Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 517.9

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов

Аннотация: Получены теоремы о структуре резольвенты оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами, действующего в банаховых пространствах двусторонних последовательностей векторов. Библиогр. 17.

Введение

Пусть X — комплексное банахово пространство и $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Символом $l_p = l_p(\mathbb{Z}, X)$, где $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство двусторонних последовательностей векторов из X, суммируемых со степенью p для $p \in [1, \infty)$ и ограниченных при $p = \infty$, с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|x(k)\|^p\right)^{1/p},\ x \in l_p,\ p \in [1,\infty), \quad \|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|x(k)\|,\ x \in l_\infty.$$

В данной статье изучаются спектральные свойства оператора взвешенного сдвига

$$\mathscr{A} : D(\mathscr{A}) \subset l_p \to l_p = l_p(\mathbb{Z}, X),$$

определяемого равенствами

$$(\mathscr{A}x)(n) = A(n)x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z},\ x \in l_p,$$

где $A(n) : D(A(n)) \subset X \to X$, $n \in \mathbb{Z}$, — семейство замкнутых линейных операторов, имеющих плотную в X область определения $D(A(n))$ (они называются в дальнейшем *коэффициентами оператора взвешенного сдвига* $\mathscr{A}$). Область определения $D(\mathscr{A})$ оператора $\mathscr{A}$ состоит из $x \in l_p$ таких, что $x(n-1) \in D(A(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, и последовательность $y(n) = A(n)x(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$, принадлежит l_p. Замкнутость операторов $A(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, обеспечивает замкнутость оператора $\mathscr{A}$.

Используя инвариантность спектра оператора $\mathscr{A}$ относительно вращений вокруг нуля в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, изучение спектральных свойств этого оператора можно свести к выяснению условий обратимости разностного оператора $\mathscr{D} = I - \mathscr{A} : D(\mathscr{D}) = D(\mathscr{A}) \subset l_p \to l_p$ вида

$$(\mathscr{D}x)(n) = x(n) - A(n)x(n-1), \quad x \in D(\mathscr{A}),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00408).

где символ I используется для обозначения тождественного оператора в любом из рассматриваемых банаховых пространств.

Исследование обратимости оператора $\mathscr{D}$ очень важно при изучении спектральных свойств абстрактных параболических операторов вида

$$\mathscr{L} = -d/dt + B(t) : D(\mathscr{L}) \subset L_p \to L_p, \quad p \in [1, \infty],$$

действующих в банаховом пространстве $L_p = L_p(\mathbb{R}, X)$ измеримых (по Бохнеру) и суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ (существенно ограниченных при $p = \infty$) функций, определенных на вещественной оси $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве X. Операторы $B(t) : D(B(t)) \subset X \to X$, $t \in \mathbb{R}$, считаются замкнутыми и порождающими корректную задачу Коши на $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R};\ t \geq 0\}$ (см. [1]). Пусть $\mathscr{V} = \{\mathscr{V}(t,s); -\infty < s \leq t < \infty\} \subset \operatorname{End} X$ — соответствующее сильно непрерывное семейство эволюционных операторов. Функцию $x \in L_p$ отнесем к области определения $D(\mathscr{L})$ оператора $\mathscr{L}$, если существует функция $f \in L_p$ такая, что для всех $s \leq t$ из $\mathbb{R}$ имеют место равенства

$$x(t) = \mathscr{V}(t,s)x(s) - \int\limits_s^t \mathscr{V}(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad s \leq t.$$

В этом случае полагается $\mathscr{L}x = f$ (см. [2, 3]).

Приведем несколько результатов из статьи [3], подчеркивающих важную роль разностных операторов при изучении дифференциальных операторов.

Теорема 1. *Оператор $\mathscr{L}$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $\{T(t); t \geq 0\}$ разностных операторов из банаховой алгебры $\operatorname{End} L_p$ вида*

$$(T(t)x)(s) = \mathscr{V}(s, s-t)x(s-t), \quad x \in L_p,\ s \in \mathbb{R},\ t \geq 0,$$

при любом $p \in [1, \infty)$.

Теорема 2 (об отображении спектра). *Спектр $\sigma(\mathscr{L})$ оператора $\mathscr{L}$ и спектр $\sigma(T(t))$ разностного оператора $T(t)$, $t > 0$, связаны соотношением*

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \exp \sigma(\mathscr{L})t = \{\exp \lambda t; \lambda \in \sigma(\mathscr{L})\}.$$

В частности, дифференциальный оператор $\mathscr{L}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим разностный оператор $I - T(1)$.

Теорема 3. *Дифференциальный оператор $\mathscr{L} : D(\mathscr{L}) \subset L_p \to L_p$, $p \in [1, \infty]$, обратим тогда и только тогда, когда обратим разностный оператор $\mathscr{D}_{\mathscr{V}} \in \operatorname{End} l_p$, определенный равенствами*

$$(\mathscr{D}_{\mathscr{V}} x)(n) = x(n) - \mathscr{V}(n, n-1)x(n-1), \quad x \in l_p,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, при изучении абстрактного параболического оператора $\mathscr{L}$ важную роль играют рассматриваемые здесь разностные операторы с ограниченной функцией $A(n) = \mathscr{V}(n, n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Если операторы $B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, порождают семейство плотно определенных замкнутых эволюционных операторов $\mathscr{V}$ (задача Коши некорректна), то определенные аналоги теорем 1–3 приводят к необходимости рассмотрения оператора $\mathscr{D}$ вида (1) с $A(n) = \mathscr{V}(n, n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Исследование обратимости оператора $\mathscr{D} = I - \mathscr{A}$ будем проводить, используя семейство $\mathscr{U}$ операторов $\mathscr{U}(n,m) : D(\mathscr{U}(n,m)) \subset X \to X$, $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{Z}$, вида

$$\mathscr{U}(n,m) = A(n) \dots A(m+1) \tag{2}$$

с областью определения

$$D(\mathscr{U}(n,m)) = \{x \in D(A(m+1)) : \mathscr{U}(k,m)x \in D(A(k+1)),\ m+1 \le k \le n\}.$$

При этом полагается $\mathscr{U}(n,n) = I$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$ и всюду считается, что все операторы из семейства эволюционных операторов $\mathscr{U}$ являются замкнутыми.

