Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 517.54

ДЕФОРМАЦИЯ ПЛАСТИН МАЛЫХ КОНДЕНСАТОРОВ И ПРОБЛЕМА П. П. БЕЛИНСКОГО

В. В. Асеев

Аннотация: Изучаются гомеоморфные вложения компакта K, являющегося объединением невырожденных континуумов в $\overline{\mathbb{R}}^n$, сохраняющие конформные модули всех конденсаторов, пластины которых суть континуумы, лежащие в K. С использованием результата В. Н. Дубинина и оценок конформного модуля инфинитезимальных конденсаторов доказывается, что гипотеза П. П. Белинского (любое такое отображение продолжается до мёбиусова автоморфизма всего пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$), доказанная автором в 1990 г. для $n = 2$, справедлива и при $n > 2$, если компакт обладает регулярностью в некотором наборе из $(n+2)$ точек. Это существенно усиливает прежний результат автора (1992 г.), где регулярность требовалась в каждой точке компакта. Библиогр. 19.

Конденсатором в $\overline{\mathbb{R}}^n$ называется пара (E, F) непустых непересекающихся компактных множеств $E, F \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ — *пластин* конденсатора. Если E и F — континуумы, то конденсатор называют также *кольцом* (или конденсатором класса Cont). Мёбиусово-инвариантной характеристикой конденсатора служит *конформный модуль*, обозначаемый в статье символом $\mathrm{mod}(E, F)$. В 1978 г. профессор П. П. Белинский предложил изучить топологические вложения $f : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}^n$, заданные на множествах $\Sigma \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, являющихся объединением невырожденных континуумов, и обладающие следующим свойством.

Определение 0.1 [1, определение 1.3, с. 155]. Топологическое вложение $f : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}^n$, $\Sigma \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, называется *сохраняющим модули*, если для любой пары континуумов $E, F \subset \Sigma$ выполняется равенство конформных модулей $\mathrm{mod}(E, F) = \mathrm{mod}(f(E), f(F))$.

В частности, им был поставлен вопрос о возможности продолжить сохраняющее модули топологическое вложение до мёбиусова преобразования всего пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$. Автором было получено полное решение этой проблемы в случае $n = 2$ (см. [2, теорема 1.2, с. 1033]) с использованием аппарата конформных отображений; более короткое доказательство с применением результатов статьи [3] приведено в [1, теорема 5.3, с. 163]. В пространстве $\overline{\mathbb{R}}^n$, $n \geq 3$, имеются следующие результаты: в [4, теорема 1] проблема решена в случае, когда в множестве Σ есть хотя бы одна внутренняя точка, а в работе [1, теорема 5.9, с. 164] — в ситуации, когда через каждую точку множества Σ проходит континуум, лучеподобный в этой точке в смысле следующего определения.

Определение 0.2 [1, определение 5.4, с. 164]. Континуум $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ называется *лучеподобным в точке* $a \in \Gamma$, если для любой последовательности растяжений $\mu_j(x) = a + k_j(x - a)$, $k_j \to +\infty$ при $j \to \infty$, существует подпоследовательность $\{p\} \subset \{j\}$ такая, что последовательность компактных множеств

$\mu_p(\Gamma) \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ сходится в метрике Хаусдорфа к некоторому лучу с началом в точке a.

В данной статье изучается асимптотическое поведение конформного модуля конденсаторов с бесконечно малыми пластинами и доказана следующая

Теорема 0.3. *Пусть множество $\Sigma \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, $n \geq 3$, — объединение невырожденных континуумов и существует множество $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}, a_{n+2}\} \subset \Sigma$, не лежащее на $(n-1)$-мерной сфере и такое, что через каждую точку a_j проходит некоторый континуум $\Gamma_j \subset \Sigma$, лучеподобный в этой точке ($j = 1, \dots, n+2$). Тогда любое сохраняющее модули топологическое вложение $f : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}^n$ является мёбиусовым вложением* (*т. е. продолжается до мёбиусова автоморфизма всего пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$*).

Этот результат был анонсирован в [5]. Заметим также, что аналог проблемы П. П. Белинского в гиперболическом пространстве изучал Г. Н. Черноусов [6].

1. Обозначения и предварительные сведения

Пусть $e \in \mathbb{R}^n$, $|e| = 1$. *Кольцом Тейхмюллера* с параметром $t > 0$ в $\overline{\mathbb{R}}^n$ называется конденсатор (E, F) с пластинами $E = \{se : -1 \leq s \leq 0\}$, $F = \{se : t \leq s \leq \infty\}$. Конформный модуль $\psi(t) = \mathrm{mod}(E, F)$ этого конденсатора имеет следующие свойства (см., например, [7, гл. 3, § 3, пп. (a)–(e), с. 54] или [8, пп. 7.18–7.22, с. 88, 89]).

1.1. Функция $\psi(t)$ строго возрастает по t.

1.2. Существует предел $\mathrm{Ln}(\kappa) = \lim\limits_{t\to\infty} [\psi(t) - \mathrm{Ln}(t+1)]$ с константой κ, зависящей лишь от n.

1.3. Для любого $t > 0$ выполняется оценка $\mathrm{Ln}(t+1) \leq \psi(t) \leq \mathrm{Ln}(\kappa(t+1))$.

1.4. Экстремальное свойство кольца Тейхмюллера выражается в том, что

$$\mathrm{mod}(E, F) \leq \psi(|a_1 - a_4| \cdot |a_2 - a_3| / (|a_1 - a_2| \cdot |a_3 - a_4|))$$

для любого конденсатора (E, F), у которого E имеет связную компоненту, содержащую точки a_1, a_2, а F — связную компоненту, содержащую точки a_3, a_4 (см., например, [7, следствие 1, с. 55] или [8, лемма 7.35, с. 94]). При этом расстояния в правой части формулы 1.4 можно вычислять как в евклидовой, так и в хордовой метриках.

Для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и точки $a \in A$ символом A_a^{cont} обозначаем компоненту связности множества A, содержащую a, а величину

$$\mathrm{rad}(A, a) = \sup\{|x - a| : x \in A_a^{\mathrm{cont}}\}$$

называем *внутренним радиусом* (*связности*) множества A в точке a.

Из 1.4 и 1.3 следует

Утверждение 1.5. *Пусть $E, F \subset \mathbb{R}^n$ — компактные множества; $a \in E$, $b \in F$, $a \neq b$; $\mathrm{rad}(E, a) = \lambda_1 \leq |a - b|/4$ и $\mathrm{rad}(F, b) = \lambda_2 \leq |a - b|/4$. Тогда*

$$\mathrm{mod}(E, F) \leq \left(1 + C_1\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{|a - b|^2}\right)\right) \cdot \mathrm{Ln}\left(\frac{|a - b|^2}{\lambda_1\lambda_2}\right), \tag{1}$$

где $C_1(\tau) = \mathrm{Ln}(2\kappa)/\mathrm{Ln}(1/\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$.

В статье используется следующий результат В. Н. Дубинина.

Теорема 1.6 [9, следствие 1, с. 19]. *Если непересекающиеся компактные множества E, F лежат по одну сторону от гиперплоскости P и компакт F^* симметричен F относительно P, то* $\operatorname{mod}(E,F) \le \operatorname{mod}(E,F^*)$.

При доказательстве леммы 4.1 используется известное свойство непрерывности конформной емкости конденсаторов. Для конденсаторов со связными пластинами оно было установлено Ф. Герингом [10], а в работе [11] доказано в более общей ситуации для конденсаторов с равномерно совершенными пластинами.

2. Изометрические деформации пластин малых конденсаторов

Лемма 2.1. *Пусть:* $a, b \in \mathbb{R}^n$, $|a-b| = 2d > 0$; $0 < \lambda < d/2$; $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| \le d$; $E \subset B(a,\lambda)$ *и* $F \subset B(b,\lambda)$ — *компактные множества с конечным конформным модулем* $\operatorname{mod}(E,F)$; $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $H(x) = x + h$. *Тогда*

$$|\operatorname{mod}(E,H(F)) - \operatorname{mod}(E,F)| \le \frac{C_2|h|}{|a-b|}\min\{\operatorname{mod}(E,F),\operatorname{mod}(E,H(F))\}$$

с константой $C_2 \le 312$.

