Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 512.546

ДОПОЛНЯЕМЫЕ ТОПОЛОГИИ НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Е. Г. Зеленюк, И. В. Протасов

Аннотация: Топология τ на группе G называется дополняемой, если существует такая недискретная топология τ' на G, что $U \cap V = \{0\}$ для подходящих окрестностей U и V нуля в топологиях τ и τ'. Получен критерий дополняемости произвольной топологии. Описаны локально компактные группы с дополняемыми топологиями. Доказана компактность группы, все непрерывные гомоморфные образы которой полны. На любой бесконечной группе определено семейство 2^ω попарно взаимно-дополняемых топологией. Библиогр. 4.

К 80-летию профессора
Виктора Сильвестровича Чарина

Все рассматриваемые группы предполагаются абелевыми, а топологии — групповыми и хаусдорфовыми. Топология τ на группе G называется *дополняемой*, если существует недискретная топология τ' на G такая, что $U \cup V = \{0\}$ для некоторых окрестностей U и V нуля в топологиях τ и τ'. Так как любая бесконечная группа допускает недискретную топологизацию, дискретная топология на любой бесконечной группе дополняема. С другой стороны, верхняя грань вполне ограниченной и недискретной топологий недискретна. Поэтому вполне ограниченная (в частности, компактная) топология недополняема.

Основной результат статьи — критерий дополняемости топологии — получен в § 2. При доказательстве существенно используется метод T-последовательностей, развитый в работах [1, 2]. Все необходимые сведения о T-последовательностях собраны в § 1. Здесь же содержится характеризация T-подмножеств группы — окрестностей нуля в недискретных топологиях. Разнообразные достаточные признаки дополняемости, а также описание локально компактных групп с дополняемыми топологиями приведены в § 3. В § 4 доказано, что среди фактор-групп не вполне ограниченной группы непременно содержится группа с дополняемой топологией. Отсюда извлекается следующая теорема: *если все непрерывные гомоморфные образы топологической группы G полны* (*в топологическом смысле*), *то G компактна.* Наконец, в § 5 строятся вполне упорядоченные ω_1-цепи топологий, определенных T-последовательностями. Доказано также, что на любой бесконечной группе можно определить семейство мощности 2^ω попарно взаимно-дополняемых топологий. По ходу изложения сформулировано 5 открытых вопросов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда ISSEP.

§ 1. T-последовательности и T-подмножества

1.1. Определение. Последовательность $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ элементов группы G называется *T-последовательностью*, если существует топология на G, в которой эта последовательность сходится к нулю. Группу G, снабженную максимальной топологией, в которой T-последовательность $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ сходится к нулю, обозначим через $(G \mid \langle a_n\rangle_{n\in\omega})$. По определению *топология τ на группе G задана T-последовательностью* $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$, если $(G,\tau) = (G \mid \langle a_n\rangle_{n\in\omega})$.

1.2. Определение. Пусть $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ — произвольная последовательность элементов группы G. *Положим* $A_n^* = \{0, \pm a_n, \pm a_{n+1}, \dots\}$. Для любой последовательности $\langle n_i\rangle_{i\in\omega}$ из ω *обозначим*

$$\sum_{i\le m} A_{n_i}^* = A_{n_0}^* + \dots + A_{n_m}^*, \quad \sum_{i\in\omega} A_{n_i}^* = \bigcup_{m\in\omega}\sum_{i\le m} A_{n_i}^*.$$

1.3. Определение. Пусть $a_0, a_1, \dots, a_n$ — произвольные элементы группы G. *Положим*

$$X(a_0,\dots,a_n) = \{x_0a_0 + \dots + x_na_n : x_i \in \{0, \pm 1, \dots, \pm(i+1),\ i \le n\}\}.$$

Заметим, что для любой последовательности $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ элементов группы G *справедливо равенство*

$$\sum_{n\in\omega} A_n^* = \bigcup_{n\in\omega}(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

1.4. Теорема. *Последовательность $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ элементов группы G является T-последовательностью тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$, $g \ne 0$, найдется такая последовательность $\langle n_i\rangle_{i\in\omega}$ из ω, что $g \notin \sum_{i\in\omega} A_{n_i}^*$. Для любой T-последовательности $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ семейство подмножеств вида $\sum_{i\in\omega} A_{n_i}^*$ образует базу окрестностей нуля топологической группы $(G \mid \langle a_n\rangle_{n\in\omega})$.*

Доказательство вытекает из [1, теорема 1].

1.5. Теорема. *Пусть A — бесконечное подмножество группы G такое, что уравнение $kx = g$ имеет конечное число решений в A для любого ненулевого элемента $g \in G$ и для любого натурального числа k. Тогда существует T-последовательность $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$, состоящая из элементов подмножества A.*

Доказательство. См. [1, теорема 4].

