Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 517.55

ВСЯКАЯ ГОЛОМОРФНО–ОДНОРОДНАЯ ТРУБКА В $\mathbf{C}^2$ ИМЕЕТ АФФИННО–ОДНОРОДНОЕ ОСНОВАНИЕ

А. В. Лобода

Аннотация: Изучаются несферические трубчатые гиперповерхности двумерного комплексного пространства, удовлетворяющие условию локальной однородности. Доказано, что в аналитическом случае голоморфная однородность таких поверхностей равносильна их аффинной однородности. Доказательство опирается на свойства голоморфных инвариантов трубчатых гиперповерхностей, построенных на основе мозеровской нормальной формы. Библиогр. 5.

Настоящая заметка посвящена изучению голоморфно-однородных поверхностей в комплексных пространствах. Мы рассматриваем здесь только трубчатые вещественно-аналитические гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$.

Напомним, что *трубчатой поверхностью* (короче, *трубкой*) в пространстве $\mathbb{C}^n$ с координатами $z = x + iy$ $(z = (z_1, \dots, z_n))$ называется множество вида $M = \Gamma + i\mathbb{R}^n_y$, где Γ — поверхность в $\mathbb{R}^n_x$, называемая *основанием трубки* M.

Голоморфная однородность поверхностей понимается в этой статье в локальном смысле: для каждой пары точек такой поверхности M найдется биголоморфное отображение окрестности первой точки в окрестность второй, переводящее M в себя, а выделенные точки — одну в другую.

Имеется тесная связь понятий трубчатости и однородности. Например, любая трубка над аффинно-однородной поверхностью $\Gamma \subset \mathbb{R}^n_x$ является голоморфно-однородной поверхностью в $\mathbb{C}^n_z$.

В [1] изучались трубки над аналитическими аффинно-однородными плоскими кривыми. Все такие кривые описаны в рамках аффинной дифференциальной геометрии (см. [2, 3]). Локально каждая из них является аффинным образом одной из следующих линий:

1a) $x_2 = x_1^s$ $(-1 \leq s < 1)$;

1b) $x_2 = \ln x_1$;

1c) $x_2 = x_1 \ln x_1$;

1d) $\ln(x_1^2 + x_2^2) = 2a \operatorname{arctg}(\frac{x_2}{x_1})$ $(0 \leq a < \infty)$.

На основании изучения голоморфных инвариантов трубчатых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$ можно доказать, что несферические трубки над различными кривыми (1) голоморфно неэквивалентны друг другу. В то же время трубки над аффинно-различными кривыми $x_2 = \ln x_1$ и $x_2 = \sqrt{x}_1$ из списка (1) сферичны, т. е. голоморфно эквивалентны сфере, а следовательно, и друг другу. Отметим еще две интересные кривые, найденные в [4]: $x_2 = \ln(\sin x_1)$ и $x_2 = \ln(\operatorname{sh} x_1)$.

© 2001 Лобода А. В.

Трубчатые поверхности над этими линиями сферичны, а значит, голоморфно-однородны. Сами же эти кривые аффинно-однородными не являются.

Основной результат настоящей статьи — доказательство невозможности такого явления в несферическом случае. Более точно, справедлива

Теорема. *Несферическая трубчатая гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$ над аналитическим основанием γ голоморфно-однородна тогда и только тогда, когда аффинно-однородно ее основание.*

С учетом того, что сфера допускает трубчатую реализацию с однородным основанием (например, $x_2 = \ln x_1$), можно переформулировать эту теорему в виде утверждения, вынесенного в название этой статьи.

Доказательство теоремы. Пусть основание γ трубчатой гиперповерхности M в $\mathbb{C}^2$ задано (вблизи некоторой точки $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2_x$) уравнением

$$x_2 = \alpha(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(k)}(b_1)}{k!}(x_1 - b_1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x_1 - b_1)^k. \tag{2}$$

Этим же уравнением задается и трубка над γ. Для таких поверхностей вырождение по Леви, как несложно проверить, равносильно обращению в нуль второй производной функции $\alpha(t)$. Тем самым трубчатая поверхность (2), однородная и вырожденная по Леви, имеет основанием аффинно-однородную прямую линию.

Далее мы будем рассматривать невырожденные трубки. Это означает, что для точек кривой (2) выполняется неравенство $\alpha''(t) \neq 0$.

Подвергнем уравнение (2) аффинному преобразованию

$$x_1 = b_1 + x_1^* - \frac{\alpha_3}{4\alpha_2} x_2^*, \quad x_2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1^* + \left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1 \alpha_3}{4\alpha_2}\right) x_2^*.$$

Тогда вместо (2) получим уравнение вида

$$x_2 = 2x_1^2 + \lambda_4 x_1^4 + \lambda_5 x_1^5 + \lambda_6 x_1^6 + \dots. \tag{3}$$

Приведя уравнение трубчатой гиперповерхности (3) к нормальной форме Мозера [5], можно выразить голоморфные инварианты этой поверхности через коэффициенты λ_k. Например, инвариантным свойством гиперповерхности M в $\mathbb{C}^2$ является равенство (или неравенство) нулю первого мозеровского коэффициента h_{420}. Из [1] следует, что h_{420} пропорционален выражению $(\lambda_6 - \frac{4}{5}\lambda_4^2)$.

