Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 514.76

О ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНОВЫХ МЕТРИК НА СИМПЛЕКТИЧЕСКОМ И КОНТАКТНОМ МНОГООБРАЗИЯХ

Н. К. Смоленцев

Аннотация: Пусть $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ — пространство всех гладких почти келеровых метрик на симплектическом многообразии M^{2n}, ω, фундаментальная форма которых совпадает с ω. Хорошо известно, что $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ является ретрактом пространства $\mathscr{M}$ всех гладких метрик на M. Показано, что пространство $\mathscr{M}$ — гладкое тривиальное расслоение над $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$. Аналогичный факт имеет место и в случае контактного многообразия. Библиогр. 3.

Пусть $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ — пространство всех гладких почти келеровых метрик на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω), фундаментальная форма которых совпадает с ω. Пространство $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ является подмногообразием в пространстве $\mathscr{M}$ всех гладких метрик на M. Хорошо известно, что $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ — ретракт пространства $\mathscr{M}$. В данной работе показано, что пространство $\mathscr{M}$ — гладкое локально тривиальное расслоение над $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$. Аналогичный факт имеет место и в случае контактного многообразия.

1. Ассоциированные метрики на симплектическом многообразии

Пусть M — гладкое (класса C^∞) замкнутое многообразие размерности m и $\mathscr{M}$ — множество всех гладких римановых метрик на многообразии M. Множество $\mathscr{M}$ является открытым выпуклым конусом в пространстве Фреше $S_2(M)$ всех гладких симметричных билинейных форм на M. Поэтому $\mathscr{M}$ — гладкое многообразие Фреше. Предположим, что M — симплектическое многообразие. Это означает, что на M задана замкнутая невырожденная кососимметричная 2-форма ω, $\dim M = m = 2n$.

Определение 1. Почти комплексная структура (п.к.с.) J на M называется *положительной ассоциированной* с симплектической формой ω, если для любых векторных полей X, Y на M выполняются условия:

1) $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$,

2) $\omega(X, JX) > 0$, если $X \neq 0$.

Каждая такая п.к.с. J определяет риманову метрику g на M равенством $g(X, Y) = \omega(X, JY)$, которая также называется *ассоциированной.*

Обозначим символом $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ пространство всех гладких ассоциированных метрик на M.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–01159).

Известно, что пространство $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ является бесконечномерным подмногообразием в $\mathscr{M}$. В работе [1] введены удобные координаты на $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ в окрестности элемента $g_0 \in \mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$. Напомним их построение.

Пусть $AS(g_0)$ — пространство эндоморфизмов $P : TM \to TM$ касательного расслоения, обладающих свойствами:

1) оператор P антикоммутирует с п.к.с. J_0, соответствующей метрике g_0, $PJ_0 = -J_0 P$;

2) P симметричен относительно g_0;

3) $1 - P^2$ положителен относительно g_0.

Пространство $AS(g_0)$ является окрестностью нуля в линейном пространстве Фреше гладких симметричных эндоморфизмов, антикоммутирующих с J_0.

Координатная карта на $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ в окрестности $g_0 \in \mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ определяется следующим образом:

$$\Phi : AS(g_0) \to \mathscr{A}\mathscr{M}_\omega, \quad \Phi : P \to g(P),$$

$$g(P)(X, Y) = g_0((1 + P)X, (1 - P)^{-1}Y).$$

При этом метрика $g(P)$ соответствует почти комплексной структуре

$$J = J_0(1 + P)(1 - P)^{-1}.$$

Обратимся опять ко всему пространству метрик $\mathscr{M}$. Для произвольной римановой метрики $g \in \mathscr{M}$ существует много почти комплексных структур, для которых g является эрмитовой. Однако фиксация фундаментальной формы ω позволяет связать с каждой метрикой $g \in \mathscr{M}$ единственную почти комплексную структуру J следующим образом.

Пусть $g' \in \mathscr{M}$ — любая метрика. Существует единственный кососимметрический автоморфизм A касательного расслоения TM такой, что $\omega(X, Y) = g'(AX, Y)$. Тогда легко проверить, что $J = (-A^2)^{-\frac{1}{2}}A$ является положительной ассоциированной почти комплексной структурой, а $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ — ассоциированной метрикой, соответствующей структуре J.