Доказательство. Перенос и поворот пространства сводят ситуацию к случаю $a = 0$, $b = 2de_1$, $h = h_1e_1 + h_2e_2$, где $e_1,\dots,e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Положим $k_1 = 1 + h_1/(d-\lambda) \le 1 + 2|h|/d$; $k_2 = h_2/(d-\lambda) \le 2|h|/d \le 2$; $M = \operatorname{mod}(E,F)$; $M' = \operatorname{mod}(E,H(F))$. Для отображения $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такого, что

(i) $T(x) = x$ при $x_1 \le \lambda$;
(ii) $T(x_1,x') = (\lambda + k_1(x_1-\lambda), x')$ при $\lambda \le x_1 \le d$;
(iii) $T(x_1,x_2,x'') = (x_1+h_1, x_2 + k_2(x_1-d), x'')$ при $d \le x_1 \le 2d-\lambda$;
(iv) $T(x) = H(x) = x + h$ при $x_1 \ge 2d-\lambda$, внутренний $K_I(T)$ и внешний $K_O(T)$ коэффициенты квазиконформности вычисляются известным способом (см., например, [7, с. 78–79; (22), (23), с. 83]):

$$K_I(\mathrm{ii}) = k_1 \le 1 + 2|h|/d; \quad K_O(\mathrm{ii}) = k_1^{n-1} \le (1+2|h|/d)^{n-1};$$

$$K_I(\mathrm{iii}) = K_O(\mathrm{iii}) = (k_2/2 + \sqrt{1+k_2^2/4})^n \le (1+k_2)^n \le (1+2|h|/d)^n;$$

$$K = \max\{K_I(T), K_O(T)\} \le (1+2|h|/d)^n.$$

Следовательно (см., например, [7, (12), с. 79; (9), с. 46]),

$$\max\{M/M', M'/M\} \le (1+2|h|/d)^{n/(n-1)} \le 1 + 12|h|/d \le 13,$$

так как

$$(1+t)^{n/(n-1)} - 1 \le (n/(n-1))(1+t)^{1/(n-1)}t \le 6t$$

при $t \le 2$. Отсюда и вытекает требуемое неравенство

$$|M - M'| \le (12|h|/d)\max\{M,M'\} \le 78(2|h|/d)\min\{M,M'\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^n$; $0 < \lambda < |a-b|/4$; $E \subset B(a,\lambda)$ *и* $F \subset B(b,\lambda)$ *— компактные множества с конечным конформным модулем* $\operatorname{mod}(E,F)$; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— отражение относительно гиперплоскости* P, *проходящей через точку* b, *и* $F^* = f(F)$. *Тогда*

$$\max\{\operatorname{mod}(E,F), \operatorname{mod}(E,F^*)\} \le C_4 \min\{\operatorname{mod}(E,F), \operatorname{mod}(E,F^*)\}; \tag{2}$$

$$|\operatorname{mod}(E,F^*) - \operatorname{mod}(E,F)| \le \frac{C_3\lambda}{|a-b|} \min\{\operatorname{mod}(E,F), \operatorname{mod}(E,F^*)\} \tag{3}$$

с константами $C_4 = (1 + C_2/2) \le 157$, $C_3 = 2C_2C_4 \le 312 \cdot 314$.

Доказательство. Пусть $M = \operatorname{mod}(E,F)$, $M' = \operatorname{mod}(E, f(F))$, e — нормальный вектор к P. Из двух гиперплоскостей, проведенных через точки $b \pm \lambda e$ параллельно гиперплоскости P, по меньшей мере одна (обозначим ее через P_0) разбивает $\mathbb{R}^n$ так, что оба шара $B(a,\lambda)$, $B(b,\lambda)$ лежат по одну сторону от нее. Пусть f_0 — отражение относительно P_0 и $M_0 = \operatorname{mod}(E, f_0(F))$. В силу теоремы 1.6 $M \le M_0$. Преобразование $H(x) = x + h$, $h = b - f_0(b)$, $|h| = 2\lambda < |a-b|/2$ переводит шар $f_0(B(b,\lambda))$ в $B(b,\lambda)$, и при этом $f = H \circ f_0$ в $B(b,\lambda)$. В силу леммы 2.1 имеем оценку

$$M \le M_0 \le (1 + 2C_2\lambda/|a-b|) \operatorname{mod}(E, H(f_0(F))) = (1 + 2C_2\lambda/|a-b|)M'. \tag{4}$$

В частности, $M \le C_4 M'$. Применив то же построение к конденсатору $(E, f(F))$, получаем неравенство $M' \le (1 + 2C_2\lambda/|a-b|)M$, которое дает оценку $M' \le C_4 M$ и в соединении с (4) — оценку (3):

$$|M - M'| \le 2C_2(\lambda/|a-b|) \max\{M, M'\} \le 2C_2(\lambda/|a-b|) C_4 \min\{M, M'\}.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.3. *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^n$; $0 < \lambda < |a-b|/4$; $E \subset B(a,\lambda)$ *и* $F \subset B(b,\lambda)$ *— компактные множества с конечным конформным модулем* $\operatorname{mod}(E,F)$; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— изометрия с неподвижной точкой* b *и* $F^* = f(F)$. *Тогда*

$$|\operatorname{mod}(E,F^*) - \operatorname{mod}(E,F)| \le \frac{C_5\lambda}{|a-b|} \min\{\operatorname{mod}(E,F), \operatorname{mod}(E,F^*)\} \tag{5}$$

с константой

$$C_5 = (n+1)C_3(C_4)^{n+1} \le 624(n+1)(157)^{n+2}.$$

В частности, если $0 < \operatorname{rad}(E,a) = \lambda_1 < |a-b|/4$ *и* $0 < \operatorname{rad}(F,b) = \lambda_2 < |a-b|/4$, *то*

$$|\operatorname{mod}(E,F^*) - \operatorname{mod}(E,F)| \le \frac{C_5\lambda}{|a-b|}\left(1 + C_1\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{|a-b|^2}\right)\right) \operatorname{Ln}\left(\frac{|a-b|^2}{\lambda_1\lambda_2}\right), \tag{6}$$

где $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, *и оценка* $C_1(\tau) \to 0$ *при* $\tau \to 0$ *определена в* 1.5.

Доказательство. По теореме Шаля (см. [12, теорема 3.1.3, с. 26]) $f = f_{n+1} \circ f_n \circ \dots \circ f_1$, где каждое из f_j либо тождественное преобразование, либо отражение относительно гиперплоскости, проходящей через точку b. Положим

$$M_0 = \operatorname{mod}(E,F), \quad M_j = \operatorname{mod}(E, (f_j \circ \dots \circ f_1)(F)), \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Применяя лемму 2.2 к каждому отражению f_j, получаем оценку

$$|M - M'| = |M_0 - M_{n+1}| \le \sum_{j=1}^{n+1} |M_j - M_{j-1}| \le \frac{C_3\lambda}{|a-b|} \sum_{j=1}^{n+1} \min\{M_j, M_{j-1}\}.$$

С учетом неравенства (2) $M_j \le (C_4)^{n+1}M_0$ и $M_j \le (C_4)^{n+1}M_{n+1}$ для всех $j = 0, 1, \dots, n+1$, что и приводит к требуемой оценке (5):

$$|M - M'| \le (n+1)C_3(C_4)^{n+1}(\lambda/|a-b|)\min\{M, M'\}.$$

Воспользовавшись для $M = \operatorname{mod}(E, F)$ оценкой (1) из 1.5, получаем соотношение (6). Теорема доказана.

Примечание. Более тонкое исследование поведения конформного модуля экстремального конденсатора Тейхмюллера при вращении его пластины выполнено в [8, лемма 5.27, с. 58] и в [13].

Последовательности $\alpha_j \to +0$ и $\beta_j \to +0$ назовем *H-соизмеримыми*, если

$$0 < \liminf(|\operatorname{Ln}\alpha_j|/|\operatorname{Ln}\beta_j|) \le \limsup(|\operatorname{Ln}\alpha_j|/\operatorname{Ln}\beta_j|) < +\infty.$$

В этой ситуации мы используем запись $\{\alpha_j\} \overset{H}{\sim} \{\beta_j\}$.