1.6. Теорема. *Топологическая группа $(G \mid \langle a_n\rangle_{n\in\omega})$ полна для любой T-последовательности $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ элементов группы G.*

Доказательство. См. [1, теорема 8].

1.7. Определение. Подмножество A группы G называется *T-подмножеством*, если A является окрестностью нуля в некоторой недискретной топологии на группе G.

1.8. Определение. T-последовательность $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ называется *тривиальной*, если найдется такой номер m, что $a_n = 0$ для всех $n \ge m$. Заметим, что топологическая группа $(G \mid \langle a_n\rangle_{n\in\omega})$ *дискретна* тогда и только тогда, когда $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ — тривиальная T-последовательность. Последовательность $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ элементов группы G называется *инъективной*, если $a_n \ne a_m$ при $n \ne m$.

1.9. Теорема. *Для любого подмножества A группы G следующие условия равносильны:*

(a) *A — T-подмножество,*

(b) *A — окрестность нуля в некоторой топологии, определенной нетривиальной T-последовательностью,*

(c) *существует инъективная последовательность $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ элементов группы G такая, что $\bigcup\limits_{n\in\omega} X(a_0,\dots,a_n)\subseteq A$.*

Доказательство. $(a)\Rightarrow(c)$. Пусть τ — недискретная топология на G, в которой подмножество A является окрестностью нуля. Выберем последовательность $\langle F_n\rangle_{n\in\omega}$ окрестностей нуля в τ так, что $F_0+F_0\subset A$, $F_{n+1}+F_{n+1}\subset F_n$, $n\in\omega$. Для каждого $n\in\omega$ зафиксируем некоторый элемент $a_n\in F_{n+1}\setminus F_n$. Тогда $\bigcup\limits_{n\in\omega} X(a_0,\dots,a_n)\subseteq A$.

$(c)\Rightarrow(b)$. Вначале допустим, что существует подпоследовательность $\langle b_n\rangle_{n\in\omega}$ последовательности $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ такая, что подмножество $\{n\in\omega: kb_n=g\}$ конечно для любого ненулевого элемента $g\in G$ и для любого целого числа k. По теореме 1.5 существует T-подпоследовательность $\langle c_n\rangle_{n\in\omega}$ последовательности $\langle b_n\rangle_{n\in\omega}$. Так как $\bigcup\limits_{n\in\omega} X(c_0,\dots,c_n)\subseteq\bigcup\limits_{n\in\omega} X(a_0,\dots,a_n)$, по теореме 1.4 A — окрестность нуля в недискретной топологической группе $(G\mid\langle c_n\rangle_{n\in\omega})$.

Далее, мы можем считать, что существуют подпоследовательность $\langle b_n\rangle_{n\in\omega}$ последовательности $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$, элемент $g\in G$, $g\neq 0$, и целое число k такие, что $kb_n=g$ для всех $n\in\omega$. Положим $c_n=b_{n+1}-b_n$, $n\in\omega$. Так как $c_n\neq 0$ и $kc_n=0$ для всех $n\in\omega$, то можно выбрать подпоследовательность $\langle d_n\rangle_{n\in\omega}$ последовательности $\langle c_n\rangle_{n\in\omega}$ и простое число p так, что $\frac{k}{p}d_n\neq 0$, $n\in\omega$. Положим $m=\frac{k}{p}$. Ввиду теоремы 1.5 можно считать, что $\langle md_n\rangle_{n\in\omega}$ — T-последовательность. Наконец, переходя к подпоследовательности, получаем $X(md_0,\dots,md_n)\subseteq X(a_0,\dots,a_n)$. Следовательно, A — окрестность нуля в недискретной топологической группе $(G\mid\langle md_n\rangle_{n\in\omega})$.

$(b)\Rightarrow(c)$ очевидно.

1.10. Вопрос. Пусть G — бесконечная группа с конечным числом элементов порядка 2. Существует ли разбиение $G=A_1\cup A_2$ такое, что подмножество $g+A_i$ не является T-подмножеством для любого элемента $g\in G$ и $i\in\{0,1\}$?

Это так, если группа G счетна либо представляет собой свободную группу произвольной мощности. С другой стороны, если G содержит бесконечное подмножество элементов порядка 2, то для любого разбиения $G=A_1\cup\dots\cup A_n$ существуют подмножество разбиения A_i и элемент $g\in G$ такие, что $g+A_i$ является T-подмножеством. Обсуждение этих и дальнейших результатов в контексте разложимости групповых топологий можно найти в обзоре [3].

§ 2. Критерий дополняемости

2.1. Определение. Топология τ_1 на группе G называется *дополняемой*, если существует такая недискретная топология τ_2 на G, что $U\cap V=\{0\}$ для некоторых окрестностей нуля U и V в топологиях τ_1 и τ_2. Топология τ_2 называется *дополнением к топологии* τ_1.