Приведенная конструкция определяет проекцию пространства $\mathscr{M}$ на $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$:

$$p_\omega : \mathscr{M} \to \mathscr{A}\mathscr{M}_\omega, \quad p_\omega(g') = g.$$

Метрики g и g' связаны соотношением $g(X, Y) = g'(X, (-A^2)^{\frac{1}{2}}Y)$. При этом метрика g' (как и g) является эрмитовой относительно п.к.с. J. Это позволяет предположить, что $p_\omega^{-1}(g)$ состоит из всех J-эрмитовых метрик. Покажем, что это действительно так.

Пусть $\mathscr{M}_J$ — множество всех J-эрмитовых римановых метрик на M. Данное пространство параметризуется положительными эрмитово симметричными операторами $B : TM \to TM$. Если $g \in \mathscr{M}_J$ — ассоциированная метрика, то для любой другой метрики $g' \in \mathscr{M}_J$ существует единственный положительный симметричный и коммутирующий с J оператор B такой, что $g'(X, Y) = g(X, BY) = g(BX, Y)$.

Лемма 1. *Для любой ассоциированной метрики $g \in \mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ и соответствующей п.к.с. J имеет место равенство*

$$p_\omega^{-1}(g) = \mathscr{M}_J.$$

Доказательство. Мы уже отмечали, что $p_\omega^{-1}(g) \subset \mathscr{M}_J$. Покажем обратное. Пусть $g' \in \mathscr{M}_J$. Тогда существует симметричный оператор B, коммутирующий с J и такой, что $g'(X,Y) = g(X,BY) = g(BX,Y)$,

$$\omega(X,Y) = g(JX,Y) = g'(JX, B^{-1}Y) = g'(B^{-1}JX, Y).$$

Поэтому $A = B^{-1}J$, $-A^2 = -B^{-1}JB^{-1}J = -B^{-2}J^2 = B^{-2}$. Поскольку B^{-1} симметричный, то $(-A^2)^{-\frac{1}{2}} = (B^{-2})^{-\frac{1}{2}} = B$. Тогда соответствующая метрике g' почти комплексная структура совпадает с заданной: $(-A^2)^{-\frac{1}{2}}A = BB^{-1}J = J$. Поэтому $p_\omega(g') = g$.

Близкие ассоциированные метрики g_0, J_0 и g, J связаны следующими соотношениями:

$$g(X,Y) = g_0((1+P)(1-P)^{-1}X, Y), \quad J = J_0(1+P)(1-P)^{-1}.$$

Возникает естественный вопрос: связаны ли аналогичными соотношениями другие метрики слоев $\mathscr{M}_{J_0}$ и $\mathscr{M}_J$? Ответ дает следующая

Лемма 2. *Пусть $g'_0 \in \mathscr{M}_{J_0}$ — произвольная J_0-эрмитова метрика и $J = J_0(1+P)(1-P)^{-1}$. Тогда*

$$g'(X,Y) = \frac{1}{2}\left(g'_0\left((1+P)(1-P)^{-1}X, Y\right) + g'_0\left(X, (1+P)(1-P)^{-1}Y\right)\right)$$

является J-эрмитовой метрикой. Фундаментальная форма $\omega'(X,Y) = g'(JX,Y)$ метрики g' выражается через ω следующим образом:

$$\omega'(X,Y) = \frac{1}{2}\left(\omega(X,Y) + \omega\left((1+P)(1-P)^{-1}X, (1+P)(1-P)^{-1}Y\right)\right).$$

Доказательство заключается в элементарной проверке.

Из данной леммы следует, что для близких ассоциированных метрик g_0, J_0 и g, J слои $\mathscr{M}_{J_0}$ и $\mathscr{M}_J$ естественно изоморфны.

Теорема 1. *Пространство $\mathscr{M}$ является гладким локально тривиальным расслоением над $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$. Слоем над элементом $(g,J) \in \mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ служит пространство $\mathscr{M}_J$ всех J-эрмитовых римановых метрик на M.*

Доказательство. Достаточно построить локальную карту на $\mathscr{M}$, при которой слои проекции p_ω соответствуют прямому слагаемому модельного пространства. Пусть $(g_0, J_0) \in \mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ — ассоциированная структура. Пространство $\mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ параметризуется областью $AS(g_0)$. Слой $\mathscr{M}_{J_0}$ расслоения p над точкой g_0 состоит из всех J_0-эрмитовых метрик — это открытое множество в линейном пространстве Фреше гладких J_0-эрмитовых форм на M.