Следствие 2.4. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \ne b$, и пусть заданы последовательности $\{E_j\}$, $\{F_j\}$ компактных множеств таких, что*

$$a \in E_j \subset \overline{B}(a, \lambda_{1j}),\ b \in F_j \subset \overline{B}(b, \lambda_{2j});$$
$$\operatorname{rad}(a, E_j) = \lambda_{1j} \to 0,\ \operatorname{rad}(b, F_j) = \lambda_{2j} \to 0.$$

Если $\{\lambda_{1j}\} \overset{H}{\sim} \{\lambda_{2j}\}$, то для любых последовательностей изометрий $\theta_j, \varphi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с неподвижными точками $a = \theta_j(a)$ и $b = \varphi_j(b)$ имеет место сходимость

$$|\operatorname{mod}(E_j, F_j) - \operatorname{mod}(\theta_j(E_j), \varphi_j(F_j))| \to 0 \quad \textit{при } j \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $\lambda_j = \max\{\lambda_{1j}, \lambda_{2j}\}$. В силу H-соизмеримости последовательностей λ_{1j} и λ_{2j} найдется константа M такая, что

$$\operatorname{Ln}(|a-b|^2/\lambda_{1j}\lambda_{2j}) \le M \operatorname{Ln}(|a-b|/\lambda_j)$$

при всех достаточно больших j. Применение (6) в теореме 2.3 к изометрии φ_j дает сходимость

$$|\operatorname{mod}(E_j, F_j) - \operatorname{mod}(E_j, \varphi_j(F_j))| \to 0.$$

Применяя то же соотношение к изометрии θ_j, получаем сходимость

$$|\operatorname{mod}(E_j, \varphi_j(F_j)) - \operatorname{mod}(\theta_j(E_j), \varphi_j(F_j))| \to 0$$

при $j \to \infty$. Отсюда и следует требуемое утверждение.

3. Растяжения пластин малых конденсаторов

Лемма 3.1. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$; $0 < \lambda < |a-b|/8$; $E \subset B(a, \lambda)$ и $F \subset B(b, \lambda)$ — компактные множества с конечным конформным модулем $\operatorname{mod}(E, F)$; $S(x) = b + q(x-b)$. Если*

$$(|a-b| + \lambda)/(|a-b| - \lambda) \le \sqrt{q} \le (|a-b| - \lambda)/\lambda, \tag{7}$$

то

$$\operatorname{mod}(E, S(F)) \le \operatorname{mod}(E, F). \tag{8}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $b = 0$, $S(x) = qx$, $M = \operatorname{mod}(E, F)$. Для $p = |a| - \lambda$ выполнены неравенства

$$\lambda \le p, \quad (|a| + \lambda)/\sqrt{q} \le p \le p^2/(\lambda\sqrt{q}). \tag{9}$$

Так как сфера $Q_1 = \{|x| = p\}$ разделяет шары $B(0,\lambda)$ и $B(a,\lambda)$, то для отражения S_1 относительно сферы Q_1 из теоремы 1.6 вытекает оценка $M_1 = \operatorname{mod}(E, S_1(F)) \le M$. В силу последнего неравенства в (9) сфера $Q_2 = \{|x| = p\sqrt{q}\}$ отделяет шар $B(a,\lambda)$ от $S_1(B(0,\lambda))$. Применив отражение S_2 относительно Q_2 и используя теорему 1.6, получаем неравенство

$$\operatorname{mod}(E, S(F)) = \operatorname{mod}(E, S_2(S_1(F))) \le M_1 \le M.$$

Лемма доказана.

Вопрос. Останется ли верным неравенство (8), если нижнюю оценку для q в условии (7) леммы 3.1 заменить на $1 \le q$?

Рассмотрим более детально случай конденсаторов с одной прямолинейной пластиной.

Лемма 3.2. *Пусть заданы $e \in \mathbb{R}^n$, $e \ne 0$, луч $X = \{se : s \ge 1\}$, последовательности $\lambda_j \to +0$, $\delta_j \to +0$, $K_j \to 1$, и пусть $X(t), t \ge 0$, обозначает отрезок $X \cap \overline{B}(e, t|e|)$. Тогда*

$$\sup_{E_j} |\operatorname{mod}(E_j, X(\delta_j)) - \operatorname{mod}(E_j, X(K_j\delta_j))| \to 0 \quad \text{при } j \to \infty, \tag{10}$$

где супремум берется по всем компактам $E_j \subset \overline{B}(0, \lambda_j|e|) = B_j$ таким, что $\operatorname{rad}(E_j, 0) = \lambda_j|e|$.

Доказательство. Положив $K'_j = 1/K_j$, $\delta'_j = K_j\delta_j$ для тех номеров j, при которых $K_j < 1$, и $K'_j = K_j$, $\delta'_j = \delta_j$ для остальных номеров, мы сводим доказательство леммы к случаю, когда $K_j \ge 1$ для всех j. В этом случае из включения $X(\delta_j) \subset X(K_j\delta_j)$ следует неравенство

$$\operatorname{mod}(E_j, X(\delta_j)) - \operatorname{mod}(E_j, X(K_j\delta_j)) \ge 0. \tag{11}$$

Воспользовавшись 1.4 и 1.3, получаем оценку

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}(E_j, X(K_j\delta_j)) &\le \psi\left(\frac{(1+\lambda_j)(1+K_j\delta_j)}{K_j\delta_j\lambda_j}\right)\\ &\le \operatorname{Ln}\left(\frac{\kappa(1+2K_j\delta_j\lambda_j+\lambda_j+K_j\delta_j)}{K_j}\right) + \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{\delta_j\lambda_j}\right),\end{aligned}$$

из которой вытекает соотношение

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\sup_{E_j} \operatorname{mod}(E_j, X(K_j\delta_j))}{\operatorname{Ln}(1/\delta_j\lambda_j)} \le 1. \tag{12}$$

Мёбиусово преобразование ν_j, переводящее $\lambda_j e$ в 0, $-\lambda_j e$ в ∞ и 0 в $-e$, переводит B_j в полупространство $\{x : (x,e) \le 0\}$, точку e в $a_j = e(1-\lambda_j)/(1+\lambda_j)$, $X(\delta_j)$ в отрезок $[a_j, a_j + l_j e]$ с $l_j = 2\lambda_j\delta_j/(1+\lambda_j)(1+\lambda_j+\delta_j)$ и $X(K_j\delta_j)$ в отрезок $[a_j, a_j + l'_j e]$ с $l'_j = 2K_j\lambda_j\delta_j/(1+\lambda_j)(1+\lambda_j+K_j\delta_j)$. Пусть отображение g_j, тождественное вне шара $B(a_j, |a_j|)$, задано в $B(a_j, |a_j|)$ формулой $g_j(x) - a_j = (x - a_j)|x - a_j|^{q-1}/|a_j|^{q-1}$ с $q = (\operatorname{Ln} l'_j)/(\operatorname{Ln} l_j) = 1 + \gamma_j$, где $\gamma_j = \operatorname{Ln}[K_j(1+\lambda_j+\delta_j)/(1+\lambda_j+K_j\delta_j)]/\operatorname{Ln} l_j \searrow 0$ при $j \to \infty$. Оно переводит отрезок $\nu_j(X(\delta_j))$ в отрезок $\nu_j(X(K_j\delta_j))$ и имеет оценку коэффициентов квазиконформности (см. [7, пример 3, с. 85]) $\max\{K_I[g_j], K_O[g_j]\} \le q^{n-1}$. Следовательно, для конформных модулей имеем оценку

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}(E_j, X(\delta_j)) &= \operatorname{mod}(\nu_j(E_j), \nu_j(X(\delta_j)))\\ &\le q \operatorname{mod}(\nu_j(E_j), \nu_j(X(K_j\delta_j))) = q \operatorname{mod}(E_j, X(K_j\delta_j)),\end{aligned}$$

из которой следует, что

$$\operatorname{mod}(E_j, X(\delta_j)) - \operatorname{mod}(E_j, X(K_j\delta_j)) \le \gamma_j \operatorname{mod}(E_j, X(K_j\delta_j)).$$

Непосредственно устанавливается, что $\gamma_j \operatorname{Ln}(1/\delta_j\lambda_j) \to 0$ при $j \to \infty$, и с учетом соотношения (12) мы получаем сходимость

$$\sup_{E_j}[\operatorname{mod}(E_j, X(\delta_j)) - \operatorname{mod}(E_j, X(K_j\delta_j))]$$
$$\le \left(\frac{\sup_{E_j} \operatorname{mod}(E_j, X(K_j\delta_j))}{\operatorname{Ln}(1/\delta_j\lambda_j)}\right)\left(\gamma_j \operatorname{Ln}\frac{1}{\delta_j\lambda_j}\right) \to 0 \quad \text{при } j \to \infty.$$