2.2. Определение. Пусть τ_2 — дополнение к топологии τ_1 на группе G. Легко убедиться, что семейство подмножеств $\{U+V: U\in\tau_1,\ V\in\tau_2\}$ образует базу окрестностей нуля некоторой топологии τ на группе G. Обозначим $\tau=\tau_1+\tau_2$.

2.3. Лемма. *Для любой топологической группы (G,τ) следующие условия равносильны*:

(a) *топология τ дополняема,*

(b) *существуют окрестность нуля U в топологии τ и T-подмножество V такие, что $U \cap V = \{0\}$,*

(c) *существует дополнение к топологии τ, которое определяется некоторой T-последовательностью.*

Доказательство. Равносильность условий (a), (b) вытекает непосредственно из определений 1.7 и 2.1. Равносильность условий (b), (c) следует из теоремы 1.9.

2.4. Лемма. *Пусть (H,τ') — подгруппа топологической группы (G,τ). Если топология τ' дополняема, то топология τ также дополняема.*

Доказательство. Пусть τ'' — дополнение к топологии τ' на H. В качестве дополнения к τ возьмем топологию на G, сужение которой на H совпадает с τ''.

2.5. Лемма. *Если топологии τ_1 и τ_2 на группе G определены T-последовательностями $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$, $\langle b_n\rangle_{n\in\omega}$, причем τ_2 — дополнение к τ_1, то топология $\tau_1+\tau_2$ также определяется некоторой T-последовательностью $\langle c_n\rangle_{n\in\omega}$.*

Доказательство. Положим $c_{2n}=a_n$, $c_{2n+1}=b_n$ для всех $n\in\omega$.

2.6. Определение. Пусть U — окрестность нуля топологической группы (G,τ). Подмножество $A\subseteq G$ называется *V-ограниченным*, если $A\subseteq K+U$ для некоторого конечного подмножества $K\subseteq G$. Если подмножество G U-ограниченно для любой окрестности нуля U, то топологическая группа (G,τ) называется *вполне ограниченной*.

2.7. Лемма. *Пусть τ_2 — дополнение к топологии τ_1 на группе G. Тогда существуют окрестности нуля U и V в топологиях τ_1 и τ_2 такие, что каждое бесконечное подмножество $A\subseteq V$ U-неограниченно.*

Доказательство. Выберем окрестности U' и V' нуля в τ_1 и τ_2 так, что $U'\cap V'=\{0\}$. Подберем симметричные окрестности U и V нуля в τ_1 и τ_2 так, что $U+U\subseteq U'$, $V+V\subseteq V'$. Пусть $g\in U+V$ и $g=x_1+y_1=x_2+y_2$, где $x_1,x_2\in U$, $y_1,y_2\in V$. Тогда $x_1-x_2=y_2-y_1$. Так как $x_1-x_2\in U'$, $y_2-y_1\in V'$ и $U'\cap V'=\{0\}$, то $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Предположим, что A — бесконечное подмножество из V, но $A\subseteq K+U$ для некоторого конечного подмножества $K\subseteq G$. Выберем $g\in K$, $y_1,y_2\in A$, $y_1\neq y_2$ и $x_1,x_2\in U$ так, что $y_1=g+x_1$, $y_2=g+x_2$. Тогда $y_1-y_2=x_1-x_2$. Значит, $y_1=y_2$; противоречие.

2.8. Определение. *Банахова мера* — это вещественная функция, определенная на семействе всех подмножеств группы G и удовлетворяющая следующим условиям:

(a) $\mu(G)=1$,

(b) если $A\subseteq G$, $B\subseteq G$ и $A\cap B=\varnothing$, то $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$,

(c) $\mu(g+A)=\mu(A)$ для любых $g\in G$, $A\subseteq G$.

По поводу банаховых мер на группе см. [4].

2.9. Лемма. *Пусть (G,τ) — топологическая группа, U — окрестность нуля, n — натуральное число такие, что подмножество nG U-неограниченно. Пусть μ — банахова мера на G. Тогда*

$$\mu(\{x\in G: nx\in g+W\})=0$$

для любого элемента $g \in G$ и любой окрестности W нуля, удовлетворяющей условию $W - W \subseteq U$.

Доказательство. Обозначим $S = \{x \in G : nx \in g + W\}$ и предположим, что $\mu(S) > 0$. Так как $\mu(G) = 1$, любое дизъюнктное семейство подмножества вида $a + S$ содержит не более чем $\frac{1}{\mu(S)}$ подмножеств. Пусть $\{g_i + S : i \leq m\}$ — максимальное дизъюнктное семейство. Для любого элемента $a \in G$ найдется $i \leq m$ такое, что $a + S \cap g_i + S \neq \varnothing$. Следовательно, $G \subseteq K + S - S$, где $K = \{g_i : i \leq m\}$. Поскольку $nS - nS \subseteq W - W \subseteq U$, то $nG \subseteq nK + U$, что противоречит U-неограниченности подмножества nG.