Для однородной поверхности M коэффициент h_{420} либо тождественно равен нулю (и тогда M сферична), либо ни в одной точке не обращается в нуль. Обсуждая далее только несферические поверхности, имеем $\lambda_6 - \frac{4}{5}\lambda_4^2 \neq 0$.

В [1] получена формула для одного из голоморфных инвариантов несферических трубок над кривыми (3). Здесь нам потребуются два таких инварианта:

$$\varkappa_0 = \frac{\lambda_4}{|\lambda_6 - \frac{4}{5}\lambda_4^2|^{1/2}}; \quad \varkappa_1 = \frac{(\lambda_7 - \frac{15}{7}\lambda_4\lambda_5)^2}{|\lambda_6 - \frac{4}{5}\lambda_4^2|^{5/2}} \operatorname{sgn}\left(\lambda_6 - \frac{4}{5}\lambda_4^2\right). \tag{4}$$

Для голоморфно-однородных трубчатых поверхностей величины $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ не зависят от точки $(b_1, \alpha(b_1))$ кривой γ. В то же время коэффициенты λ_k уравнения (3) зависят от определяющей функции кривой γ и точки на ней. Например, вводя функцию

$$\mu(t) = \frac{\alpha'''(t)}{\alpha''(t)},$$

имеем

$$\lambda_4(t) = A_1\left(\mu'(t) - \frac{2}{3}\mu^2(t)\right), \tag{5}$$

где A_1 — некоторая положительная константа. Аналогично

$$\lambda_5 = A_2\left(\mu'' - 2\mu'\mu + \frac{4}{9}\mu^3\right), \tag{6}$$

$$h_{420} = A_3\left(\lambda_6 - \frac{4}{5}\lambda_4^2\right) = B_3(\mu''' - 3\mu''\mu - (\mu')^2 + 2\mu'\mu^2), \tag{7}$$

$$\left(\lambda_7 - \frac{15}{7}\lambda_4\lambda_5\right) = B_4\left(\frac{d}{dt}(h_{420}) - \frac{4}{3}\mu h_{420}\right). \tag{8}$$

Здесь и далее все A_k и B_k — положительные константы.

Доказательство основной теоремы, приводимое ниже, основано на дифференциально-алгебраических свойствах выражений (5)–(8). Например, несложно убедиться в справедливости следующих формул:

$$\lambda_5 = A_5\left(\frac{d}{dt}(\lambda_4) - \frac{2}{3}\mu\lambda_4\right), \tag{9}$$

$$h_{420} = A_6\left(\frac{d^2}{dt^2}(\lambda_4) - \frac{5}{3}\mu\frac{d}{dt}(\lambda_4) + \frac{1}{3}\mu'\lambda_4\right). \tag{10}$$

Равенством (9) мы воспользуемся позднее. А вот из (10) при $\lambda_4 = 0$ получаем тождество $h_{420} = 0$, т. е. сферичность поверхности. Тем самым для однородных несферических трубчатых поверхностей λ_4 не обращается в нуль.

Опираясь на формулы (5)–(8) для коэффициентов λ_k, мы сначала сформулируем критерий аффинной однородности плоских кривых.

Лемма 1. *Аналитическая кривая γ вида (3), удовлетворяющая условию $\lambda_4 \neq 0$, аффинно-однородна тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\lambda_5}{|\lambda_4|^{3/2}} = B_5\frac{\mu'' - 2\mu'\mu + \frac{4}{9}\mu^3}{|\mu' - \frac{2}{3}\mu^2|^{3/2}} \tag{11}$$

является константой, не зависящей от точки этой кривой.

Доказательство. Если у кривой вида (3) коэффициент λ_4 отличен от нуля, то растяжением координат в плоскости $\mathbb{R}^2_x$ его можно сделать равным

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_4 > 0, \\ -1, & \text{если } \lambda_4 < 0. \end{cases}$$

При этом новое значение коэффициента λ_5 можно считать неотрицательным и равным

$$\frac{|\lambda_5|}{|\lambda_4|^{3/2}} = B_5\frac{|\mu'' - 2\mu'\mu + \frac{4}{9}\mu^3|}{|\mu' - \frac{2}{3}\mu^2|}.$$

Несложно убедиться, что пара новых коэффициентов $(\lambda_4^*, \lambda_5^*)$ является аффинным инвариантом кривой. Следовательно, для однородной кривой отношение $\frac{\lambda_5}{|\lambda_4|^{3/2}}$ постоянно.

Пусть, обратно, отношение (11) является постоянной величиной для некоторой кривой γ вида (3). Считая в этом уравнении $\lambda_4 = \varepsilon$, отметим два очевидных свойства функции $\mu(t) : \mu(0) = 0$, $\mu'(0) = \frac{3}{2}\varepsilon$.