Определение 1. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ обладает *свойством экспоненциальной дихотомии на* $\mathbb{Z}$, если существует ограниченная проекторнозначная функция $P : \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$ такая, что имеют место следующие свойства:

1) имеют место равенства

$$P(n)A(n) = A(n)P(n-1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

причем образ $X_{n-1} = \operatorname{Im} P(n-1)$ содержится в $D(A(n))$ при любом $n \in \mathbb{Z}$ и все операторы $P(n)A(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, допускают ограниченное расширение (для него сохраним то же обозначение) на X;

2) при $m < n$, $m \in \mathbb{Z}$, сужение

$$\mathscr{U}_{n,m} : X_+(m) \cap D(\mathscr{U}(n,m)) \to X_+(n)$$

оператора $\mathscr{U}(n,m)$ на образ $X_+(m) = \operatorname{Im} Q(m)$ дополнительного проектора $Q(m) = I - P(m)$ является изоморфизмом подпространств $X_+(m) \cap D(\mathscr{U}(n,m))$ и $X_+(n)$. Определим оператор $\mathscr{U}(m,n) \in \operatorname{End} X$ как оператор, совпадающий с $\mathscr{U}_{n,m}^{-1}$ на $X_+(n)$ и равный нулю на подпространстве $X_-(n) = \operatorname{Im} P(n)$;

3) существуют числа $M_1, M_2 > 0$, $q_1, q_2 \in [0,1)$ такие, что имеют место оценки

$$\|\mathscr{U}(n,m)P(m)\| \le M_1 q_1^{n-m}, \quad \text{если } m \le n, \tag{3}$$

$$\|\mathscr{U}(n,m)Q(m)\| \le M_2 q_2^{m-n}, \quad \text{если } m > n. \tag{4}$$

В дальнейшем об участвующих в определении экспоненциальной дихотомии проекторнозначных функциях P и Q будем говорить, что они *порождают экспоненциальную дихотомию семейства* $\mathscr{U}$ эволюционных операторов. Если одна из них нулевая, то экспоненциальная дихотомия семейства $\mathscr{U}$ называется *тривиальной*.

Одним из основных результатов статьи является

Теорема 4. *Для того чтобы оператор*

$$\mathscr{D} = I - \mathscr{A} : D(\mathscr{A}) \subset l_p \to l_p = l_p(\mathbb{Z}, X), \quad p \in [1, \infty],$$

был обратим, необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ *допускало экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{Z}$. *Если оператор* $\mathscr{D}$ *обратим, то оператор* $\mathscr{D}^{-1} \in \operatorname{End} l_p$ *определяется формулой*

$$(\mathscr{D}^{-1}f)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G(n,m)f(m), \quad n \in \mathbb{Z},\ f \in l_p,$$

где функция Грина $G : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$ *имеет вид*

$$G(n,m) = \begin{cases} \mathscr{U}(n,m)P(m), & m \le n; \\ -\mathscr{U}(n,m)Q(m), & m > n. \end{cases}$$

Следствие. *Для того чтобы дифференциальный оператор* $\mathscr{L} : D(\mathscr{L}) \subset L_p \to L_p = L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, *был обратим, необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов* $\mathscr{V}$ *допускало экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{R}$.

Это утверждение вытекает из теорем 3 и 4 с учетом того, что если семейство $\mathscr{U}(n,m) = \mathscr{V}(n,m)$, $m \le n$, $m,n \in \mathbb{Z}$, допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}$, то и семейство $\mathscr{V}$ также допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$. При этом определение экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ семейства $\mathscr{V}$ аналогично определению 1 (причем с несколько упрощающими это определение обстоятельствами, связанными с ограниченностью операторов семейства $\mathscr{V}$; см., например, [2, 3]).

Таким образом, из теоремы 4 следует, что участвующие в определении экспоненциальной дихотомии семейства $\mathscr{U}$ операторы играют важную роль при описании обратного оператора $\mathscr{D}^{-1}$ и, как увидим несколько позже, резольвенты оператора взвешенного сдвига $\mathscr{A}$.

Связь экспоненциальной дихотомии с обратимостью обыкновенных дифференциальных операторов (с разрешимостью неоднородных дифференциальных уравнений в пространстве непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций) установлена О. Перроном [4]. Дальнейшее исследование было продолжено А. Д. Майзелем [5], а для уравнений в банаховых пространствах с ограниченными операторными коэффициентами — Х. Массера и Х. Шеффером [6]. Однако полного аналога следствия теоремы 4 долго не удавалось получить даже для дифференциальных операторов с ограниченными операторными коэффициентами. Например, в монографии Ю. Л. Далецкого и М. Г. Крейна [7] (как, впрочем, и в [6]) аналог этого утверждения получен [7, гл. IV теорема 3.3′] при некоторых дополнительных ограничениях. Впервые такой результат установлен В. В. Жиковым [2], причем сразу для дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами.

Дихотомии для разностных уравнений в банаховом пространстве рассматривали С. Коффман и Х. Шеффер [8], делая упор на связях между дихотомией и допустимостью (в духе работы [6]). В статье В. Е. Слюсарчука [9] получен аналог теоремы 4 для ограниченной функции A, определенной на $\mathbb{Z}$, но ее значениями являются операторы из $\operatorname{End} X(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ (для каждого $n \in \mathbb{Z}$ рассматривалось свое банахово пространство $X(n)$). При доказательстве существенно использовалась ограниченность функции A. В монографии Д. Хенри [10, теорема 7.6.5] теорема 4 получена для разностного оператора $\mathscr{D}$ с необязательно ограниченной функцией $A : \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$. В обеих работах оператор $\mathscr{D}$ рассматривался в пространстве $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$. Следует отметить, что при доказательстве необходимости условий теоремы 7.6.5 из [10] имеется пробел, связанный с (неявным) предположением, что оператор $\mathscr{D}^{-1} \in \operatorname{End} l_\infty$ (если он существует) вполне определяется его заданием на финитных последовательностях из l_∞ (есть примеры ненулевых операторов из $\operatorname{End} l_\infty$, равных нулю на подпространстве c_0 убывающих на бесконечности последовательностей). Во всех этих работах применялись методы доказательства, аналогичные методам доказательства соответствующих результатов для дифференциальных операторов.