В качестве искомой карты можно взять следующее отображение:

$$\Psi_{J_0} : AS(g_0) \times \mathscr{M}_{J_0} \to \mathscr{M}, \quad (P, g'_0) \to g',$$

где $P \in AS(g_0)$, $g'_0 \in \mathscr{M}_{J_0}$ и метрика g' определяется равенством

$$g'(X,Y) = \frac{1}{2}\left(g'_0\left((1+P)(1-P)^{-1}X, Y\right) + g'_0\left(X, (1+P)(1-P)^{-1}Y\right)\right).$$

Метрика g' является J-эрмитовой для п.к.с. $J = J_0(1+P)(1-P)^{-1}$. Поэтому $\mathscr{M}_{J_0}$ отображается в слой $\mathscr{M}_J$ расслоения p над точкой $g(X,Y) = g_0((1+P)X, (1-P)^{-1}Y)$. То, что $\mathscr{M}_{J_0}$ отображается на весь слой $\mathscr{M}_J$, легко показать:

пусть $g' \in \mathscr{M}_J$ — произвольная J-эрмитова метрика и $g = p_\omega(g')$ — ассоциированная J-эрмитова метрика. Тогда $g_0(X,Y) = g((1-P)X, (1+P)^{-1}Y)$ и

$$g'_0(X,Y) = \frac{1}{2}\left(g'\left((1-P)(1+P)^{-1}X, Y\right) + g'\left(X, (1-P)(1+P)^{-1}Y\right)\right)$$

— соответствующая g' метрика из пространства $\mathscr{M}_{J_0}$. Указанное соответствие $g' \to g'_0$ вместе с проекцией $p_\omega : \mathscr{M} \to \mathscr{A}\mathscr{M}_\omega$ определяют отображение, обратное к Ψ_{J_0}.

В заключение отметим, что можно определить еще одну проекцию $q : \mathscr{M} \to \Lambda^2_0(M)$ пространства метрик $\mathscr{M}$ на пространство $\Lambda^2_0(M)$ всех гладких невырожденных 2-форм. Если $g' \in \mathscr{M}$ и $J = p_\omega(g')$ — соответствующая п.к.с., то

$$q(g') = \omega', \quad \omega'(X,Y) = g'(JX,Y).$$

Прообраз $q^{-1}(\omega')$ элемента $\omega' \in \Lambda^2_0(M)$ — это множество $\mathscr{A}\mathscr{M}_{\omega'}$ римановых метрик, ассоциированных с невырожденной 2-формой ω' на M.

При отображении q слой $\mathscr{M}_J$ проекции p переходит в пространство невырожденных внешних 2-форм, инвариантных относительно п.к.с. J, т. е. таких форм ω', что $\omega'(JX,JY) = \omega'(X,Y)$.

2. Ассоциированные метрики на контактном многообразии

Пусть теперь M — контактное многообразие с контактной формой θ, $\dim M = 2n+1$. Тогда $\theta \wedge (d\theta)^n$ — невырожденная форма на M максимальной степени.

Контактная форма θ определяет на M контактное распределение $E = \ker\theta$ и векторное поле Риба ξ: $\theta(\xi) = 1$, $i_\xi d\theta = 0$. Ясно, что $TM = \mathbb{R}\xi \oplus E$.

Обозначим через $\mathscr{X}(M)$ и $\mathscr{X}(E)$ пространства всех гладких векторных полей на M и векторных полей, принадлежащих распределению E.

Риманова структура g на M называется *ассоциированной* с контактной формой θ, если существует эндоморфизм $\varphi : TM \to TM$ такой, что для любых $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ выполняются условия:

1) $g(X,\xi) = \theta(\xi)$,
2) $\varphi^2 = -\mathbb{I} + \theta \otimes \xi$, где $\mathbb{I}$ — тождественный эндоморфизм,
3) $d\theta(X,Y) = g(X,\varphi Y)$.

Отметим еще ряд очевидных свойств ассоциированной метрики g:

4) распределение E ортогонально полю Риба ξ и $g(\xi,\xi) = 1$,
5) $\varphi(\xi) = 0$, $\varphi(E) = E$, $\varphi^2 = -\mathbb{I}$ на распределении E,
6) $d\theta(\varphi X, \varphi Y) = d\theta(X,Y)$ для любых $X, Y \in \mathscr{X}(M)$,
7) $g(X,Y) = \theta(X)\theta(Y) + d\theta(\varphi X, Y)$ для любых векторных полей X, Y на M.