2.10. Теорема. *Топология τ на группе G дополняема тогда и только тогда, когда существует такая окрестность нуля U в τ, что справедливо одно из следующих утверждений:*

(a) *подгруппа $G_p = \{g \in G : pg = 0\}$ неограниченна для некоторого простого числа p,*

(b) *подгруппа nG U-неограниченна для любого натурального числа n.*

Доказательство. Необходимость. Пусть τ' — дополнение к топологии τ. Пользуясь леммой 2.7, выберем окрестности U и V нуля в τ и τ' так, что любое бесконечное подмножество из V U-неограниченно. Если подмножество $G_p \cap V$ бесконечно для некоторого простого числа p, то справедливо утверждение (a). Допустим, что подмножество $G_p \cap V$ конечно для простого числа p. Зафиксируем натуральное число n и докажем утверждение (b). Так как V бесконечно, то G U-неограниченна. Следовательно, можно считать, что $n > 1$. Пусть $\{p_i : i \leq k\}$ — множество всех простых делителей числа n. Возьмем произвольную окрестность нуля V' в τ' так, что $V' \subseteq V$ и $G_{p_i} \cap V' = \{0\}$ для всех $i \leq k$. Подберем окрестность W нуля в τ', удовлетворяющую условию $W + \dots + W \subseteq V'$ с n слагаемыми слева. Если $g \in W$ и $g \neq 0$, то $ng \neq 0$. Значит, $nG \cap V' \neq \{0\}$. Отсюда следует, что подмножество $nG \cap V$ бесконечно. Следовательно, подгруппа nG U-неограниченна.

Достаточность. Предположим, что справедливо утверждение (a). Зафиксируем любую окрестность W нуля в топологии τ так, что $W + \dots + W \subseteq U$ с p слагаемыми слева. Возьмем произвольный элемент $g_0 \in G_p \setminus U$. Тогда $gp(g_0) \cap W = \{0\}$. Допустим, что уже выбраны элементы $g_0, \dots, g_n$ такие, что

$$gp(g_0, \dots, g_n) \cap W = \{0\}, \quad g_n \notin gp(g_0, \dots, g_{n-1}).$$

Так как подгруппа G_p U-неограниченна, существует элемент

$$g_{n+1} \in G_p \setminus (gp(g_0, \dots, g_n) + U).$$

Положим

$$H = \bigcup_{n \in \omega} gp \subset g_0, \dots, g_n)$$

и заметим, что H — бесконечная дискретная подгруппа группы (G, τ). В качестве дополнения к τ можно взять любую недискретную топологию τ' на G, в которой подгруппа H открыта.

Допустим, что справедливо утверждение (b). Зафиксируем любую окрестность W для в τ так, что $W = -W$ и $W + W \subseteq U$. Ввиду леммы 2.3 и теоремы 1.9 достаточно указать такую последовательность $\langle a_n \rangle_{n \in \omega}$ элементов группы G, что $W \cap X(a_0, \dots, a_n) = \{0\}$ для любого $n \in \omega$. Возьмем произвольный элемент $a_0 \notin W$. Пусть элементы $a_0, \dots, a_{N-1}$ уже выбраны так, что

$W \cap X(a_0, \dots, a_{n-1}) = \{0\}$. По лемме 2.9 существует элемент $a_n \in G$, удовлетворяющий условию $ka_n \notin g + W$ для любого элемента $g \in X(a_0, \dots, a_{n-1})$ и любого $k \in \{\pm 1, \dots, \pm(n+1)\}$. Тогда $W \cap X(a_0, \dots, a_n) = \{0\}$.

§ 3. Достаточные признаки дополняемости

3.1. Теорема. *Топология τ на группе G дополняема, если (G, τ) не является вполне ограниченной и удовлетворяет одному из следующих условий:*

(a) *G конечно порождена,*

(b) *G делима,*

(c) *наименьшая подгруппа H из G, содержащая все элементы простых порядков, не является вполне ограниченной.*

Доказательство. Если G конечно порождена, то G/nG конечна для любого натурального числа n. Если G делима, то $G = nG$ для любого натурального числа n. В этих случаях подгруппа nG U-неограниченна для любой окрестности U нуля такой, что группа G U-неограниченна. Значит, справедливо утверждение (b) теоремы 2.10.

Пусть U — окрестность нуля в τ такая, что подгруппа H U-неограниченна. Выберем окрестность W нуля так, что $W + W \subseteq U$. Если подгруппа G_p не является вполне ограниченной для некоторого простого числа p, то справедливо утверждение (a) теоремы 2.10. Предположим, что подгруппа G_p вполне ограниченна для любого простого числа p. Если подгруппа nH W-ограниченна для некоторого натурального числа n, то подгруппа H U-ограниченна. Следовательно, справедливо утверждение (b) теоремы.