В данной статье учитываются методы доказательства, использующие инвариантность относительно вращений вокруг нуля спектра оператора взвешенного сдвига. Такое свойство позволяет разложить резольвенту оператора $\mathscr{A}$ в ряд Лорана в некоторой окрестности окружности $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ и на его основе доказать наличие экспоненциальной дихотомии у семейства $\mathscr{U}$ для обратимого оператора $\mathscr{D}$. Это свойство спектра оператора взвешенного сдвига было отмечено С. Парротом [11]. Именно на нем базируется изучение (см. [12, 13]) обратимости элементов из некоторых C^*-алгебр, порожденных динамическими системами на компактном многообразии, в терминах гиперболичности линейных расширений (некоторого аналога экспоненциальной дихотомии).

§ 1. О структуре резольвенты оператора взвешенного сдвига

В банаховом пространстве $l_p(\mathbb{Z}, X)$, $p \in [1, \infty]$, рассмотрим две группы изометрических операторов

$$(V(\gamma)x)(n) = \gamma^n x(n), \quad x \in l_p,\ n \in \mathbb{Z},\ \gamma \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\};$$

$$(S(k)x)(n) = x(n+k), \quad x \in l_p,\ k, n \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 1. *Спектр $\sigma(\mathscr{A})$ оператора взвешенного сдвига*

$$\mathscr{A} : D(\mathscr{A}) \subset l_p \to l_p, \quad p \in [1, \infty],$$

инвариантен относительно поворота вокруг нуля в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если $1 \overline{\in} \sigma(\mathscr{A})$, то $\sigma(\mathscr{A}) \cap \mathbb{T} = \oslash$ и имеют место равенства

$$V(\gamma^{-1})\mathscr{D}^{-1}V(\gamma) = V(\gamma^{-1})(I - \mathscr{A})^{-1}V(\gamma) = \gamma(\gamma I - \mathscr{A})^{-1} = \gamma R(\gamma, \mathscr{A}), \quad \gamma \in \mathbb{T}. \tag{5}$$

Доказательство. Непосредственно из определения оператора $\mathscr{A}$ следует, что $V(\gamma)D(\mathscr{A}) \subset D(\mathscr{A})$ для любого $\gamma \in \mathbb{T}$ и имеют место равенства

$$V(\gamma^{-1})\mathscr{A}V(\gamma) = \gamma^{-1}\mathscr{A}, \quad \gamma \in \mathbb{T}, \tag{6}$$

т. е. оператор $\mathscr{A}$ подобен операторам $\theta\mathscr{A}$, $\theta \in \mathbb{T}$. Следовательно, спектр оператора $\mathscr{A}$ инвариантен относительно поворотов комплексной плоскости вокруг нуля. Если $1 \overline{\in} \sigma(\mathscr{A})$, то из равенств (6) следуют равенства (5). Лемма доказана.

Следствие. *Если $1 \overline{\in} \sigma(\mathscr{A})$ (условие обратимости оператора $\mathscr{D} = I - \mathscr{A}$), то спектр $\sigma(\mathscr{A})$ оператора $\mathscr{A}$ представим в виде*

$$\sigma(\mathscr{A}) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}, \tag{7}$$

где $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(\mathscr{A}) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(\mathscr{A}) : |\lambda| > 1\}$ — непересекающиеся замкнутые множества.

Лемма 2. *Пусть оператор $\mathscr{B} \in \operatorname{End} l_p$, где $p \in [1, \infty)$, перестановочен со всеми операторами $V(\theta)$, $\theta \in \mathbb{T}$. Тогда он является оператором умножения*

$$(\mathscr{B}x)(n) = B(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z},\ x \in l_p,$$

на ограниченную операторнозначную функцию $B : \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$, причем $\|\mathscr{B}\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \|B(n)\| = \|B\|_\infty$.

Доказательство этого утверждения хорошо известно и приведено, например, в монографии [14, теорема 2.2.7].

Лемма 2 верна и для оператора $\mathscr{B}$, действующего в банаховом пространстве c_0 сходящихся к нулю на бесконечности последовательностей векторов из X. Однако утверждение леммы 2 перестает быть верным для пространства l_∞.

Соответствующий пример приведен в монографии [14, замечание 2.1.9]. Поэтому требуются некоторые дополнительные условия. Для их формулировки рассмотрим последовательность $\psi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, функций вида

$$\psi_n(k) = \begin{cases} 1, & |k| \leq n, \\ 2 - \frac{|k|}{n}, & n < |k| \leq 2n, \\ 0, & |k| > 2n. \end{cases}$$

В дальнейшем эту последовательность будем называть аппроксимативной единицей. Через Ψ_n, $n \geq 1$, обозначим оператор умножения в l_p на функцию ψ_n.

Лемма 3. *Пусть оператор $\mathscr{B} \in \operatorname{End} l_\infty$ обладает следующими двумя свойствами:*

1) $\lim\limits_{m\to\infty} \|\Psi_m \mathscr{B} - \mathscr{B}\Psi_m\| = 0$,

2) *оператор $\mathscr{B}$ перестановочен со всеми операторами $V(\theta)$, $\theta \in \mathbb{T}$.*

Тогда $\mathscr{B}$ является оператором умножения на ограниченную функцию $B : \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$ и $\|\mathscr{B}\| = \|B\|_\infty$.