Пусть $\mathscr{A}\mathscr{M}_\theta$ — пространство всех гладких ассоциированных метрик на M. Свойство 7 говорит о том, что ассоциированная метрика на M, θ полностью определяется формой θ и аффинором φ. Поэтому для описания пространства $\mathscr{A}\mathscr{M}_\theta$ нам можно обратиться к пространству всех таких аффиноров. Из свойства 5 следует, что φ определяет комплексную структуру в распределении E. Другие свойства φ, не связанные с метрикой, — это 2 и 6.

Определение 2. *Положительной комплексной структурой в контактном распределении* E будем называть эндоморфизм $\varphi : TM \to TM$, обладающий свойствами:

1) $\varphi^2 = -\mathbb{I} + \theta \otimes \xi$,

2) $d\theta(\varphi X, \varphi Y) = d\theta(X, Y)$ для любых векторных полей X, Y на M,

3) $d\theta(\varphi X, X) > 0)$, если $X \in \mathscr{X}(E)$ и $X \neq 0$.

Каждый такой эндоморфизм φ однозначно определяет ассоциированную метрику равенством $g(X, Y) = \theta(X)\theta(Y) + d\theta(\varphi X, Y)$.

Пусть $\mathscr{A}(E)$ — пространство гладких положительных комплексных структур в E. Оно является пространством сечений расслоения $A(E)$ над M, слоем которого над точкой $x \in M$ будет множество всех операторов $\varphi_x : T_xM \to T_xM$, обладающих свойствами 1–3 определения 2 в точке $x \in M$. Поэтому пространство $\mathscr{A}(E)$ — гладкое ILH-многообразие [2]. Определим на $\mathscr{A}(E)$ более естественную аналитическую структуру [3].

В качестве модельного векторного пространства Фреше для задания карты в окрестности $\varphi_0 \in \mathscr{A}(E)$ возьмем пространство Фреше гладких симметричных эндоморфизмов, антикоммутирующих с φ_0 и равных нулю на $\mathbb{R}\xi$.

Пусть $AS(E, \varphi_0)$ — множество всех гладких эндоморфизмов S касательного расслоения TM, обладающих свойствами:

1) оператор S антикоммутирует с φ_0, $S\varphi_0 = -\varphi_0 S$ и $S(\xi) = 0$;

2) S симметричен относительно метрики g_0, соответствующей φ_0;

3) $1 - S^2$ положителен относительно g_0.

Координатная карта на $\mathscr{A}(E)$ в окрестности $\varphi_0 \in \mathscr{A}(E)$ задается отображением

$$\Phi_\theta : AS(E, \varphi_0) \to \mathscr{A}(E), \quad \Phi_\theta : S \to \varphi, \quad \varphi = \varphi_0(1 + S)(1 - S)^{-1}.$$

Обратным отображением (на E) будет $S = (1 - \varphi\varphi_0)^{-1}(1 + \varphi\varphi_0)$.

Вернемся к пространству $\mathscr{A}\mathscr{M}_\theta$. Поскольку оператор $\varphi \in \mathscr{A}(E)$ полностью задает ассоциированную метрику g, определено отображение

$$\mathscr{A}(E) \to \mathscr{A}\mathscr{M}_\theta, \quad g(X, Y) = \theta(X)\theta(Y) + d\theta(\varphi X, Y),$$

которое является, очевидно, диффеоморфизмом.

Ассоциированные метрики g_0 и g, соответствующие эндоморфизмам φ_0 и $\varphi = \varphi_0(1 + S)(1 - S)^{-1}$, связаны соотношением

$$g(X, Y) = g_0((1 + S)X, (1 - S)^{-1}Y).$$

Определим проекцию пространства $\mathscr{M}$ на $\mathscr{A}\mathscr{M}_\theta$. Пусть $g' \in \mathscr{M}$ — любая метрика. Существует единственный эндоморфизм A касательного расслоения $TM = \mathbb{R}\xi \oplus E$, обладающий свойствами: $A\xi = 0$, $\quad A(E) = E$, на E оператор A кососимметричен и $d\theta(X, Y) = g'(AX, Y)$. Тогда $-A^2$ — положительный симметричный оператор на подрасслоении E и поэтому определены его степени при ограничении на E. Как и в симплектическом случае, эндоморфизм $\varphi = (-A^2)^{-\frac{1}{2}}A$ является ассоциированной с $d\theta$ комплексной структурой в расслоении E. Теперь

$$p_\theta : \mathscr{M} \to \mathscr{A}\mathscr{M}_\theta, \quad p_\theta(g') = g, \quad g(X, Y) = \theta(X)\theta(Y) + d\theta(\varphi X, Y).$$

На контактном расслоении E метрики g и g' связаны следующим соотношением: $g(X, Y) = g'(X, (-A^2)^{-\frac{1}{2}}Y)$, $X, Y \in \mathscr{X}(E)$, а на одномерном подрасслоении Риба $\mathbb{R}\xi$ они никак не связаны. Более того, для метрики g' подрасслоение $\mathbb{R}\xi$ не обязано быть ортогональным контактному расслоению E.