3.2. Теорема. *Локально компактная топология τ на группе G недополняема тогда и только тогда, когда существует открытая компактная подгруппа S, содержащая все элементы простого порядка и такая, что фактор-группа G/S имеет конечный порядок.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что группа (G, τ) не имеет открытых компактных подгрупп. Тогда G содержит бесконечную дискретную циклическую подгруппу C. В качестве дополнения к τ можно взять любую недискретную топологию на G, в которой подгруппа C открыта. Следовательно, G содержит открытую компактную подгруппу S. Ввиду теоремы 3.1(c) можно считать, что S содержит все элементы простых порядков группы G. Если период группы G/S бесконечен, то подгруппа nG S-неограниченна для любого натурального числа n, что противоречит утверждению (b) теоремы 2.10.

Достаточность. Применяем теорему 2.10.

3.3. Вопрос. Каковы локально компактные топологии на группах, которые обладают локально компактными дополнениями?

3.4. Теорема. *Если любая вполне ограниченная подгруппа бесконечной топологической группы (G, τ) конечна, то топология τ дополняема.*

Доказательство. Если группа G имеет элемент бесконечного порядка, то применяем теорему 3.1(a) и лемму 2.4. Следовательно, можно считать, что G периодична. Обозначим через H наименьшую подгруппу группы G, содержащую все элементы простого порядка группы G. Если H бесконечна, то применима теорема 3.1(c). Пусть подгруппа конечна. Так как G бесконечна, то G содержит бесконечную делимую подгруппу. Применяем теорему 3.1(b) и лемму 2.4.

3.5. Теорема. *Топология τ счетной полной топологической группы (G,τ) дополняема.*

Доказательство. Так как любая вполне ограниченная подгруппа полной группы конечна, применима теорема 3.4.

3.6. Теорема. *Пусть τ_1 — топология на бесконечной группе G, определенная некоторой T-последовательностью. Существует топология τ_2 на G, определенная T-последовательностью, которая дополняет топологию τ_1.*

Доказательство. Заметим, что (G,τ_1) содержит счетную открытую подгруппу. Применяем теоремы 1.6, 3.5 и лемму 2.3.

3.7. Следствие. *Для любой топологии τ_1 на бесконечной группе G, определенной T-последовательностью, существует топология τ_2, определенная T-последовательностью и такая, что $\tau_2 \subset \tau_1$.*

Доказательство. По теореме 3.6 существует дополнение τ' к топологии τ_1, определенное T-последовательностью. Положим $\tau_2 = \tau_1 + \tau'$ и воспользуемся леммой 2.5.

3.8. Теорема. *Любая топология τ, максимальная среди недискретных топологий на группе G, дополняема.*

Доказательство. Возьмем произвольную топологию τ' на G, определенную нетривиальной T-последовательностью. Если τ' — дополнение к τ, то все доказано. Иначе ввиду максимальности τ будет $\tau' \subseteq \tau$. Применяем теорему 3.6.

3.9. Следствие. *Любую недискретную топологию на группе можно усилить до дополняемой недискретной топологии.*

Доказательство. Достаточно заметить, что по лемме Цорна любая недискретная топология на группе содержится в некоторой максимальной недискретной топологии.

§ 4. Дополняемость и гомоморфизмы

4.1. Теорема. *Если топологическая группа (G,τ) не является вполне ограниченной, то существует такая замкнутая подгруппа $H \subseteq G$, что топология фактор-группы G/H дополняема.*

Доказательство. Предположим, что $G/\operatorname{cl}(nG)$ не является вполне ограниченной для некоторого натурального числа $n > 1$, где $\operatorname{cl}(nG)$ — замыкание подгруппы nG. Выберем наименьшее натуральное число m с этим свойством. Ясно, что m — простое число. По утверждению (a) теоремы 2.10 топология группы $G/\operatorname{cl}(mG)$ дополняема. Поэтому можно считать, что группа $g/\operatorname{cl}(nG)$ вполне ограничена для любого натурального числа n. Так как (G,τ) не является вполне ограниченной, то G U-неограниченна для некоторой окрестности U нуля в τ. Выберем замкнутую окрестность W нуля так, что $W + W \subseteq U$. Допустим, что подгруппа nG W-ограниченна, и выберем конечное подмножество $K \subseteq G$ так, что $nG \subseteq K + W$. Тем самым $\operatorname{cl}(nG) \subseteq K + W$. Так как $G/\operatorname{cl}(nG)$ вполне ограниченна, найдется конечное подмножество $M \subseteq G$ такое, что $G = M + \operatorname{cl}(nG) + W$. Тогда $G = M + K + W + W = M + K + U$, что противоречит U-неограниченности G. Значит, подгруппа nG W-неограниченна для любого натурального числа n. Применяем теорему 2.10.