Доказательство. Ясно, что для всех $m \geq n$ имеют место равенства

$$(\mathscr{B}x)(n) = \psi_m(n)(\mathscr{B}x)(n).$$

Поэтому из свойства 1 получаем, что

$$(\mathscr{B}x)(n) = \lim_{m\to\infty} (\mathscr{B}\Psi_m x)(n).$$

Поскольку $\Psi_m x \in c_0$ для любых $m \geq 1$, $x \in l_\infty$, то оператор $\mathscr{B}$ полностью определяется своими значениями на подпространстве c_0. В силу того же свойства 1 это подпространство инвариантно относительно $\mathscr{B}$ и поэтому из комментария после леммы 2 следует, что оператор $\mathscr{B}$ является оператором умножения на некоторую ограниченную функцию $B : \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$. Лемма доказана.

Определение 2. Если для оператора $\mathscr{B} \in \operatorname{End} l_p$, $p \in [1, \infty]$, выполнено условие 1 леммы 3, то будем говорить, что он *перестановочен с аппроксимативной единицей* (ψ_n).

Замечание 1. Непосредственно из определения 2 следует, что операторы из $\operatorname{End} l_p$, перестановочные с аппроксимативной единицей (ψ_n), образуют наполненную замкнутую подалгебру из банаховой алгебры $\operatorname{End} l_p$, которую обозначим через $\operatorname{End}(l_p, (\psi_n))$. Наполненность этой подалгебры означает, что если оператор $\mathscr{B} \in \operatorname{End}(l_p, (\psi_n))$ обратим в $\operatorname{End} l_p$, то $\mathscr{B}^{-1} \in \operatorname{End}(l_p, (\psi_n))$. Отметим, что вся группа изометрических операторов $S(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, сдвигов последовательностей из l_p принадлежит подалгебре $\operatorname{End}(l_p, (\psi_n))$.

Лемма 4. *Резольвента $R(\lambda, \mathscr{A}) = (\lambda I - \mathscr{A})^{-1}$ оператора взвешенного сдвига $\mathscr{A}$ перестановочна с аппроксимативной единицей (ψ_n), причем предельное соотношение*

$$\|\Psi_n R(\lambda, \mathscr{A}) - R(\lambda, \mathscr{A})\Psi_n\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

выполняется равномерно на компактных подмножествах из резольвентного множества $\rho(\mathscr{A})$ оператора $\mathscr{A}$.

Доказательство. Поскольку $\Psi_n D(\mathscr{A}) \subset D(\mathscr{A})$ при всех $n \geq 1$, то оператор

$$\Psi_n \mathscr{A} - \mathscr{A}\Psi_n : D(\mathscr{A}) \subset l_p \to l_p$$

определен на $D(\mathscr{A})$. Он представим в виде

$$\Psi_n\mathscr{A} - \mathscr{A}\Psi_n = \widetilde{\Psi}_n\mathscr{A} : D(\mathscr{A}) \subset l_p \to l_p,$$

где $(\widetilde{\Psi}_n x)(k) = (\psi_n(k) - \psi_n(k-1))x(k)$, $x \in l_p$, $k \in \mathbb{Z}$, и, следовательно, имеют место равенства

$$\Psi_n(\mathscr{A} - \lambda I) - (\mathscr{A} - \lambda I)\Psi_n = \widetilde{\Psi}_n\mathscr{A}, \quad n \geq 1, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Умножая слева и справа обе части этих равенств на операторы $R(\lambda, \mathscr{A})$, $\lambda \in \rho(\mathscr{A})$, получим

$$R(\lambda,\mathscr{A})\Psi_n - \Psi_n R(\lambda,\mathscr{A}) = \widetilde{\Psi}_n R(\lambda,\mathscr{A})\mathscr{A}R(\lambda,\mathscr{A}) = \widetilde{\Psi}_n(R(\lambda,\mathscr{A}) - \lambda R(\lambda,\mathscr{A})^2).$$

Поскольку $\|\widetilde{\Psi}_n\| = \max\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_n(k) - \psi_n(k-1)| = 1/n$, для любого компакта K из $\rho(\mathscr{A})$ верны оценки

$$\sup_{\lambda\in K} \|R(\lambda,\mathscr{A})\Psi_n - \Psi_n R(\lambda,\mathscr{A})\| \leq n^{-1} \sup_{\lambda\in K} \|R(\lambda,\mathscr{A}) - \lambda R(\lambda,\mathscr{A})^2\|.$$

Из этих оценок следует доказываемое утверждение. Лемма доказана.

В дальнейшем через $\mathbb{T}(r)$, где $r > 0$, будет обозначаться окружность $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r\}$ (ясно, что $\mathbb{T}(1) = \mathbb{T}$). Интегрирование по этой окружности выполняется в направлении положительного обхода, т. е. против часовой стрелки.

Лемма 5. *Пусть оператор* $\mathscr{D} = I - \mathscr{A} : D(\mathscr{A}) \subset l_p \to l_p$, $p \in [1,\infty]$, *обратим. Тогда коэффициенты Фурье* $\Phi_k \in \operatorname{End} l_p$, $k \in \mathbb{Z}$, *функции* $\Phi : \mathbb{T} \to \operatorname{End} l_p$, *определенной формулой*

$$\Phi(\gamma) = \gamma(\gamma I - \mathscr{A})^{-1} = \gamma R(\gamma, \mathscr{A}), \quad \gamma \in \mathbb{T},$$

могут быть представлены в виде

$$\Phi_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}(r)} \lambda^{-k} R(\lambda,\mathscr{A})\, d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

где r — *любое число из промежутка* $(r_{\text{int}}, r_{\text{out}})$, $r_{\text{int}} = \max\{|z|;\, z \in \sigma_{\text{int}}\}$, $r_{\text{out}} = \min\{|z|; z \in \sigma_{\text{out}}\}$. *Кроме того, операторы* Φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, *обладают следующими свойствами:*