Метрика g' (как и g) является φ-эрмитовой на E в том смысле, что

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y), \quad X, Y \in \mathscr{X}(E).$$

Пусть $\mathscr{M}_\varphi$ — множество всех φ-эрмитовых римановых метрик на M. Данное пространство параметризуется положительными симметричными операторами $B : TM \to TM$, которые оставляют инвариантным контактное подрасслоение E и коммутируют на E с φ.

Если $g \in \mathscr{M}_\varphi$ — ассоциированная метрика, то для любой другой метрики $g' \in \mathscr{M}_\varphi$ существует единственный положительный симметричный оператор B, коммутирующий на E с φ и такой, что $g'(X,Y) = g(X,BY) = g(BX,Y)$.

Лемма 3. *Для любой ассоциированной метрики $g \in \mathscr{A}\mathscr{M}_\theta$ и соответствующего ей аффинора φ имеет место равенство $p_\theta^{-1}(g) = \mathscr{M}_\varphi$.*

Доказательство точно такое же, как и для леммы 1.

Теорема 2. *Пространство $\mathscr{M}$ является гладким локально тривиальным расслоением над $\mathscr{A}\mathscr{M}_\theta$. Слоем над элементом $(g,\varphi) \in \mathscr{A}\mathscr{M}_\theta$ служит пространство $\mathscr{M}_\varphi$ всех φ-эрмитовых римановых метрик на M.*

Доказательство. Достаточно построить локальную карту на $\mathscr{M}$, при которой слои проекции p_θ соответствуют прямому слагаемому модельного пространства. Пусть $(g_0,\varphi_0) \in \mathscr{A}\mathscr{M}_\theta$ — ассоциированная структура. Пространство $\mathscr{A}\mathscr{M}_\theta$ параметризуется множеством $AS(\varphi_0)$. Слой $\mathscr{M}_{\varphi_0}$ расслоения p_θ над точкой g_0 состоит из всех φ_0-эрмитовых метрик — это открытое множество в линейном пространстве Фреше гладких сечений векторного расслоения φ_0-эрмитовых форм на M.

В качестве искомой карты можно взять следующее отображение:

$$\Psi_{\varphi_0} : AS(\varphi_0) \times \mathscr{M}_{\varphi_0} \to \mathscr{M}, \quad (S, g_0') \to g',$$

где $S \in AS(\varphi_0)$, $g_0' \in \mathscr{M}_{\varphi_0}$ и метрика g' определяется равенством

$$g'(X,Y) = \frac{1}{2}\left(g_0'\left((1+S)(1-S)^{-1}X, Y\right) + g_0'\left(X, (1+S)(1-S)^{-1}Y\right)\right).$$

Данная метрика g' является φ-эрмитовой для $\varphi = \varphi_0(1+S)(1-S)^{-1}$. Поэтому $\mathscr{M}_{\varphi_0}$ отображается в слой $\mathscr{M}_\varphi$ расслоения p над точкой

$$g(X,Y) = g_0((1+S)X, (1-S)^{-1}Y) \quad (X, Y \in \mathscr{X}(E)).$$

Как и в симплектическом случае, легко показывается, что $\mathscr{M}_{\varphi_0}$ отображается на весь слой $\mathscr{M}_\varphi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смоленцев Н. К.* О кривизне пространства ассоциированных метрик на симплектическом многообразии // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 132–139.
2. *Ebin D. G.* The manifold of Riemannian metrics // Proc. Sympos. Pure. Math. 1970. V. 15. P. 11–40.
3. *Смоленцев Н. К.* О кривизне пространства ассоциированных метрик на контактном многообразии // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 6. С. 188–194.

Статья поступила 22 апреля 1999 г.

Смоленцев Николай Константинович
Кемеровский гос. университет, кафедра математического анализа,
Красная, 6, Кемерово 650043
smolen@kemsu.ru