Вместе с (11) это и приводит к требуемому соотношению (10). Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть $e \in \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, $e \ne 0$, $\zeta \in (0, 1/4)$ и $F(\varepsilon, t)$ обозначает отрезок $[e, (1+t\varepsilon)e]$, где $\varepsilon > 0$, $t > 1$. Тогда для любого компактного множества $E \subset B = \overline{B}(0, \zeta|e|)$ такого, что $\operatorname{rad}(E, 0) = \zeta|e|$, выполняется оценка*

$$\operatorname{mod}(E, F(\varepsilon, 1)) - \operatorname{mod}(E, F(\varepsilon, t)) \ge \operatorname{Ln}\frac{t}{\kappa} + \operatorname{Ln}\frac{1+\varepsilon-\zeta^2}{1+t\varepsilon-\zeta}. \tag{13}$$

В частности, для любого $\varepsilon \in (0, 1/8\kappa t)$ найдется δ (зависящее от E, t, ε) такое, что $\varepsilon \le \delta \le 8\kappa\varepsilon$ и

$$\operatorname{mod}(E, F(\delta, 1)) - \operatorname{mod}(E, F(\delta, t)) \ge \alpha(t) = \frac{(\operatorname{Ln} 2)(\operatorname{Ln} t)}{\operatorname{Ln} 8\kappa t}. \tag{14}$$

Доказательство. Используя известные формулы (см., например, [8, 5.54, с. 66]), получаем неравенство

$$\operatorname{mod}(E, F(\varepsilon, 1)) \ge \operatorname{mod}(B, F(\varepsilon, 1)) = \frac{1}{2}\operatorname{mod}\left(\left[\frac{\zeta^2 e}{1+\varepsilon}, \zeta^2 e\right], [e, (1+\varepsilon)e]\right)$$
$$= \frac{1}{2}\psi\left(\frac{(1-\zeta^2)((1+\varepsilon)^2-\zeta^2)}{\zeta^2\varepsilon^2}\right) \ge \operatorname{Ln}\frac{1+\varepsilon-\zeta^2}{\varepsilon\zeta}.$$

Применяя 1.4, выводим неравенство

$$\operatorname{mod}(E, F(\varepsilon, t)) \le \operatorname{mod}([0, \zeta e], [e, (1+t\varepsilon)e])$$
$$= \psi\left(\frac{(1+t\varepsilon)(1-\zeta)}{t\varepsilon\zeta}\right) \le \operatorname{Ln}\frac{\kappa(1+t\varepsilon-\zeta)}{t\varepsilon\zeta}.$$

Из этих двух неравенств следует (13). При любых $T > 4\kappa$ и $\varepsilon \le 1/T$ имеем оценку

$$\operatorname{Ln}((1+\varepsilon-\zeta^2)/(1+T\varepsilon-\zeta)) \ge \operatorname{Ln}(1/4)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{mod}(E, F(\varepsilon, 1)) - \operatorname{mod}(E, F(\varepsilon, T)) \ge \operatorname{Ln}(T/4\kappa). \tag{15}$$

Для заданного $t > 1$ возьмем наименьшее натуральное N, при котором $T = t^N \ge 8\kappa$. Тогда в силу (15) для любого $\varepsilon \le 1/8\kappa t \le 1/t^N$ имеем неравенство

$$\operatorname{mod}(E, F(\varepsilon, 1)) - \operatorname{mod}(E, F(\varepsilon, t^N)) = \sum_{j=1}^{N}[\operatorname{mod}(E, F(\varepsilon, t^{j-1})) - \operatorname{mod}(E, F(\varepsilon, t^j))]$$
$$= \sum_{j=1}^{N}[\operatorname{mod}(E, F(\varepsilon t^{j-1}, 1)) - \operatorname{mod}(E, F(\varepsilon t^{j-1}, t))] \ge \operatorname{Ln} 2.$$

Значит, для некоторого j, $1 \le j \le N$, реализуется требуемая оценка

$$\operatorname{mod}(E, F(\delta, 1)) - \operatorname{mod}(E, F(\delta, t)) \ge (\operatorname{Ln} 2)/N \ge \alpha(t),$$

где следует положить $\delta = \varepsilon t^{j-1}$. Лемма доказана.

4. Конденсаторы с лучеподобной пластиной

Лемма 4.1. *Пусть $e \in \mathbb{R}^n$, $e \neq 0$, Γ — невырожденный континуум, $e \in \Gamma$, и пусть последовательность $\delta_j \to +0$ такова, что для растяжений $\mu_j(x) = e + (\delta_j|e|)^{-1}(x - e)$ соответствующая последовательность континуумов $\mu_j(\Gamma)$ сходится по метрике Хаусдорфа к лучу L, выходящему из точки e. Для $s > 0$ обозначаем*

$$L(s) = L \cap \overline{B}(e, s|e|), \quad \Gamma(s) = (\Gamma \cap \overline{B}(e, s|e|))_e^{\mathrm{cont}}.$$

Тогда

$$\sup_E |\operatorname{mod}(E, \Gamma(\delta_j)) - \operatorname{mod}(E, L(\delta_j))| \to 0 \quad \text{при } j \to \infty, \tag{16}$$

где супремум берется по всем компактам $E \subset \overline{B}(0, |e|/2)$, содержащим невырожденные континуумы.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим отрезок $L_0 = L \cap \overline{B}(e, 1) = L(1/|e|)$ и множества $T(s) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, L_0) \geq s\}$ и $U(s) = \mathbb{R}^n \backslash T(s)$, где $s > 0$. Так как $\phi(s) = \operatorname{mod}(T(s), L_0) \searrow 0$ при $s \searrow 0$, то найдется $t_0 > 0$ такое, что $\phi(s) \leq \varepsilon/4$ при всех $s \leq t_0$. В частности, для множеств $T_0 = T(t_0)$ и $U_0 = U(t_0)$ имеем оценку $\operatorname{mod}(T_0, L_0) \leq \varepsilon/4$. Из сходимости $\mu_j(\Gamma(\delta_j)) \to L_0$ следует наличие номера j_0 такого, что $\mu_j(\Gamma(\delta_j)) \subset U_0$ при всех $j \geq j_0$. В силу свойства непрерывности конформной емкости получаем сходимость $\operatorname{mod}(T_0, \mu_j(\Gamma(\delta_j))) \to \operatorname{mod}(T_0, L_0) \leq \varepsilon/4$ при $j \to \infty$. Следовательно, найдется номер $j_1 \geq j_0$ такой, что $\operatorname{mod}(T_0, \mu_j(\Gamma(\delta_j)) \leq \varepsilon/2$ при всех $j \geq j_1$. Введя обозначения $U_j = \mu_j^{-1}(U_0)$ и $T_j = \mu_j^{-1}(T_0)$, получаем при всех $j \geq j_1$ включение $\Gamma(\delta_j) \subset U_j$ и оценки

$$\operatorname{mod}(T_j, \Gamma(\delta_j)) \leq \varepsilon/2; \quad \operatorname{mod}(T_j, L(\delta_j)) = \operatorname{mod}(T_0, L_0) \leq \varepsilon/4. \tag{17}$$

Так как $\overline{U}_j \to \{e\}$, найдется номер $j_2 \geq j_1$ такой, что $\overline{U}_j \subset B(e, |e|/2)$ при всех $j \geq j_2$. Поэтому для любого компакта $E \subset B(0, |e|/2)$ при всех $j \geq j_2$ выполняется оценка

$$\operatorname{mod}(E, \overline{U}_j) \leq \operatorname{mod}(E, \Gamma(\delta_j)) \leq \operatorname{mod}(E, \overline{U}_j) + \operatorname{mod}(T_j, \Gamma(\delta_j)),$$

из которой ввиду (17) следует неравенство $|\operatorname{mod}(E, \overline{U}_j) - \operatorname{mod}(E, \Gamma(\delta_j))| \leq \varepsilon/2$. В частности, если в этом рассуждении положить $\Gamma = L$, то для всех $j \geq j_2$ получаем аналогичную оценку $|\operatorname{mod}(E, \overline{U}_j) - \operatorname{mod}(E, L(\delta_j))| \leq \varepsilon/2$. Таким образом, при любом выборе $E \subset B(0, |e|/2)$ для всех $j \geq j_2$ выполняется неравенство

$$|\operatorname{mod}(E, \Gamma(\delta_j)) - \operatorname{mod}(E, L(\delta_j))| \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда и вытекает требуемое соотношение (16). Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Пусть $e \in \mathbb{R}^n$, $e \neq 0$, $n \geq 2$, и пусть заданы последовательность $\lambda_j \to +0$; последовательность компактов $E_j \subset \overline{B}(0, \lambda_j|e|)$ таких, что $\operatorname{rad}(E_j, 0) = \lambda_j|e|$; континуумы Γ_1, Γ_2, лучеподобные в точках $e_1 \in \Gamma_1$ и $e_2 \in \Gamma_2$ соответственно, где $|e_1| = |e_2| = |e|$, и некоторое $t \geq 1$. Пусть $\Gamma_m(s)$ ($m = 1, 2$; $s > 0$) обозначает связную компоненту пересечения $\Gamma_m \cap \overline{B}(e_m, s|e|)$, соединяющую точку e_m с границей шара $B(e_m, s|e|)$, т. е. $\Gamma_m(s) = (\Gamma_m \cap \overline{B}(e_m, s|e|))_{e_m}^{\mathrm{cont}}$. Тогда для любой последовательности $K_j \to 1$ и любой последовательности $\zeta_j \to +0$, H-соизмеримой с последовательностью λ_j,*