1) *множество значений* $\operatorname{Im}\Phi_k$ *каждого оператора* Φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, *содержится в* $D(\mathscr{A})$, *и*

$$\mathscr{A}\Phi_k = \Phi_k\mathscr{A} \quad \forall k \in \mathbb{Z};$$

2) *оператор* Φ_0 *совпадает с проектором Рисса* $\mathscr{P} = P(\sigma_{\text{int}}, \mathscr{A})$, *построенным по спектральному множеству* σ_{int};

3) $\Phi_k = \mathscr{A}^{-k}\Phi_0$ $\forall k \leq 0$;

4) $-\mathscr{A}\Phi_1 = I - \Phi_0 = I - \mathscr{P}$ — *дополнительный к* $\mathscr{P}$ *проектор, совпадающий с* $Q = P(\sigma_{\text{out}}, \mathscr{A})$, *причем*

$$\Phi_k = (\Phi_1)^k, \quad k \geq 1;$$

5) $\Phi_i\Phi_j = \Phi_j\Phi_i = 0$ *для любых* $i \geq 0$, $j \leq -1$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что $\mathbb{T} \subset \rho(\mathscr{A})$. Из голоморфности резольвенты оператора $\mathscr{A}$ в окрестности окружности $\mathbb{T}$ вытекает, что функция $\Phi : \mathbb{T} \to \operatorname{End} l_p$, определенная на компактной группе $\mathbb{T}$, имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$\Phi(\gamma) = \gamma R(\gamma,\mathscr{A}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi_k\gamma^k, \quad \gamma \in \mathbb{T}. \tag{9}$$

Коэффициенты Фурье Φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, функции Φ по определению имеют вид

$$\Phi_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(e^{it})e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it}(e^{it}I - \mathscr{A})^{-1}e^{-ikt}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}(1)} \lambda^{-k}R(\lambda,\mathscr{A})d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку все окружности $\mathbb{T}(r)$, $r \in (r_{\mathrm{int}}, r_{\mathrm{out}})$ лежат в $\rho(\mathscr{A})$ и находятся в одной компоненте связности с $\mathbb{T}(1)$, значение последнего интеграла не изменится, если окружность $T(1)$ заменить любой из окружностей $\mathbb{T}(r)$, $r \in (r_{\mathrm{int}}, r_{\mathrm{out}})$. Таким образом, получена формула (8).

Свойство $\operatorname{Im}\Phi_k \subset D(\mathscr{A})$ следует из замкнутости оператора $\mathscr{A}$ и формулы (8). Из нее же получим перестановочность операторов Φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, с $\mathscr{A}$.

При $k = 0$ формула (8) определяет проектор Рисса $\mathscr{P} = P(\sigma_{\mathrm{int}}, \mathscr{A})$. Здесь и далее используются свойства функционального исчисления для замкнутых линейных операторов, изложенные, например, в [15, гл. VII, § 9]. Именно они обеспечивают выполнение свойств 3–5. При этом используется тот факт, что $\Phi_k = f_k(\mathscr{A})$, $k \in \mathbb{Z}$, где голоморфные функции f_k, $k \in \mathbb{Z}$, определены в некоторой окрестности $\sigma(\mathscr{A})$, причем

$$f_k(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{-k}, & \lambda \in \sigma_{\mathrm{int}} \\ 0, & \lambda \in \sigma_{\mathrm{out}}, \end{cases} \quad k \le 0, \quad f_k(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{-k}, & \lambda \in \sigma_{\mathrm{out}} \\ 0, & \lambda \in \sigma_{\mathrm{int}}, \end{cases} \quad k \ge 1.$$

Например, свойство 5 следует из равенств

$$\Phi_i\Phi_j = f_i(\mathscr{A})f_j(\mathscr{A}) = (f_i f_j)(\mathscr{A}) = 0, \quad i \ge 0,\ j \le -1.$$

Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть оператор $\mathscr{D} = I - \mathscr{A} : D(\mathscr{A}) \subset l_p \to l_p$, $p \in [1,\infty]$, обратим. Тогда операторы $\gamma R(\gamma,\mathscr{A})$, $\gamma \in \mathbb{T}$, допускают представление в виде абсолютно сходящихся рядов вида*

$$\Phi(\gamma) = \gamma R(\gamma,\mathscr{A}) = \gamma(\gamma I - \mathscr{A})^{-1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma^k \mathscr{B}_k S(k), \quad \gamma \in \mathbb{T}, \tag{10}$$

где $\mathscr{B}_k \in \operatorname{End} l_p$ — оператор умножения в l_p на некоторую ограниченную функцию $B_k : \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$ и $(S(k)x)(n) = x(n+k)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l_p$, — оператор сдвига на число k.

Доказательство. Рассмотрим формулы (8) и (9). Умножая обе части равенства (8), где $r = 1$, слева на оператор $V(\theta)$ и справа на $V(\theta^{-1})$, $\theta \in \mathbb{T}$, и учитывая, что $V(\theta)R(\lambda,\mathscr{A})V(\theta^{-1}) = \theta^{-1}R(\lambda\theta^{-1},\mathscr{A})$ (см. лемму 1), получаем

$$V(\theta)\Phi_k V(\theta^{-1}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \lambda^{-k}\theta^{-1}R(\lambda\theta^{-1},\mathscr{A})\,d\lambda$$

$$= \frac{\theta^{-k}}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \gamma^{-k}R(\gamma,\mathscr{A})\,d\gamma = \theta^{-k}\Phi_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Представим операторы Φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, в виде $\Phi_k = \mathscr{B}_k S(k)$, где $\mathscr{B}_k \in \operatorname{End} l_p$. Ясно, что $\|\mathscr{B}_k\| = \|\Phi_k\|$ и $\mathscr{B}_k = \Phi_k S(-k)$. Учитывая (11) и то, что

$$V(\theta)S(-k)V(\theta^{-1}) = \theta^k S(-k)\ \forall k \in \mathbb{Z}\ \forall \theta \in \mathbb{T},$$