Как известно, прямое произведение двух топологических групп (G_1,τ_1) и (G_2,τ_2) является полной группой тогда и только тогда, когда полны сомножители (G_1,τ_1) и (G_2,τ_2).

Доказательство следующей леммы вполне аналогично доказательству этого утверждения.

4.2. Лемма. *Пусть τ_2 — дополнение к топологии τ_1 на группе G. Топологическая группа $(G, \tau_1 + \tau_2)$ полна тогда и только тогда, когда полны топологические группы (G, τ_1) и (G, τ_2).*

4.3. Теорема. *Если все непрерывные гомоморфные образы топологической группы (G, τ) полны, то (G, τ) компактна.*

Доказательство. Если (G, τ) вполне ограниченна, то в силу полноты (G, τ) компактна. Предположим, что (G, τ) не является вполне ограниченной. По теореме 4.1 топология τ_1 некоторой фактор-группы $G_1 = G/H$ обладает дополнением τ_2. Ввиду леммы 2.3 можно считать, что (G_1, τ_2) обладает счетной окрестностью нуля. Пусть U, V — окрестности нуля в τ_1, τ_2, причем V счетна и $U \cap V = \{0\}$. Выберем последовательность $\langle V_n \rangle_{n\in\omega}$ симметричных окрестностей нуля в τ_2 так, что

$$V_0 \subseteq V, \quad V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n, \quad \bigcap_{n\in\omega} V_n = \{0\}.$$

Тогда семейство $\{V_n : n \in \omega\}$ является базой окрестностей нуля некоторой топологии τ_3 на G_1, причем τ_3 дополняет τ_1. Так как (G_1, τ_3) метризуема, недискретна и имеет счетную окрестность нуля, то (G_1, τ_3) неполна. По лемме 4.2 топологическая группа $(G_1, \tau_1 + \tau_3)$ неполна. Осталось заметить, что $(G_1, \tau_1 + \tau_3)$ — непрерывный гомоморфный образ группы (G, τ).

4.4. Вопрос. Предположим, что любой инъективный непрерывный гомоморфный образ топологической группы (G, τ) является полной группой. Верно ли, что (G, τ) компактна?

§ 5. Цепи топологий

По следствию 3.7 для любой топологии τ_0 на бесконечной группе G, определенной T-последовательностью, можно указать убывающую ω-цепь $\{\tau_n : n \in \omega\}$ топологий, определенных T-последовательностями. Для того чтобы построить убывающую ω_1-цепь топологий, определенных T-последовательностями, докажем некоторые вспомогательные утверждения.

5.1. Лемма. *Пусть (G, τ) — недискретная метризуемая группа, $\langle a_n \rangle_{n\in\omega}$ — последовательность элементов группы G, сходящаяся к нулю. Существует инъективная последовательность $\langle b_n \rangle_{n\in\omega}$, сходящаяся к нулю в топологии τ_1 и такая, что топология группы $(G \mid \langle b_n \rangle_{n\in\omega})$ является дополнением к топологии группы $(G \mid \langle a_n \rangle_{n\in\omega})$.*

Доказательство. Пусть $\{U_m : m \in \omega\}$ — база окрестностей нуля топологии τ. Построим индуктивно инъективную последовательность $\langle b_m \rangle_{m\in\omega}$ и подпоследовательность $\langle n_m \rangle_{m\in\omega}$ из ω так, чтобы для любого $m \in \omega$ выполнялись следующие условия:

$$\sum_{i\le m} A^*_{n_i} \cap X(b_0, \dots, b_m) = \{0\}, \quad b_m \in U_m.$$

Тогда

$$U = \sum_{i\in\omega} A^*_{n_i}, \quad V = \bigcup_{i\in\omega} X(b_0, \dots, b_i)$$

будут окрестностями топологических групп $(G \mid \langle a_n \rangle_{n\in\omega})$ и $(G \mid \langle b_n \rangle_{n\in\omega})$, причем $U \cap V = \{0\}$.

Возьмем произвольный элемент $b_0 \in U_0$ и выберем $n_0 \in \omega$ так, что $A^*_{n_0} \cap X(b_0) = \{0\}$. Предположим, что элементы $b_0, \dots, b_m$ и числа $n_0, \dots, n_m$ уже выбраны. Так как подмножество $\sum\limits_{i\le m} A^*_{n_i}$ замкнуто в τ и

$$\sum_{i\le m} A^*_{n_i} \cap X(b_0, \dots, b_m) = \{0\},$$

то существует элемент $b_{m+1} \in U_{m+1}$ такой, что

$$\sum_{i\le m} A^*_{n_i} \cap X(b_0, \dots, b_{m+1}) = \{0\}, \quad b_{m+1} \notin X(b_0, \dots, b_m).$$