(i) *при* $t > 1$ *существуют подпоследовательность* $\{p\} \subset \{j\}$ *и последовательность* $\delta_p \in [\zeta_p, 8\kappa\zeta_p]$ *такие, что*

$$\liminf_{p\to 0} |\operatorname{mod}(E_p, \Gamma_1(\delta_p)) - \operatorname{mod}(E_p, \Gamma_2(tK_p\delta_p))| \geq \alpha(t) = \frac{(\operatorname{Ln} 2)\operatorname{Ln} t}{\operatorname{Ln}(8\kappa t)} > 0; \quad (18)$$

(ii) *при* $t = 1$

$$\lim_{j\to\infty} |\operatorname{mod}(E_j, \Gamma_1(\zeta_j)) - \operatorname{mod}(E_j, \Gamma_2(K_j\zeta_j))| = 0. \quad (19)$$

Доказательство. Случай (i). Заметим, что $T_j = tK_j > 1$ при всех достаточно больших j. Фиксируем некоторые лучи X_1, X_2, выходящие из точек e_1, e_2 соответственно. Построим вращения φ_1, φ_2 относительно точки 0 такие, что $\varphi_1(e_1) = \varphi_2(e_2) = e$, и вращения θ_1, θ_2 относительно точки e такие, что $\theta_1\varphi_1(X_1) = \theta_2\varphi_2(X_2) = X = \{se : s \geq 1\}$. При всех достаточно больших j выполняются неравенства $0 < \lambda_j < 1/4$, $0 < \zeta_j < 1/8\kappa T_j$. По лемме 3.3 найдется последовательность $\delta_j \in [\zeta_j, 8\kappa\zeta_j]$ такая, что

$$\operatorname{mod}(E_j, F(\delta_j, 1)) - \operatorname{mod}(E_j, F(\delta_j, T_j)) \geq \alpha(T_j) = \alpha(tK_j) \to \alpha(t)$$

при $j \to \infty$. Следовательно,

$$\liminf_{j\to\infty}[\operatorname{mod}(E_j, \theta_1\varphi_1(X_1(\delta_j))) - \operatorname{mod}(E_j, \theta_2\varphi_2(X_2(tK_j\delta_j)))] \geq \alpha(t). \quad (20)$$

Так как из H-соизмеримости последовательностей λ_j и ζ_j следует, что $\{\lambda_j\} \overset{H}{\sim} \{\delta_j\} \overset{H}{\sim} \{tK_j\delta_j\}$, то применение следствия 2.4 дает при $j \to \infty$ сходимость к нулю следующих величин:

$$|\operatorname{mod}(E_j, \theta_1\varphi_1(X_1(\delta_j))) - \operatorname{mod}(E_j, \varphi_1(X_1(\delta_j)))|,$$

$$|\operatorname{mod}(E_j, \theta_2\varphi_2(X_2(tK_j\delta_j))) - \operatorname{mod}(E_j, \varphi_2(X_2(tK_j\delta_j)))|,$$

$$|\operatorname{mod}(E_j, \varphi_1(X_1(\delta_j))) - \operatorname{mod}(\varphi_1(E_j), \varphi_1(X_1(\delta_j)))|,$$

$$|\operatorname{mod}(E_j, \varphi_2(X_2(tK_j\delta_j))) - \operatorname{mod}(\varphi_2(E_j), \varphi_2(X_2(tK_j\delta_j)))|.$$

Отсюда вытекает сходимость

$$|\operatorname{mod}(E_j, \theta_1\varphi_1(X_1(\delta_j))) - \operatorname{mod}(E_j, X_1(\delta_j))| \to 0, \quad (21)$$

$$|\operatorname{mod}(E_j, \theta_2\varphi_2(X_2(tK_j\delta_j))) - \operatorname{mod}(E_j, X_2(tK_j\delta_j))| \to 0 \quad (22)$$

при $j \to \infty$. Вместе с (20) это приводит к оценке

$$\liminf_{j\to\infty} |\operatorname{mod}(E_j, X_1(\delta_j)) - \operatorname{mod}(E_j, X_2(tK_j\delta_j))| \geq \alpha(t). \quad (23)$$

В силу лучеподобности континуумов Γ_1, Γ_2 найдутся подпоследовательность $\{p\} \subset \{j\}$ и лучи L_1, L_2, выходящие соответственно из точек e_1, e_2, такие, что для последовательностей растяжений $\mu_p(x) = e_1 + (\delta_p|e|)^{-1}(x - e_1)$ и $\nu_p(x) = e_2 + (\delta_p|e|tK_p)^{-1}(x - e_2)$ имеется сходимость $\mu_p(\Gamma_1) \to L_1$, $\nu_p(\Gamma_2) \to L_2$ при $p \to \infty$. Применение леммы 4.1 к каждой из этих последовательностей дает сходимости

$$|\operatorname{mod}(E_p, \Gamma_1(\delta_p)) - \operatorname{mod}(E_p, L_1(\delta_p))| \to 0, \quad (24)$$

$$|\operatorname{mod}(E_p, \Gamma_2(tK_p\delta_p)) - \operatorname{mod}(E_p, L_2(tK_p\delta_p))| \to 0. \quad (25)$$

Учитывая, что $\{\lambda_p\} \overset{H}{\sim} \{\delta_p\} \overset{H}{\sim} \{tK_p\delta_p\}$, имеем в силу следствия 2.4 сходимость

$$|\operatorname{mod}(E_p, X_1(\delta_p)) - \operatorname{mod}(E_p, L_1(\delta_p))| \to 0,$$

$$|\operatorname{mod}(E_p, X_2(tK_p\delta_p)) - \operatorname{mod}(E_p, L_2(tK_p\delta_p))| \to 0$$

при $p \to \infty$. В соединении с (23) это и приводит к соотношению (18).

Случай (ii). Допустив противное, возьмем подпоследовательность $\{i\} \subset \{j\}$, для которой

$$\liminf_{i\to\infty} |\operatorname{mod}(E_i, \Gamma_1(\zeta_i)) - \operatorname{mod}(E_i, \Gamma_2(K_p\zeta_i))| > 0. \tag{26}$$

Положив $\delta_j = \zeta_j$, найдем подпоследовательность $\{p\} \subset \{i\}$ и лучи X_1, X_2 с началом в точках e_1, e_2 соответственно такие, что для последовательностей растяжений $\mu_p(x) = e_1 + (\delta_p|e|)^{-1}(x - e_1)$ и $\nu_p(x) = e_2 + (\delta_p|e|tK_p)^{-1}(x - e_2)$ имеет место сходимость $\mu_p(\Gamma_1) \to X_1$, $\nu_p(\Gamma_2) \to X_2$ при $p \to \infty$. Применение леммы 4.1 дает соотношения

$$|\operatorname{mod}(E_p, \Gamma_1(\delta_p)) - \operatorname{mod}(E_p, X_1(\delta_p))| \to 0, \tag{27}$$

$$|\operatorname{mod}(E_p, \Gamma_2(tK_p\delta_p)) - \operatorname{mod}(E_p, X_2(tK_p\delta_p))| \to 0. \tag{28}$$

Используя для лучей X_1, X_2 преобразования вращения φ_1, φ_2, θ_1 и θ_2, построенные в первой части доказательства, получим (21) и (22). Лемма 3.2 дает сходимость

$$|\operatorname{mod}(E_p, \theta_1\varphi_1(X_1(\delta_p))) - \operatorname{mod}(E_p, \theta_2\varphi_2(X_2(K_p\delta_p)))| \to 0.$$

Вместе с (21) и (22) это приводит к сходимости

$$|\operatorname{mod}(E_p, X_1(\delta_p)) - \operatorname{mod}(E_p, X_2(K_p\delta_p))| \to 0,$$

что вместе с (27) и (28) дает при $p \to \infty$ соотношение

$$|\operatorname{mod}(E_p, \Gamma_1(\delta_p)) - \operatorname{mod}(E_p, \Gamma_2(K_p\delta_p))| \to 0,$$

противоречащее (26). Следовательно, должно выполняться (19). Теорема доказана.