приходим к равенствам

$$V(\theta)\mathscr{B}_k V(\theta^{-1}) = V(\theta)\Phi_k V(\theta^{-1})V(\theta)S(-k)V(\theta^{-1}) \\ = \Phi_k S(-k) = \mathscr{B}_k, \quad k \in \mathbb{Z},\ \theta \in \mathbb{T}.$$

Следовательно, операторы $\mathscr{B}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, перестановочны со всеми изометриями $V(\theta)$, $\theta \in \mathbb{T}$. Тогда из леммы 2 (для $p \in [1, \infty)$) получаем, что операторы $\mathscr{B}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, являются операторами умножения на некоторые ограниченные функции $B_k : \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$ и $\|\mathscr{B}_k\| = \|B_k\|_\infty$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. Этот же факт верен и для $p = \infty$, так как для операторов выполнено условие 1 леммы 3. Его выполнение следует из представления операторов Φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, в виде (8), леммы 4, равенств $\mathscr{B}_k = \Phi_k S(-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, и замечания 1.

Замечание 2. Норма операторов $\mathscr{B}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, участвующих в теореме 5, не зависит от выбора пространства l_p, $p \in [1, \infty]$, и

$$\|\mathscr{B}_k\| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|B_k(n)\| = \|B_k\|_\infty \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 6. *Если оператор $\mathscr{D}$ обратим и число $r > 0$ удовлетворяет условию $|1 - r|\, \|\mathscr{D}^{-1}\| < 1$, то $\mathbb{T}(r) \subset \rho(\mathscr{A})$ и для всех $z \in \mathbb{T}(r)$ верны оценки*

$$\|R(z, \mathscr{A})\| \le \frac{\|\mathscr{D}^{-1}\|}{1 - |1 - r|\, \|\mathscr{D}^{-1}\|}, \quad z \in \mathbb{T}(r). \tag{12}$$

Доказательство. Число z из $\mathbb{T}(r)$ запишем в виде $z = |z|\theta = r\theta$, где $\theta \in \mathbb{T}$. Тогда из представления оператора $zI - \mathscr{A}$ в виде (см. лемму 1)

$$zI - \mathscr{A} = \theta I - \mathscr{A} + (|z|\theta - \theta)I = \theta V(\theta^{-1})\mathscr{D}V(\theta) + \theta(r - 1)I \\ = \theta V(\theta^{-1})(\mathscr{D} + (r - 1)I)V(\theta)$$

следует, что оператор $zI - \mathscr{A}$ обратим, причем

$$\|(zI - \mathscr{A})^{-1}\| = \|\theta^{-1}V(\theta^{-1})(\mathscr{D} + (r - 1)I)^{-1}V(\theta)\| = \|(\mathscr{D} + (r - 1)I)^{-1}\| \\ = \|\mathscr{D}^{-1}(I - (1 - r)\mathscr{D}^{-1})^{-1}\| \le \|\mathscr{D}^{-1}\|(1 - |1 - r|\|\mathscr{D}^{-1}\|)^{-1}.$$

Лемма доказана.

В следующей теореме символом $\|\mathscr{C}\|_p$ обозначается норма оператора $\mathscr{C} \in \operatorname{End} l_p$ в $\operatorname{End} l_p$; при этом с учетом замечания 2 норма $\|\mathscr{B}_k\|$ операторов $\mathscr{B}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, пишется без использования индекса p.

Теорема 6. *Пусть разностный оператор $\mathscr{D} = I - \mathscr{A}$ обратим в одном из банаховых пространств l_p, $p \in [1, \infty]$. Тогда он обратим в любом из пространств l_q, $q \in [1, \infty]$, и для операторов $\mathscr{B}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, из представления* (10) *резольвенты оператора $\mathscr{A}$ имеют место следующие оценки:*

$$\|\mathscr{B}_k\| \le \|\mathscr{D}^{-1}\|_p, \quad k \in \mathbb{Z}; \tag{13}$$

$$\|\mathscr{B}_k\| \le 2\|\mathscr{D}^{-1}\|_p \left(1 + \frac{1}{2\|\mathscr{D}^{-1}\|_p}\right)^{1-k}, \quad k \ge 1; \tag{14}$$

$$\|\mathscr{B}_k\| \le 2\|\mathscr{D}^{-1}\|_p \left(1 - \frac{1}{2\|\mathscr{D}^{-1}\|_p}\right)^{1-k}, \tag{15}$$

если $\|\mathscr{D}^{-1}\|_p > 1$, $k \le -1$, *и* $\mathscr{B}_k = 0$, *если* $\|\mathscr{D}^{-1}\|_p \le 1$, $k \le -1$. *Кроме того,*

$$\|\mathscr{D}^{-1}\|_q \le 8\|\mathscr{D}^{-1}\|_p - \|\mathscr{D}^{-1}\|_p + 1. \tag{16}$$

Доказательство. Операторы $\mathscr{B}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, представим в виде $\mathscr{B}_k = \Phi_k S(-k)$ и отметим, что $\|\mathscr{B}_k\| = \|\Phi_k\|$. Поскольку нормы коэффициентов Фурье функции Φ (см. лемму 5) не превосходят $\max\limits_{\gamma\in\mathbb{T}} \|\Phi(\gamma)\| = \|\mathscr{D}^{-1}\|$ (см. лемму 1), то верны оценки (13). Из оценки (12) и представления (8) при любом $r \in (r_{\mathrm{int}}, r_{\mathrm{out}})$ получаем оценки норм операторов $\mathscr{B}_k$:

$$\|\mathscr{B}_k\| = \|\Phi_k\| \le \frac{2\pi r}{2\pi}\frac{1}{r^k} \max_{\lambda\in\mathbb{T}(r)} \|R(\lambda, \mathscr{A})\|_p \le \frac{1}{r^{k-1}} \frac{\|\mathscr{D}^{-1}\|_p}{1 - |1-r|\|\mathscr{D}^{-1}\|_p}. \tag{17}$$

При $k \ge 1$ доказываемые оценки (14) получаются из (17) при $r = 1 + \frac{1}{2}\|\mathscr{D}^{-1}\|_p$. Если $k \le -1$ и $\|\mathscr{D}^{-1}\|_p > 1$, то оценки (15) следуют из (17) при $r = 1 - \frac{1}{2}\|\mathscr{D}^{-1}\|_p$. Если же $\|\mathscr{D}^{-1}\|_p \le 1$, то $|1-r|\|\mathscr{D}^{-1}\|_p < 1$ при $r \in (0,1)$ и поэтому при $0 < r \to 0$, $k \le -1$ из (17) вытекает, что $\mathscr{B}_k = 0$ при всех $k \le -1$.

