Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 512.542

О ГРУППЕ, СВОБОДНО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

В. Д. Мазуров, В. А. Чуркин

Аннотация: Доказывается, что подгруппа группы $SL_2(\mathbb{C})$, порожденная такими двумя элементами x, y порядка 3, что порядки xy и xy^{-1} конечны, является конечной. Отсюда выводится, что группа, действующая свободно на нетривиальной абелевой группе, конечна, если она порождается такими двумя элементами x, y порядка 3, что порядки xy и xy^{-1} конечны. Библиогр. 4.

Введение. Пусть G — группа, действующая свободно (или регулярно) на аддитивной абелевой группе V. Это означает, что $vg = v$ для $g \in G$, $v \in V$, только если $v = 0$ или $g = 1$. В [1] доказано, что периодическая группа G, порожденная элементами порядка 3, которая может действовать свободно на нетривиальной абелевой группе, обязательно конечна. Ключевым местом в доказательстве этого результата является случай, когда группа G порождается двумя элементами порядка 3 [2]. Обобщая последний результат, мы доказываем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть группа G, порожденная двумя элементами x, y порядка 3, свободно действует на нетривиальной абелевой группе. Если порядки элементов xy и xy^{-1} конечны, то G конечна.*

Теорема 1 легко вытекает из следующего результата, который, возможно, интересен сам по себе.

Теорема 2. *Пусть группа G, порожденная двумя элементами x, y порядка 3, является подгруппой в $SL_2(\mathbb{C})$, где $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Если порядки элементов xy и xy^{-1} конечны, то G конечна и либо ее порядок равен 3, либо она изоморфна группе $SL_2(3)$ порядка 24, либо группе $SL_2(5)$ порядка 120.*

Предварительные результаты.

Лемма 1. *Группу $SL_2(5)$ (соответственно $SL_2(3)$) можно породить двумя элементами порядка 3, порядок произведения которых равен 10 (соответственно 4 или 6).*

Доказательство. Для $H = SL_2(5)$ положим

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in H.$$

Тогда порядки элементов x, y, xy равны соответственно 3, 3 и 10. Следовательно, порядок группы $X = \langle x, y \rangle$ делится на 30, т. е. ее индекс в H делит 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00550, 99–01–00576) и грантом Министерства образования Российской Федерации в области фундаментального естествознания (шифр Е00–1.0–77).

Отсюда $X = H$. Взяв $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\pm 1} \in SL_2(3)$, получим аналогично вторую часть леммы.

Лемма 2. *Пусть V — двумерное векторное пространство над $\mathbb{C}$, и пусть $x, y \in SL(V)$ такие элементы порядка 3, что $xy \neq yx$ и порядок xy равен n. Тогда в V существует база, в которой x, y представимы матрицами*

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где λ — примитивный корень n-й степени из единицы. Если $n = 4$ или $n = 6$, то $H = \langle x, y \rangle \simeq SL_2(3)$; если $n = 10$, то $H \simeq SL_2(5)$.

Доказательство. Пусть $v \in V$ — собственный вектор для xy. Поскольку xy подобна диагональной матрице, характеристические корни которой взаимно обратны, то $vxy = \lambda v$, где λ — примитивный корень n-й степени из единицы. Отметим также, что x, y подобны диагональной матрице с диагональными элементами ε, $1/\varepsilon$, где $\varepsilon = (-1 + i\sqrt{3})/2$, и поэтому $x^2 + x + 1 = y^2 + y + 1 = 0$, т. е. $x^{-1} = x^2 = -1 - x$, $y^{-1} = -1 - y$. Если v является собственным вектором и для x, то $H = \langle x, y \rangle$ диагонализируема и $xy = yx$ вопреки предположению. Следовательно, $v_1 = v$, $v_2 = vx$ образуют базу в V, и

$$v_1 x = v_2, \quad v_2 x = vx^2 = -v - vx = -v_1 - v_2. \tag{2}$$

Далее, $vxy = \lambda v$, так что $vx = \lambda v y^{-1} = -\lambda(vy + v)$, $vy = -v - \lambda^{-1} vx$ и поэтому

$$v_1 y = -v_1 - \lambda^{-1} v_2, \quad v_2 y = \lambda v_1. \tag{3}$$

Равенства (2), (3) показывают, что v_1, v_2 — искомая база в V.