5. Отображения, сохраняющие модули

Нам понадобится следующее утверждение о малых конденсаторах с лучеподобными пластинами.

Лемма 5.1 [1, лемма 5.5, с. 164]. *Пусть континуумы $\gamma_1, \gamma_2 \subset \mathbb{R}^n$ лучеподобны в точках $a_1 \in \gamma_1$ и $a_2 \in \gamma_2$ соответственно. Тогда для любых последовательностей $\{\gamma_{1j} \subset \gamma_1\}$ и $\{\gamma_{2j} \subset \gamma_2\}$ континуумов таких, что $a_m \in \gamma_{mj}$ $(m = 1, 2)$ и $\delta_{mj} = \max\{|x - a_m| : x \in \gamma_{mj}\} \to 0$ при $j \to \infty$, выполняется соотношение*

$$\delta_{1j}\delta_{2j}\exp(\operatorname{mod}(\gamma_{1j}, \gamma_{2j})) \to \kappa|a_1 - a_2|^2 \quad \text{при } j \to \infty. \tag{29}$$

Лемма 5.2. *Пусть континуумы* $\Gamma_m \subset \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, 3$, *лучеподобны в попарно различных точках* a_m *соответственно. Пусть сохраняющее модули топологическое вложение* $f : \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \to \overline{\mathbb{R}}^n$ *переводит точки* a_m *в точки* $b_m \in \mathbb{R}^n$. *Пусть мёбиусово преобразование* $\mu : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$ *также переводит* a_m *в* b_m *и имеет в этих точках коэффициенты растяжения* $r_m = |\mu'(a_m)|$. *Тогда для любой последовательности континуумов* $\gamma_{mj} \subset \Gamma_m$, $a_m \in \gamma_{mj}$, $m = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots$, *таких, что* $\delta_{mj} = \mathrm{rad}(\gamma_{mj}, a_m) \to 0$ *при* $j \to \infty$, *выполняется соотношение*

$$\lim_{j\to\infty} (\delta'_{mj}/\delta_{mj}) = r_m, \quad m = 1, 2, 3, \tag{30}$$

где $\delta'_{mj} = \mathrm{rad}(f(\gamma_{mj}), b_m)$. *В частности, если* $f(a_m) = a_m$, $m = 1, 2, 3$, *то*

$$\lim_{j\to\infty} (\delta'_{mj}/\delta_{mj}) = 1. \tag{31}$$

Доказательство. Инвариантность абсолютного двойного отношения при мёбиусовых преобразованиях приводит к следующим выражениям для коэффициентов растяжения r_1, r_2, r_3:

$$r_1 = \frac{h_{12}h_{13}}{h_{23}}, \quad r_2 = \frac{h_{21}h_{23}}{h_{13}}, \quad r_3 = \frac{h_{31}h_{32}}{h_{12}}, \tag{32}$$

где для краткости введено обозначение $h_{m_1m_2} = |b_{m_1} - b_{m_2}|/|a_{m_1} - a_{m_2}|$ для всех $m_1, m_2 = 1, 2, 3$, $m_1 \neq m_2$. В силу [1, лемма 5.8, с. 166] континуумы $f(\Gamma_m)$ также являются лучеподобными в соответствующих точках b_m, $m = 1, 2, 3$. Поэтому применение леммы 5.1 приводит к соотношениям

$$\frac{\delta'_{1j}}{\delta_{1j}} \cdot \frac{\delta'_{2j}}{\delta_{2j}} \to h_{12}^2; \quad \frac{\delta'_{1j}}{\delta_{1j}} \cdot \frac{\delta'_{3j}}{\delta_{3j}} \to h_{13}^2; \quad \frac{\delta'_{2j}}{\delta_{2j}} \cdot \frac{\delta'_{3j}}{\delta_{3j}} \to h_{23}^2$$

при $j \to \infty$. Допустим, что $\limsup\limits_{j\to\infty}(\delta'_{1j}/\delta_{1j}) > r_1$. Перейдя при необходимости к подпоследовательности, мы можем считать, что существуют пределы (конечные или бесконечные) $d_m = \lim\limits_{j\to\infty}(\delta'_{mj}/\delta_{mj})$, причем $d_1 > r_1$. Из равенств $d_1d_2 = h_{12}^2$ и $d_1d_3 = h_{13}^2$ следует, что $d_2 < h_{12}^2/r_1$ и $d_3 < h_{13}^2/r_1$. Это приводит к противоречию: $h_{23}^2 = d_2d_3 < h_{12}^2h_{13}^2/r_1^2 = h_{23}^2$. Следовательно, $\limsup\limits_{j\to\infty}(\delta'_{1j}/\delta_{1j}) \leq r_1$.

Допустим теперь, что $d_1 = \liminf\limits_{j\to\infty}(\delta_{1j}) < r_1$. Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что существуют пределы d_1, d_2, d_3, причем $d_1 < r_1$. Из тех же равенств, что и выше, получаем неравенства $d_2 > h_{12}^2/r_1$, $d_3 > h_{13}^2/r_1$, которые приводят к противоречию: $h_{23}^2 > h_{12}^2h_{13}^2/r_1^2 = h_{23}^2$. Следовательно, $\liminf\limits_{j\to\infty}(\delta'_{1j}/\delta_{1j}) \geq r_1$. Вместе с установленным выше неравенством для верхнего предела это дает требуемое соотношение (30) для $m = 1$. Для $m = 2, 3$ доказательство получается перестановкой индексов точек. Лемма доказана.

Нам понадобится следующий усиленный вариант основной теоремы из статьи [1].

Лемма 5.3. *Пусть заданы произвольное множество* $A \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, *содержащее по меньшей мере четыре попарно различные точки; семейство* $\{\Gamma_a : a \in A\}$ *континуумов, лучеподобных в соответствующих точках* $a \in \Gamma_a$; *сохраняющее модули топологическое вложение* $f : \cup\{\Gamma_a : a \in A\} \to \overline{\mathbb{R}}^n$. *Тогда* $f|A$ *совпадает с мёбиусовым преобразованием* $\mu : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$, *единственным с точностью до* *евклидовой изометрии. При этом для любой точки $a \in A$ и любой последовательности континуумов $\gamma_{aj} \subset \Gamma_a$ такой, что $a \in \gamma_{aj}$, $\delta_{aj} = \mathrm{rad}(\gamma_{aj}, a) \to 0$ при $j \to \infty$, выполняется соотношение*

$$\lim_{j\to\infty} (\delta'_{aj}/\delta_{aj}) = r_a = |\mu'(a)|, \tag{33}$$

где $\delta'_{aj} = \mathrm{rad}(f(\gamma_{aj}), f(a))$.

Доказательство. Взяв произвольную четверку попарно различных точек $T = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset A$, применим к каждой паре точек из T лемму 5.1 (построив соответствующую последовательность континуумов $\gamma_{aj} \subset \Gamma_{aj}$) и получим выражение для абсолютного двойного отношения:

$$R(T)^2 = \left(\frac{|a_1 - a_2| \cdot |a_3 - a_4|}{|a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_4|}\right)^2$$
$$= \lim_{j\to\infty} \exp[\mathrm{mod}(\gamma_{a_1 j}, \gamma_{a_2 j}) + \mathrm{mod}(\gamma_{a_3 j}, \gamma_{a_4 j}) - \mathrm{mod}(\gamma_{a_1 j}, \gamma_{a_3 j}) - \mathrm{mod}(\gamma_{a_2 j}, \gamma_{a_4 j})].$$

Учитывая (см. [1, лемма 5.8, с. 166]), что континуумы $f(\Gamma_a)$ являются лучеподобными в соответствующих точках $f(a)$, и применяя ту же лемму 5.1 (к последовательностям континуумов $f(\gamma_{aj})$), получаем аналогичное выражение для абсолютного двойного отношения четверки точек $f(T)$:

$$R(f(T))^2 = \left(\frac{|f(a_1) - f(a_2)| \cdot |f(a_3) - f(a_4)|}{|f(a_1) - f(a_3)| \cdot |f(a_2) - f(a_4)|}\right)^2$$
$$= \lim_{j\to\infty} \exp[\mathrm{mod}(f(\gamma_{a_1 j}), f(\gamma_{a_2 j})) + \mathrm{mod}(f(\gamma_{a_3 j}), f(\gamma_{a_4 j}))$$
$$- \mathrm{mod}(f(\gamma_{a_1 j}), f(\gamma_{a_3 j})) - \mathrm{mod}(f(\gamma_{a_2 j}), f(\gamma_{a_4 j}))].$$

Так как f сохраняет конформные модули, отсюда следует равенство $R(f(T)) = R(T)$, которое в силу произвольного выбора тетрады $T \subset A$ и означает, что $f|A$ является мёбиусовым вложением, которое, как известно (см., например, [4, лемма 2, с. 378]), продолжается до мёбиусова автоморфизма μ всего пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$. Поскольку A содержит более двух точек, то любые мёбиусовы преобразования, совпадающие на A, отличаются друг от друга лишь композицией с евклидовой изометрией. Таким образом, коэффициенты растяжения $r_a = |\mu'(a)|$ не зависят от выбора мёбиусова продолжения отображения f с множества A и определяются лишь заданием f и A. Поэтому соотношение (33) непосредственно вытекает из леммы 5.2. Лемма доказана.