Оценка (16) выводится из представления оператора $\mathscr{D}^{-1}$ в виде (10), где $\gamma = 1$, неравенства

$$\|\mathscr{D}^{-1}\|_q \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\mathscr{B}_k\|$$

и оценок (13)–(15). Теорема доказана.

Важно отметить, что в полученных оценках норм операторов $\mathscr{B}_k$ и величины $\|\mathscr{D}^{-1}\|_q$ (в отличие от статьи [16]) не участвует число обусловленности оператора $\mathscr{D}$; в [16] требовалась ограниченность рассматриваемого оператора. Впрочем, это требование присутствует во всех известных нам работах по оценкам матричных элементов обратных операторов.

§ 2. Доказательство теоремы 4

Вначале предположим, что оператор $\mathscr{D} = I - \mathscr{A} : D(\mathscr{A}) \subset l_p \to l_p$ обратим. Обратимость оператора $\mathscr{D}$ позволяет воспользоваться результатами предыдущего параграфа. Можно сказать, что доказываемое свойство экспоненциальной дихотомии семейства эволюционных операторов $\mathscr{U} = \{\mathscr{U}(n,m);\ n \le m,\ n,m \in \mathbb{Z}\}$ находится с помощью расшифровки полученных в лемме 5 и теоремах 5, 6 результатов.

Рассмотрим проекторы $\mathscr{P} = P(\sigma_{\mathrm{int}}, \mathscr{A}) = \Phi_0$, $Q = P(\sigma_{\mathrm{out}}, \mathscr{A}) = I - \mathscr{P}$ из леммы 5. Поскольку $\Phi_0 = \mathscr{B}_0$, из теоремы 5 следует, что проекторы $\mathscr{P}$ и Q являются операторами умножения на ограниченные проекторнозначные функции $P : \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$ и $Q = I - P$. Докажем, что они порождают экспоненциальную дихотомию семейства $\mathscr{U}$ на $\mathbb{Z}$.

Так, свойство 1 из определения 1 вытекает из свойства 1 леммы 5, рассмотренного для $k = 0$, свойство 2 из определения 1 непосредственно следует из свойства 4 леммы 5. Наконец, оценки 3 из определения 1 следуют из представления операторов Φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, полученных в свойствах 3 и 4 из леммы 5, формулы (10) и оценок (13)–(15). Таким образом, семейство $\mathscr{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}$.

Пусть теперь семейство $\mathscr{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}$ и P, Q — проекторнозначные функции, порождающие эту дихотомию.

Вначале докажем инъективность оператора $\mathscr{D}$. Допустим, что $x \in l_p$ принадлежит ядру $\operatorname{Ker}\mathscr{D}$ оператора $\mathscr{D}$, т. е. $\mathscr{D}x = 0$. Тогда имеют место равенства (см. (2))

$$x(n) = \mathscr{U}(n,m)x(m), \quad m \le n,\ m,n \in \mathbb{Z}.$$

Применяя к обеим частям проекторы $P(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, и используя свойство 1 из определения 1, получаем, что

$$P(n)x(n) = P(n)\mathscr{U}(n,m)x(m) = \mathscr{U}(n,m)P(m)x(m).$$

Теперь из оценок (3) следует, что

$$\|P(n)x(n)\| \le M_1 q_1^{n-m}, \quad n \ge m.$$

Поскольку m — произвольное число из $\mathbb{Z}$, удовлетворяющее условию $m \le n$, то $P(n)x(n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Таким же образом из оценки (4) получаем, что $Q(m)x(m) = 0$, $m \in \mathbb{Z}$, и поэтому $x(n) = (P(n) + Q(n))x(n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

Для доказательства сюръективности оператора $\mathscr{D}$ достаточно установить, что для любой последовательности $f \in l_p$ последовательность

$$x(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G(n,m)f(m), \quad n \in \mathbb{Z},$$

принадлежит $D(\mathscr{A})$ и $\mathscr{D}x = f$. Тем самым будет определен вид обратного оператора.

Из определения функции Грина G следует, что $G(n,m)f(m) \in D(\mathscr{A}(n+1))$ для всех $m,n \in \mathbb{Z}$, а из оценок (3) и (4) получаем, что $x \in l_p$. Осталось проверить, что $x \in D(\mathscr{A})$ и $\mathscr{D}x = f$. Для этого последовательность x представим в виде

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \mathscr{U}(n,m)P(m)f(m) - \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathscr{U}(n,m)Q(m)f(m).$$

Тогда доказываемые свойства следуют из равенств

$$\begin{aligned} x(n) - A(n)x(n-1) &= \sum_{m=-\infty}^{n} \mathscr{U}(n,m)P(m)f(m) - \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathscr{U}(n,m)Q(m)f(m) \\ &- \sum_{m=-\infty}^{n-1} A(n)\mathscr{U}(n-1,m)P(m)f(m) + \sum_{m=n}^{\infty} A(n)\mathscr{U}(n-1,m)Q(m)f(m) \\ &= P(n)f(n) + Q(n)f(n) = f(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 3. Об операторах взвешенного сдвига с постоянными коэффициентами