Хорошо известно (см., например, теорему XII.8.6 в [3]), что $SL_2(3)$ и $SL_2(5)$ вложимы в $SL(V)$. По лемме 1 и доказанной части настоящей леммы $SL_2(3)$ (соответственно $SL_2(5)$) изоморфна $H_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$, где $x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $y_1 = \begin{pmatrix} -1 & -\lambda_1^{-1} \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$ и λ_1 — примитивный корень 4-й или 6-й (соответственно 10-й) степени из единицы. Очевидно, H_1 и H сопряжены автоморфизмом поля $\mathbb{Q}(\lambda)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть λ — примитивный корень n-й степени из единицы, ρ — примитивный корень m-й степени из единицы и $n \leq m$. Если*

$$\lambda + 1/\lambda + \rho + 1/\rho = 1, \tag{4}$$

то число n равно 1, 4 *или* 10.

Доказательство. Пусть $\mu = \cos 2\pi/t + i \sin 2\pi/t$, где t — наименьшее общее кратное чисел n и m. Тогда равенство (4) можно преобразовать к виду $\mu^r + 1/\mu^r + \mu^s + 1/\mu^s = 1$ для некоторых r, s, $0 \leq r < s < t/2$. Это равенство эквивалентно равенству $2(\cos 2\pi r/t + \cos 2\pi s/t) = 1$, которое, в свою очередь, можно переписать в виде $4 \cos \pi(s + r)/t \cdot \cos \pi(s - r)/t = 1$ или

$$4 \sin \pi(t - 2(s + r))/2t \cdot \sin \pi(t - 2(s - r))/2t = 1. \tag{5}$$

Поскольку $0 \leq s - r < t/2$, справедливо $0 < (t - 2(s - r))/2t \leq 1/2$ и по (5) $\sin \pi(t - 2(s - r))/2t > 0$. Это дает $0 < (t - 2(s + r))/2t \leq 1/2$. По [4] пара

$((t-2(s+r))/2t$, $(t-2(s-r))/2t)$ совпадает с одной из пар $(1/6,1/6)$, $(1/12,5/12)$, $(1/10,3/10)$, откуда легко следует, что $(r/t,s/t)$ — одна из пар $(0,1/3)$, $(1/6,1/4)$, $(1/10,3/10)$. Это непосредственно дает заключение леммы.

Замечание. Авторы предложили вопрос о решениях уравнения (4) участникам электронной заочной конференции *sci.math*. В результате К. Фостер нашел решение, а Г. Маерсон указал ссылку на [4]. Позднее М. Хаксли сообщил нам другое решение. Пользуясь случаем, мы выражаем им всем нашу благодарность.

Доказательство теорем. Докажем вначале теорему 2. Заменив при необходимости y на y^{-1}, мы можем предполагать, что $n \le m$, где n — порядок xy, а m — порядок xy^{-1}. По лемме 2 можно считать, что $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -1 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $xy = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1-\lambda & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, $xy^{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ \lambda & 1-\lambda^{-1} \end{pmatrix}$, где λ — примитивный корень n-й степени из единицы. Если ρ, ρ^{-1} — характеристические корни элемента xy^{-1}, то след xy^{-1} равен $\rho+\rho^{-1} = 1-\lambda-\lambda^{-1}$, т. е. $\rho+\rho^{-1}+\lambda+\lambda^{-1} = 1$. По лемме 3 число n равно 1, 4 или 10, и теорема следует из леммы 2.

Замечание. Предложенное доказательство теоремы 2 показывает также, что для $n \ne 1,4,6,10$ группа H из леммы 2 бесконечна, более того, порядок xy^{-1} бесконечен. Это, в частности, дает, что группа треугольника $T = (3,3,5) = \langle a,b \mid a^3 = b^3 = (ab)^5 = 1\rangle$ вкладывается в $SL_2(\mathbb{C})$ и не содержит элементов порядка 2. Действительно, как известно, T бесконечна и вкладывается в $PSL_2(\mathbb{C})$, т. е. мы можем считать, что $T \le PSL_2(\mathbb{C})$. Пусть x,y — прообразы порядка 3 элементов a, b в $SL_2(\mathbb{C})$. Если бы порядок xy был равен 10, то T была бы конечной по лемме 2, поэтому $(xy)^5 = 1$ и, следовательно, отображение $a \to x, b \to y$ продолжается до изоморфизма групп T и $\langle x,y\rangle$. Тем самым $\langle x,y\rangle$ пересекается с $Z(SL_2(\mathbb{C}))$ по тривиальной подгруппе и не может содержать элементов порядка 2.