Лемма 5.4. *Пусть $g : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ — сохраняющее модули топологическое вложение континуума $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ и $a \in \Gamma$. Тогда для любой последовательности $\lambda_j \to +0$ и последовательности континуумов $\gamma_j \subset \Gamma \cap \overline{B}(a, \lambda_j)$ таких, что $a \in \gamma_j$ и $\mathrm{rad}(\gamma_j, a) = \lambda_j$, соответствующая последовательность $\lambda'_j = \mathrm{rad}(g(\gamma_j), g(a))$ является H-соизмеримой с последовательностью λ_j.*

Доказательство. Известно (см. [14, теорема 5.6, с. 22]), что любое топологическое вложение, ограниченно искажающее модули, заданное на континууме в $\mathbb{R}^n$, будет квазимёбиусовым вложением (полное доказательство этой теоремы воспроизведено также в [15, теорема 3.2.2]). Это относится, в частности, и к отображению g, сохраняющему модули. Квазимёбиусово вложение g является η-квазисимметрическим в некоторой окрестности точки a (см. [16, теорема 3.12, с. 224]) и, следовательно, на всех континуумах γ_j. Тогда в силу [17, теорема 3.14, с. 108] существуют константы $\alpha \geq 1$ и M, не зависящие от j, такие, что $\lambda'_j \leq M \cdot (\lambda_j)^\alpha$ и $\lambda_j \leq M \cdot (\lambda'_j)^\alpha$ при всех j. Отсюда следует, что $\{\lambda_j\} \overset{H}{\sim} \{\lambda'_j\}$. Лемма доказана.

6. Доказательство основной теоремы

Теперь мы приступим к доказательству основного результата, сформулированного во введении.

Теорема 6.1. *Пусть множество $\Sigma \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, $n \geq 3$, является объединением невырожденных континуумов и существует множество $A \subset \Sigma$, содержащее не менее трех точек, такое, что через каждую точку $a \in A$ проходит континуум $\gamma_a \subset \Sigma$, лучеподобный в этой точке. Тогда для любой точки $z \in \Sigma$ сохраняющее модули топологическое вложение $f : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}^n$ является мёбиусовым вложением на множестве $A \cup \{z\}$.*

Доказательство. Воспользовавшись вспомогательным мёбиусовым преобразованием и леммой 5.2, мы можем считать без нарушения общности, что $A \subset \mathbb{R}^n$ и сохраняющее модули отображение f тождественно на A. Фиксируем пару точек $a_1, a_2 \in A$ и рассмотрим произвольную конечную точку $z \in \Sigma \backslash A$. Построим мёбиусовы преобразования μ и ν такие, что $\mu(z) = \nu(f(z)) = 0$, $\mu(a_1) = \nu(a_1) = e_1$, $\mu(a_2) = \nu(a_2) = e_2$, где $|e_1| = |e_2| = |e|$. Тогда отображение $g = \nu \circ f \circ \mu^{-1}$ на $\Sigma' = \nu(\Sigma)$ сохраняет конформные модули и имеет неподвижные точки 0, e_1, e_2.

Покажем, что
$$|(\nu \circ \mu^{-1})'(e_1)| = |(\nu \circ \mu^{-1})'(e_2)|. \tag{34}$$
Допустим, что $|(\nu \circ \mu^{-1})'(e_1)| = k_1 \neq k_2 = |(\nu \circ \mu^{-1})'(e_2)|$. Не ограничивая общности, можно считать, что $k_2 > k_1$. Фиксируем некоторый континуум $E \subset \Sigma'$, содержащий точку 0, зададим последовательность $\xi_j \searrow 0$ и построим последовательность континуумов $E_j \subset E$ с $\operatorname{rad}(E_j, 0) = |e|\xi_j$. Для соответствующей последовательности континуумов $g(E_j)$ положим $\xi'_j|e| = \operatorname{rad}(g(E_j), 0)$. В силу непрерывности g имеем сходимость $\xi'_j \to 0$. Из точек e_1, e_2 выходят лучеподобные в этих точках континуумы $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Sigma'$. Зададим последовательность $\varepsilon_j \searrow 0$, H-соизмеримую с последовательностью ξ_j, и построим последовательность континуумов $\gamma_{1j} \subset \Gamma_1$, лучеподобных в точке e_1 и таких, что $\operatorname{rad}(\gamma_{1j}, e_1) = |e|\varepsilon_j$. Построим также последовательность континуумов $\gamma_{2j} \subset \Gamma_2$, лучеподобных в точке e_2, таких, что $\operatorname{rad}(\gamma_{2j}, e_2) = |e|\varepsilon_j$. Положим $\varepsilon'_{1j}|e| = \operatorname{rad}(g(\gamma_{1j}), e_2)$ и $\varepsilon'_{2j}|e| = \operatorname{rad}(g(\gamma_{2j}), e_2)$.

По лемме 5.4 $\{\varepsilon'_{1j}\} \overset{H}{\sim} \{\varepsilon_j\} \overset{H}{\sim} \{\varepsilon'_{2j}\}$ и $\{\xi'_j\} \overset{H}{\sim} \{\xi_j\}$. Так как $\{\xi_j\} \overset{H}{\sim} \{\varepsilon_j\}$, то
$$\{\varepsilon'_{1j}\} \overset{H}{\sim} \{\xi'_j\} \overset{H}{\sim} \{\varepsilon'_{2j}\}. \tag{35}$$

Отображение g на множестве $\mu(A)$ совпадает с мёбиусовым преобразованием $\nu \circ \mu^{-1}$. Поэтому в силу леммы 5.3 при $j \to \infty$ имеет место сходимость
$$\frac{\varepsilon'_{1j}}{\varepsilon_j} \to k_1, \quad \frac{\varepsilon'_{2j}}{\varepsilon_j} \to k_2.$$

Следовательно, положив $t = k_2/k_1 > 1$ и $\varepsilon'_{2j}/\varepsilon'_{1j} = tK_j$, мы получим соотношение $K_j \to 1$. Таким образом, ввиду H-соизмеримости (35) к последовательностям континуумов $\{g(E_j)\}, \{g(\gamma_{1j})\}$ и $\{g(\gamma_{2j})\}$ можно применить теорему 4.2(i), в силу которой найдется подпоследовательность $\{p\} \subset \{j\}$, последовательность $\delta_p \in [\varepsilon'_{1p}, 8\kappa\varepsilon'_{1p}]$, последовательность лучеподобных в точке e_1 континуумов $\tau_{1p} \subset g(\Gamma_1)$, соединяющих точку e_1 с границей шара $B(e_1, |e|\delta_p)$, и последовательность лучеподобных в точке e_2 континуумов $\tau_{2p} \subset g(\Gamma_2)$, соединяющих точку e_2 с границей шара $B(e_2, |e|tK_p\delta_p)$, такие, что

$$\lim_{p\to\infty} |\operatorname{mod}(g(E_p), \tau_{1p}) - \operatorname{mod}(g(E_p), \tau_{2p})| \geq \alpha(t) > 0.$$