Всюду считается, что $A(n) = A_0 : D(A_0) \subset X \to X$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 7. *Для того чтобы разностный оператор*

$$(\mathscr{D}x)(n) = x(n) - A_0x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z},\ x \in l_p = l_p(\mathbb{Z}, X),$$

был обратим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sigma(A_0) \cap \mathbb{T} = \varnothing. \tag{18}$$

При выполнении этого условия обратный оператор имеет вид

$$(\mathscr{D}^{-1}f)(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G_0(n-m)f(m) = (G_0 * f)(n), \tag{19}$$

где $f \in l_p$, $n \in \mathbb{Z}$. *Функция* $G_0 : \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$ *определяется равенствами*

$$G_0(k) = \begin{cases} A_0^k P, & k \geq 0; \\ -B_0^{-k} Q, & k \leq -1, \end{cases} \tag{20}$$

в которых $P = P(\sigma_{\mathrm{int}}, A_0)$, $Q = I - P = P(\sigma_{\mathrm{out}}, A_0)$, $\sigma_{\mathrm{int}} = \{z \in \sigma(A_0) : |z| < 1\}$, $\sigma_{\mathrm{out}} = \sigma(A_0) \setminus \sigma_{\mathrm{int}}$ *и оператор* $B_0 \in \operatorname{End} X$ *однозначно определяется из условий:* $B_0 x = 0$, $x \in \operatorname{Im} P$, $A_0 B_0 y = B_0 A_0 y = y$, $y \in D(A_0) \cap \operatorname{Im} Q$ *(т. е.* B_0 *совпадает на* $\operatorname{Im} Q$ *с обратным к сужению* A_0 *на* $\operatorname{Im} Q \cap D(A_0)$*).*

Доказательство. Ввиду теоремы 6 без ограничения общности будем считать, что $p = \infty$.

Пусть оператор $\mathscr{D} : D(\mathscr{A}) \subset l_\infty \to l_\infty$ обратим. Из его инъективности следует, что $\operatorname{Ker}(I - A_0) = \{0\}$. Действительно, если $x_0 \in \operatorname{Ker}(I - A_0)$, то стационарная последовательность $x(n) = x_0$, $n \in \mathbb{Z}$, из l_∞ принадлежит $\operatorname{Ker} \mathscr{D}$ и, значит, $x_0 = 0$.

Сюръективность оператора $I - A_0$ следует из сюръективности оператора $\mathscr{D}$. Если y_0 — произвольный вектор из X, то рассмотрим стационарную последовательность $y(n) = y_0$, $n \in \mathbb{Z}$, и пусть $x \in l_\infty$ — решение уравнения $\mathscr{D}x = y$. Тогда решением того же уравнения является последовательность $S(1)x$ и поэтому (в силу единственности решения) x — стационарная последовательность, т. е. $x(n) = x_0 \in X$, $n \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $(I - A_0)x_0 = y_0$. Таким образом, $1 \overline{\in} \sigma(A_0)$. Теперь из леммы 1 следует, что выполнено условие (18).

Пусть теперь выполнено условие (18) и $P = P(\sigma_{\mathrm{int}}, A_0)$, $Q = P(\sigma_{\mathrm{out}}, A_0)$ — проекторы Рисса, построенные по спектральным множествам σ_{int} и σ_{out}. Тогда равенствами (20) корректно определяется суммируемая функция $G_0 : \mathbb{Z} \to \operatorname{End} X$. Непосредственная проверка (аналогичная той, что была проделана при доказательстве теоремы 4) показывает, что формула (19) определяет обратный для $\mathscr{D}$ оператор.

Разумеется, пара постоянных функций $P(n) = P$, $Q(n) = Q$, $n \in \mathbb{Z}$, порождает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}$. Следует только отметить, что в данном случае $\mathscr{U}(n,m) = A_0^{n-m}$, $n \geq m$, $n, m \in \mathbb{Z}$, и функция Грина $G(n,m) = G_0(n-m)$, $n, m \in \mathbb{Z}$, зависит от разности аргументов. Теорема доказана.

Следствие. $\sigma(\mathscr{A}) = \mathbb{T}\sigma(A_0) = \{\gamma\lambda : \gamma \in \mathbb{T},\ \lambda \in \sigma(A_0)\}$.

Отметим, что утверждение теоремы 7 в случае $A_0 \in \operatorname{End} X$, $\dim X < \infty$ получено в статье [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
2. *Жиков В. В.* Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1976. Т. 40, № 6. С. 1380–1408.
3. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его приложения. 1996. Т. 30, № 3. С. 1–11.
4. *Perron O.* Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Z. 1930. Bd 32. N 5. S. 703–728.

5. *Майзель А. Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений // Тр. Уральск. политехн. ин-та. Сер. мат. 1954. № 51. С. 20–50.

6. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.

7. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

8. *Coffman S. V. Schaffer J. J.* Dichotomies for linear difference equations // Math. Ann. 1967. V. 172. P. 139–166.

9. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35, № 1. С. 109–115.

10. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.

11. *Parrot S.* Weighted translation operators // Dissert. Abstrs. 1965. V. 26, N 5. P. 2781.

12. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.

13. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Минск: Изд-во «Университетское», 1988.

14. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные операторы. Воронеж: Изд-во Воронежск. ун-та, 1990.

15. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. Т. 1.

16. *Баскаков А. Г.* Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов // Изв. Акад. Наук. 1997. Т. 61, № 6. С. 3–26.

17. *Слюсарчук В. Е.* О представлении ограниченных решений линейных дискретных систем // Укр. мат. журн. 1987. Т. 39, № 2. С. 210–215.

Статья поступила 10 февраля 2000 г., окончательный вариант — 16 января 2001 г.

Баскаков Анатолий Григорьевич
Воронежский гос. университет, Университетская пл., 1, Воронеж 394693
pmmmmio@main.vsu.ru

Пастухов Алексей Иванович
Воронежский гос. университет, Университетская пл., 1, Воронеж 394693