Поскольку последовательность $\langle a_n \rangle_{n\in\omega}$ сходится к нулю в топологии τ, существует такой номер $n_{m+1} \in \omega$, что

$$\sum_{i\le m+1} A^*_{n_i} \cap X(b_0, \dots, b_{m+1}) = \{0\}.$$

5.2. Лемма. *Пусть $\mathscr{F}$ — счетное семейство последовательностей, сходящихся к нулю в некоторой метризуемой топологии τ на группе G. Существует последовательность $\langle a_n \rangle_{n\in\omega}$ элементов группы G, сходящаяся к нулю в топологии τ и такая, что все последовательности семейства $\mathscr{F}$ сходятся к нулю в топологической группе $(G \mid \langle a_n \rangle_{n\in\omega})$.*

Доказательство. Пусть $\{U_m : m \in \omega\}$ — база окрестностей нуля топологии τ. Пусть также $\mathscr{F} = \{\langle a(m,k) \rangle_{k\in\omega}, m \in \omega\}$. Для каждого $m \in \omega$ выберем $k(m)$ так, что $a(m,k) \in U_m$ для всех $k > k(m)$. Положим

$$\mathscr{F}' = \{\langle a(m,k) \rangle_{k>k(m)} : m \in \omega\}.$$

Занумеруем все элементы последовательностей из $\mathscr{F}'$ в произвольном порядке. Получим требуемую последовательность $\langle a_n \rangle_{n\in\omega}$.

5.3. Теорема. *Для любой топологии τ_0 на бесконечной группе G, определенной T-последовательностью, существует убывающая ω_1-цепь $\{\tau_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ топологий, определенных T-последовательностями.*

Доказательство. Построим цепь $\{\tau_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ индуктивно. Топология τ_0 задана условиями теоремы. Зафиксируем любую недискретную метризуемую топологию τ на G так, что $\tau \subset \tau_0$. Предположим, что топологии τ_α уже определены для всех ординалов $\alpha < \beta$ так, что $\tau \subset \tau_\alpha$, $\alpha < \beta$.

Если β — предельный ординал, то используем лемму 5.2, чтобы выбрать топологию τ_β, удовлетворяющую условию $\tau \subset \tau_\beta \subset \tau_\alpha$ для всех $\alpha < \beta$. Если β — непредельный ординал, то, применяя лемму 5.1, находим топологию τ_β такую, что $\tau \subset \tau_\beta \subset \tau_{\beta-1}$.

Обратимся к построению возрастающих цепей топологий, определенных T-последовательностями.

5.4. Определение. Нетривиальная T-последовательность $\langle a_n \rangle_{n\in\omega}$ элементов группы G называется *альтернативной*, если для любого разбиения $\omega = W_1 \cup W_2$ на бесконечные подмножества топология группы $(G \mid \langle a_n \rangle_{n\in W_2})$ является дополнением к топологии группы $(G \mid \langle a_n \rangle_{n\in W_1})$. Заметим, что любая подпоследовательность альтернативной последовательности альтернативна.

5.5. Лемма. *Из любой тривиальной T-последовательности $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ элементов произвольной группы G можно выделить альтернативную подпоследовательность $\langle b_n\rangle_{n\in\omega}$.*

Доказательство. Положим $b_0 = a_0$ и допустим, что уже выбраны элементы $b_0,\dots,b_m$ из последовательности $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ так, что для любого разбиения $\{0,1,\dots,m\} = \{i(0),\dots,i(k)\}\cup\{i(k+1),\dots,i(m)\}$, $i(0) < \dots < i(k)$, $i(k+1) < \dots < i(m)$, справедливо равенство

$$X(b_{i(0)},\dots,b_{i(k)})\cap X(b_{i(k+1)},\dots,b_{i(m)}) = \{0\}.$$

Так как последовательность $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ сходится к нулю в $(G \mid \langle a_n\rangle_{n\in\omega})$, можно выбрать элемент b_{m+1} из последовательности $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ так, что это равенство выполняется для любого разбиения подмножества $\{0,1,\dots,m+1\}$. Таким образом, построим требуемую подпоследовательность $\langle b_n\rangle_{n\in\omega}$.

Действительно, зафиксируем произвольное разбиение $\omega = W_1\cup W_2$, где $W_1 = \{i_n : i_n < i_{n+1},\, n\in\omega\}$, $W_2 = \{j_n : j_n < j_{n+1},\, n\in\omega\}$. Положим

$$U = \bigcup_{n\in\omega} X(b_{i_0},\dots,b_{i_n}),\quad V = \bigcup_{n\in\omega} X(b_{j_0},\dots,b_{j_n}).$$

По выбору последовательности $\langle b_n\rangle_{n\in\omega}$ имеем $U\cap V = \{0\}$. По теореме 1.4 U, V — окрестности нуля топологических групп $(G \mid \langle b_n\rangle_{n\in W_1})$, $G \mid \langle b_n\rangle_{n\in W_2})$.