Заметим теперь, что задача Коши

$$\frac{\mu'' - 2\mu'\mu + \frac{4}{9}\mu^3}{|\mu' - \frac{2}{3}\mu^2|^{3/2}} = A, \quad \mu(0) = 0, \quad \mu'(0) = \frac{3}{2}\varepsilon \tag{12}$$

имеет при любом A единственное решение. В частности, решениями подобных задач являются аффинные образы однородных кривых (1). Можно проверить вычислениями, что для этих кривых все возможные значения (ε, A) (или $(\lambda_4^*, \lambda_5^*)$) реализуются. Следовательно, неоднородных решений задача (12) не допускает. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Аффинный инвариант кривой

$$\lambda_5^* = \frac{|\lambda_5|}{|\lambda_4|^{3/2}},$$

по существу, совпадает с ее так называемой аффинной кривизной из [3].

Замечание 2. Пара аффинных инвариантов $(\lambda_4^*, \lambda_5^*)$ принимает следующие значения на кривых (1): $\lambda_4^* = -1$ только для кривых $x_2 = x_1^s$ при $s \in [-1, 0)$, $s \in (0, 1/2)$ и для $x_2 = \ln x_1$. При этом $\lambda_5^* \in [0, \infty)$. Для остальных степенных кривых $x_2 = x_1^s$ $(s \in (1/2, 0))$ имеем $\lambda_5^* > \frac{4\sqrt{2}}{5}$. Для кривой $x_2 = x_1 \ln x_1$ этот инвариант равен $\frac{4\sqrt{2}}{5}$, а для логарифмических спиралей $r = e^{a\phi}$

$$\lambda_5^* = \frac{4\sqrt{2}}{5} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 9}}$$

монотонно растет от нуля (при $a = 0$) до $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ (при $a \to \infty$).

Теперь мы докажем, что основание голоморфно-однородной несферической трубки удовлетворяет критерию леммы 1.

Лемма 2. *Если голоморфные инварианты $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ несферической трубки над аналитической кривой γ не зависят от точек γ, то аффинная кривизна λ_5^* этой кривой также постоянна.*

Доказательство. Так как изучаемая поверхность несферична, для нее $\lambda_4 \neq 0$. Следовательно, имеет смысл величина

$$\frac{1}{\varkappa_0} = \frac{|h_{420}|^{1/2}}{\lambda_4}.$$

Из ее постоянства получаем

$$h_{420} = \tau \frac{1}{\varkappa_0^2} \lambda_4^2 = B_6 \lambda_4^2, \quad \text{где } \tau = \operatorname{sgn}(h_{420}).$$

Тогда согласно формулам (4) и (8) имеем

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 = \tau |h_{420}|^{-5/2} B_4^2 B_6^2 \left(\frac{d}{dt} (\lambda_4^2) - \frac{4}{3} \mu \lambda_4^2 \right)^2 \\
= \tau B_4^2 B_6^2 |h_{420}|^{-5/2} \left(2\lambda_4 \lambda_4' - \frac{4}{3} \mu \lambda_4^2 \right)^2 \\
= 4\tau \big(B_4^2 B_6^2 \big) |h_{420}|^{-5/2} \lambda_4^2 \left(\lambda_4' - \frac{2}{3} \mu \lambda_4 \right)^2.
\end{aligned}$$

В силу равенства (9) это означает, что $\varkappa_1$ с точностью до константы равен

$$|h_{420}|^{-5/2}\lambda_4^2\lambda_5^2 = |B_6|^{-5/2}\frac{\lambda_5^2}{|\lambda_4|^3} = |B_6|^{-5/2}|\lambda_5^*|^2.$$

Следовательно, $|\lambda_5^*|^2$, а значит, и λ_5^* являются константами. Лемма 2 доказана.

Соединение лемм 1 и 2 позволяет вывести из голоморфной однородности несферической трубки аффинную однородность ее основания. Очевидная обратная импликация завершает доказательство основной теоремы.

Автор благодарит С. И. Пинчука, заинтересовавшего его данной проблемой, а также участников семинара по многомерному комплексному анализу под руководством А. Г. Витушкина за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лобода А. В.* О некоторых инвариантах трубчатых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$ // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 2. С. 211–223.
2. *Blaschke W.* Affine Differentialgeometrie. Berlin, 1923.
3. *Широков А. П., Широков П. А.* Аффинная дифференциальная геометрия. М.: Физматгиз, 1959.
4. *Dadok J., Yang P.* Automorphisms of tube domains and spherical hypersurfaces // Amer. J. Math. 1985. V. 107, N 4. P. 999–1013.
5. *Chern S. S., Moser J. K.* Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math. 1974. V. 133, N 3. P. 219–271.

Статья поступила 3 апреля 1995 г.

Лобода Александр Васильевич
Воронежский гос. архитектурный университет,
ул. 20 лет Октября, 84, Воронеж 394006
lob@vgasa.voronezh.su