Предположим теперь, что группа G, порожденная двумя элементами x, y порядка 3, действует свободно на аддитивной абелевой группе V и что порядки элементов xy и xy^{-1} конечны. Понятно, что G действует свободно, а следовательно, и точно на каждой нетривиальной G-инвариантной подгруппе из V. Пусть u — элемент из V. Поскольку $(ux^2+ux+u)x = ux^2+ux+u$ и G действует свободно на V, имеем $ux^2+ux+u = 0$ и

$$ux^{-1} = ux^2 = -u-ux \quad \text{для любого } u \in V. \tag{6}$$

Точно так же

$$uy^{-1} = -u-uy \quad \text{для любого } u \in V. \tag{7}$$

Пусть теперь $v \in V$ — нетривиальный элемент. Определим $u_i = v(xy)^i$, $v_i = v(xy)^i x$, $i = 0,1,\dots,n-1$, где n — порядок xy. Тогда, очевидно,

$$u_i x = v_i, \quad i = 0,1,\dots,n-1, \tag{8}$$

и по (6), (8)

$$v_i x = u_i x^2 = -u_i - u_i x = -u_i - v_i, \quad i = 0,1,\dots,n-1. \tag{9}$$

С другой стороны, по (8)

$$v_i y = u_i xy = u_{i+1} \quad \text{для} \quad i < n-1, \quad v_{n-1} y = v(xy)^n = v = u_0. \tag{10}$$

Теперь (7) и (10) дают $v_i = u_{i+1}y^{-1} = -u_{i+1} - u_{i+1}y$ для $i < n-1$ и $v_{n-1} = u_0y^{-1} = -u_0 - u_0y$, поэтому

$$u_0y = -u_0 - v_{n-1}, \quad u_jy = -u_j - v_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n-1. \tag{11}$$

По (8)–(11) подгруппа $U = \langle u_i, v_i \mid i = 0, 1, \dots, n-1 \rangle$ является G-инвариантной. Если порядок элемента v конечен, то U и, значит, G конечны. Поэтому можно считать, что V без кручения, откуда следует, что U — конечномерный $\mathbb{Z}G$-модуль. Очевидно, G действует свободно на $U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, и без потери общности можно предполагать, что этот $\mathbb{C}G$-модуль совпадает с V. Пусть $u \in V$ — собственный вектор для xy, т. е.

$$u(xy) = \lambda u, \tag{12}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$. По (7) и (12)

$$ux = \lambda uy^{-1} = \lambda(-u - uy). \tag{13}$$

Положим $w_1 = u$, $w_2 = ux$. Тогда (6), (7) и (13) показывают, что

$$w_1x = w_2, \quad w_2x = -w_1 - w_2, \quad w_1y = -w_1 - \lambda^{-1}w_2, \quad w_2y = \lambda w_1. \tag{14}$$

Отсюда вытекает, что подпространство W, порожденное элементами w_1, w_2, является G-инвариантным. Если W одномерно, то G абелева и поэтому конечна. Если W двумерно, то w_1, w_2 составляют базу в W и (14) показывает, что G изоморфна подгруппе в $SL(W)$. В этом случае G конечна по теореме 2. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журтов А. Х.* О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 329–338.
2. *Журтов А. Х.* О квадратичных автоморфизмах абелевых групп // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 320–328.
3. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups II. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1982.
4. *Newman M.* Some results on roots of unity, with an application to a Diophantine problem // Aequationes Math. 1969. V. 3, N 2/3. P. 163–166.

Статья поступила 14 февраля 2001 г.

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
mazurov@math.nsc.ru

Чуркин Валерий Авдеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
churkin@math.nsc.ru