5.6. Теорема. *Для любой топологии τ_0 на бесконечной группе G, определенной нетривиальной T-последовательностью, существует возрастающая ω_1-цепь $\{\tau_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ топологий, каждая из которых определена T-последовательностью.*

Доказательство. Построим цепь $\{\tau_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ индуктивно. Топология τ_0 определена условиями теоремы. Предположим, что для некоторого ординала $\gamma < \omega_1$ мы уже определили семейство $\{\tau_\alpha : \alpha < \gamma\}$ топологий на группе G, каждая из которых задана некоторой T-последовательностью $\langle a_n(\alpha)\rangle_{n\in\omega}$, причем для всех $\alpha < \beta < \gamma$ выполняются следующие условия:

(a) $\tau_\alpha \subset \tau_\beta$,

(b) $\langle a_n(\beta)\rangle_{n\in\omega}$ — подпоследовательность последовательности $\langle a_n(\alpha)\rangle_{n\in\omega}$.

Если γ — непредельный ординал, то по лемме 5.5 найдется такая подпоследовательность $\langle a_n(\gamma)\rangle_{n\in\omega}$ последовательности $\langle a_n(\gamma-1)\rangle_{n\in\omega}$, что топология τ_γ группы $(G \mid \langle a_n(\gamma)\rangle_{n\in\omega})$ сильнее топологии $\tau_{\gamma-1}$. Пусть γ — предельный ординал. Выберем возрастающую последовательность $\langle a_n\rangle_{n\in\omega}$ ординалов, конфинальную для ординала γ. Положим $a_n(\gamma) = a_n(\alpha_n)$. Таким образом, определена последовательность $\langle a_n(\gamma)\rangle_{n\in\omega}$.

5.7. Вопрос. Верно ли, что на любой бесконечной группе существует возрастающая (убывающая) 2^ω-цепь топологий, заданных T-последовательностями?

Разумеется, если принять континуум-гипотезу, то теоремы 5.3 и 5.6 дают утвердительный ответ на этот вопрос.

5.8. Вопрос. Пусть τ_1, τ_2 — топологии на группе G, определенные T-последовательностями, причем $\tau_1\subset\tau_2$. Существует ли топология τ, заданная T-последовательностью, такая, что $\tau_1\subset\tau\subset\tau_2$?

5.9. Теорема. *На любой бесконечной группе G существует линейно упорядоченное семейство 2^ω топологий, определенных T-последовательностями.*

Доказательство. Пользуясь леммой 5.5, зафиксируем некоторую альтернативную последовательность $\langle b_n\rangle_{n\in\omega}$ элементов группы G. Возьмем произвольную биекцию $f:\omega\to Q$, где Q — множество рациональных чисел. Для каждого действительного числа r положим $W_r=\{n\in\omega: f(n)\rightleftharpoons r\}$. Если $r,t\in\mathbb{R}$ и $r<t$, то топология группы $(G,\langle b_n\rangle_{n\in W_t})$ сильнее топологии группы $(G\mid\langle b_n(\gamma)\rangle_{n\in W_r})$.

Для доказательства последней теоремы используем следующий факт из комбинаторной теории множеств. Семейство подмножеств из ω называется *почти дизъюнктным*, если пересечение любых двух различных подмножеств данного семейства конечно. Существует почти дизъюнктное семейство мощности 2^ω. Для доказательства этого утверждения отождествим ω с множеством Q рациональных чисел и сопоставим каждому иррациональному числу некоторую сходящуюся последовательность рациональных чисел.

5.10. Теорема. *На любой бесконечной группе G существует семейство мощности 2^ω попарно взаимно-дополняемых топологий, определенных T-последовательностями.*

Доказательство. Пользуясь леммой 5.5, зафиксируем альтернативную последовательность $\langle b_n\rangle_{n\in\omega}$ элементов группы G. Пусть $\{W_\alpha:\alpha<2^\omega\}$ — почти дизъюнктное семейство бесконечных подмножеств из ω. Тогда множество $\{\langle b_n\rangle_{n\in W_\alpha}:\alpha<2^\omega\}$ T-последовательностей задает требуемое семейство топологий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зеленюк Е. Г., Протасов И. В.* Топология на абелевых группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 5. С. 1090–1107.
2. *Protasov I. V., Zelenyuk E. G.* Topologies on groups determined by sequences // Mat. Studies. 1999. V. 4. P. 1–112.
3. *Протасов И. В.* Разложимость групп // Мат. студия. 1998. Т. 9, № 2. С. 130–148.
4. *Гринлиф Ф.* Инвариантные средние на топологических группах. М.: Мир, 1973.

Статья поступила 27 марта 1999 г.

Зеленюк Евгений Григорьевич
Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины
ул. Научная, 3б, Львов 79601, Украина
Протасов Игорь Владимирович
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, факультет кибернетики
ул. Владимирская, 64, Киев 01033, Украина