1 и определения минимальности, будут наборы $\langle A_0, \dots, A_{n-1}\rangle$ такие, что некоторое РПМ $A_i$ имеет минимальную $P$-степень, а остальные $A_j$ — рекурсивные множества, скажем, $R = \{2x : x \in N\}$. Известно [5] существование РПМ $A$ минимальной $p$-степени $a$, обладающей следующим свойством: для всякой минимальной $p$-степени $b$, $b \neq a$,

$$(\exists c)(c < a \oplus b \wedge c \nleq a \wedge c \nleq b).$$

Возьмем в качестве $a_1$, $a_2$ $p$-степени пар $\langle A, R\rangle$, $\langle R, A\rangle$. Так как $a_1 \oplus a_2$ будет $p$-степенью $\langle A, A\rangle$, то если $\langle B, R\rangle$ или $\langle R, B\rangle$ $p$-сводима к $\langle A, A\rangle$, то $B \leq_p A$ и поэтому $\langle B, R\rangle \leq_p \langle A, R\rangle$ или $\langle R, B\rangle \leq_p \langle R, A\rangle$. Пусть $b \in L_p^2$ тоже минимальный элемент, $b \neq a_1, a_2$. Тогда $b$ будет $p$-степенью пары $\langle B, R\rangle$ (или $\langle R, B\rangle$). По выбору $A$ найдется РПМ $C$ такое, что

$$C <_p A \oplus B \wedge C \nleq A \wedge C \nleq B.$$

Понятно, что если $c$ — $p$-степень $\langle C, R\rangle$, то

$$c < a_1 \oplus b \wedge c \nleq a_1 \wedge c \nleq b.$$

С другой стороны, пусть для двух минимальных элементов $a_1, a_2 \in L_p^3$ выполнено (4). Тогда $a_1$, $a_2$ являются $p$-степенями с точностью до перестановок множеств в них подходящих троек $\langle A_1, R, R\rangle$, $\langle A_2, A_3, R\rangle$, где одно из $A_2$, $A_3$ равно

$R$. Возьмем в качестве $b$ $p$-степень множеств $\langle R, R, A\rangle$. Ясно, что $b \neq a_1, a_2$ и условие (5) оказывается ложным, так как для всякой $c \in L_p^3$

$$(c < a_1 \oplus b \Rightarrow c \leq a_1 \vee c \leq b) \vee (c < a_2 \oplus b \Rightarrow c \leq a_2 \vee c \leq b). \quad \square$$

Интересно было бы получить дополнительную информацию о строении $L_p^n$, $n \geq 1$.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Дегтев А. Н.* О сводимостях нумераций // Мат. сб. 1980. Т. 112, № 2. С. 207–219.

**2.** *Дегтев А. Н.* Сводимость частично рекурсивных функций. I // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 5. С. 970–988.

**3.** *Дегтев А. Н.* Сводимость частично-рекурсивных функций. II // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 17, № 4. С. 765–774.

**4.** *Jockusch C. G.* Semirecursive sets and positive reducibility // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131, N 2. P. 420–436.

**5.** *Дегтев А. Н.* О кратной позитивной сводимости // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 74–76.


*Статья поступила 3 марта 1998 г.*

*г. Тюмень*
*Тюменский гос. университет*