Отметим, что $\{\delta_p\} \overset{H}{\sim} \{\varepsilon'_{1p}\} \overset{H}{\sim} \{tK_p\varepsilon'_{1p}\}$. Теперь мы рассмотрим континуумы $\sigma_{1p} = g^{-1}(\tau_{1p})$ и $\sigma_{2p} = g^{-1}(\tau_{2p})$, для которых положим $\lambda_{mp}|e| = \operatorname{rad}(\sigma_{mp}, e_m)$, $m = 1, 2$. С учетом того, что g сохраняет конформные модули, отсюда вытекает соотношение

$$\lim_{p\to\infty} |\operatorname{mod}(E_p, \sigma_{1p}) - \operatorname{mod}(E_p, \sigma_{2p})| \geq \alpha(t) > 0. \tag{36}$$

Воспользовавшись еще раз леммой 5.3 для отображения g в точках e_1 и e_2, получим соотношения

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\delta_p}{\sigma_{1p}} = k_1, \quad \lim_{p\to\infty} \frac{tK_p\delta_p}{\sigma_{2p}} = k_2,$$

из которых следует, что $\sigma_{2p}/\sigma_{1p} \to (k_1/k_2)t = 1$. Так как в силу леммы 5.4 $\{\lambda_{1p}\} \overset{H}{\sim} \{\delta_p\}$ и $\{\lambda_{2p}\} \overset{H}{\sim} \{tK_p\delta_p\}$, то $\{\lambda_{1p}\} \overset{H}{\sim} \{\xi_p\} \overset{H}{\sim} \{\lambda_{2p}\}$. Поэтому к последовательностям континуумов $\{E_p\}, \{\sigma_{1p}\}$ и $\{\sigma_{2p}\}$ можно применить теорему 4.2(ii), в силу которой $|\operatorname{mod}(E_p, \sigma_{1p}) - \operatorname{mod}(E_p, \sigma_{2p})| \to 0$ при $p \to \infty$, что противоречит ранее полученному соотношению (36). Таким образом, мы доказали равенство (34). Поскольку $\nu \circ \mu^{-1}$ переводит тройку точек e_1, e_2, 0 в тройку точек e_1, e_2, $\nu(z)$, то, используя выражения (32) для коэффициентов растяжения, получаем равенство

$$k_1 = \frac{|e_1 - \nu(z)|}{|e_2 - \nu(z)|} = k_2 = \frac{|e_2 - \nu(z)|}{|e_1 - \nu(z)|},$$

из которого следует, что $|e_1 - \nu(z)| = |e_2 - \nu(z)|$. Так как ν переводит точки z, a_2, a_1, $f(z)$ в точки $\nu(z)$, e_2, e_1, 0, из инвариантности абсолютного двойного отношения для этих четверок точек следует равенство

$$\frac{|f(z) - a_1|}{|f(z) - a_2|} = \frac{|z - a_1|}{|z - a_2|},$$

которое, стало быть, выполняется для любой пары точек $a_1, a_2 \in A$. Отсюда вытекает, что отображение f сохраняет абсолютное двойное отношение для любой четверки z, a_1, a_2, a_3 попарно различных точек и, следовательно, является мёбиусовым вложением на множестве $A \cup \{z\}$ при произвольном выборе точки $z \in \Sigma'$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 0.3. Воспользовавшись вспомогательными мёбиусовыми преобразованиями и леммой 5.2, мы можем считать, что f тождественно на множестве A и $a_{n+2} = \infty$. Для произвольно взятой точки $z \in \Sigma$ применение теоремы 6.1 дает нам мёбиусовость вложения $\tau = f|(A \cup \{z\})$. Так как $\tau(\infty) = \infty$, то τ есть преобразование подобия. Поскольку τ имеет две неподвижные конечные точки a_1, a_2, оно является евклидовой изометрией. Наконец, так как эта евклидова изометрия имеет неподвижные точки $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, не лежащие в $(n-1)$-мерной плоскости, τ является тождественным преобразованием. Следовательно, $f(z) = \tau(z) = z$. Таким образом, $f(z) = z$ для всех точек $z \in \Sigma$. Теорема доказана.

Примечание. Конструкция Хатчинсона (см. [18, § 3.5, с. 730, 731]) позволяет построить в пространстве самоподобные жордановы дуги (типа кривой Коха), которые ни в одной своей точке не являются лучеподобными. Поэтому метод, предложенный в данной статье, неприменим для таких континуумов. Решение проблемы П. П. Белинского на самоподобных жордановых дугах требует, по-видимому, разработки нового подхода, использующего самоподобную структуру континуума, и представляет самостоятельный интерес.

Историческая справка. Во второй половине 70-х годов П. П. Белинский предложил своему аспиранту А. К. Варисову начать изучение класса топологических отображений $f : \Sigma \to \mathbb{R}^n$, заданных на континууме $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ и обладающих тем свойством, что для любого конденсатора $(E, F; \mathbb{R}^n)$ со связными пластинами $E, F \subset \Sigma$ выполняется оценка $\operatorname{mod}(f(E), f(F)) \leq \eta(\operatorname{mod}(E, F))$ с некоторой фиксированной функцией искажения $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Эти отображения были названы *ОИМ-гомеоморфизмами* (ограниченно искажающими модули). При обсуждения этой тематики на заседаниях научно-исследовательского семинара по геометрической теории функций под руководством П. П. Белинского (Институт математики СО РАН, Новосибирск) им же были сформулированы два основные гипотезы, связанные с ОИМ-гомеоморфизмами. Первая гипотеза: для любого ОИМ-гомеоморфизма существует линейная оценка искажения конформных модулей конденсаторов. Вторая гипотеза — о мёбиусовости ОИМ-гомеоморфизма с функцией искажения $\eta = \mathrm{id}$ — рассматривается в данной статье. У П. П. Белинского не было публикаций с формулировкой этих двух проблем, но начиная с работы [19] в каждой из последующих работ В. В. Асеева и А. К. Варисова (см. библиографию в [1]) указывалось, что постановка названных выше задач принадлежит П. П. Белинскому.

Автор благодарен Д. Г. Кузину, тщательно проверившему весь текст этой статьи и исправившему множество досадных неточностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aseev V. V.* On the conformal modulus distortion under quasimöbius mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A1 Math. 1991. V. 16. P. 155–168.
2. *Асеев В. В.* Плоские отображения, сохраняющие модули // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310, № 5. С. 1033–1034.
3. *Anderson G. D., Vamanamurthy M.* The transfinite moduli of condensers in space // Tôhoku Math. J. 1988. V. 40, N 1. P. 1–25.
4. *Асеев В. В.* О мёбиусовости топологических вложений, сохраняющих конформные модули // Докл. РАН. 1992. Т. 323, № 3. С. 377–379.
5. *Асеев В. В.* К проблеме П. П. Белинского для гомеоморфизмов, сохраняющих конформные емкости конденсаторов // Материалы междунар. конф. «Выпускник НГУ и научно-технический прогресс», 22–24 сент. 1999. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1999. Ч. 1. С. 37–38.
6. *Черноусов Г. Н.* О продолжении до изометрии гомеоморфизмов, сохраняющих конформные модули в гиперболическом пространстве. Новосибирск, 1996. 16 с. (Препринт/Ин-т математики СО РАН; № 32).
7. *Сычев А. В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983.
8. *Vuorinen M.* Conformal geometry and quasiregular mappings. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1988. (Lecture Notes in Math.; 1319).
9. *Дубинин В. Н.* Преобразования конденсаторов в пространстве // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296, № 1. С. 18–20.
10. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103, N 3. P. 353–393.

11. *Асеев В. В.* Непрерывность конформной емкости для конденсаторов с равномерно совершенными пластинами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 243–253.
12. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986.
13. *Betsakos D.* On conformal capacity and Teichmüller modulus problem in space. Helsinki, 1998. 15 с. (Препринт/University of Helsinki; N 200).
14. *Асеев В. В.* Квазисимметрические вложения и отображения, ограниченно искажающие модули / Ред. Сиб. мат. журн. Новосибирск, 1984. 30 с. Депонировано в ВИНИТИ 06.11.84, № 7190-84.
15. *Асеев В. В.* Квазисимметрические вложения // М.: ВИНИТИ. (Итоги науки и техники), (в печати).
16. *Väisälä J.* Quasimöbius maps // J. Anal. Math. 1984/85. V. 44. P. 218–234.
17. *Tukia P., Väisälä J.* Quasisymmetric embeddings of metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser A1 Math. 1980. V. 5. P. 97–114.
18. *Hutchinson J. E.* Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30. P. 713–747.
19. *Асеев В. В.* О гомеоморфизмах k-мерных сфер, сохраняющих n-мерные пространственные модули // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 6. С. 1357-1360.

Статья поступила 23 января 2001 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
ase@math.nsc.ru