Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 510.67

ОБ АЦИКЛИЧЕСКИХ ГИПЕРГРАФАХ МИНИМАЛЬНЫХ ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ

С. В. Судоплатов

Аннотация: Рассматривается вопрос о восстановлении структурных свойств теорий по структуре гиперграфов минимальных простых моделей. Описываются спектр и основные теоретико-модельные свойства ациклических полных теорий со свойством расширения изоморфизмов семейств минимальных простых моделей. Библиогр. 3.

В настоящей работе рассматривается вопрос о восстановлении структурных свойств элементарных теорий по структуре гиперграфов минимальных простых моделей.

Напомним [1], что *гиперграфом* называется любая пара множеств (X, Y), где Y — некоторое подмножество булеана $\mathscr{P}(X)$ множества X.

Напомним также [2], что модель $\mathscr{M}$ теории T называется *простой*, если она элементарно вкладывается в любую модель теории T. Модель $\mathscr{M}$ теории T называется *минимальной*, если $\mathscr{M}$ не содержит собственных подсистем, являющихся моделями теории T.

Пусть $\mathscr{M}$ — некоторая модель полной теории T. Обозначим через $H(\mathscr{M})$ совокупность всех подмножеств M_0 носителя M системы $\mathscr{M}$, которые являются носителями минимальных простых подмоделей $\mathscr{M}_0$ модели $\mathscr{M}$: $H(\mathscr{M}) = \{M_0 \mid \mathscr{M}_0$ — минимальная простая подмодель модели $\mathscr{M}\}$. Пара $(M, H(\mathscr{M}))$ называется *гиперграфом минимальных простых подмоделей* модели $\mathscr{M}$.

Обозначим через $\mathscr{T}_H$ класс элементарных полных теорий T с бесконечными моделями таких, что любая модель $\mathscr{M} \models T$ удовлетворяет следующим условиям:

(а) каждая минимальная простая подмодель модели $\mathscr{M}$ является элементарной подмоделью;

(б) система $H(\mathscr{M})$ покрывает множество M;

(в) любые два различных множества M_0 и M_0' из $H(\mathscr{M})$ имеют не более одного общего элемента.

В дальнейшем будут рассматриваться лишь теории из класса $\mathscr{T}_H$.

Очевидно, что если a и b — произвольные различные элементы носителя минимальной простой подмодели $\mathscr{M}_0$ модели $\mathscr{M}$ теории T, то не существует множества $M_0' \in H(\mathscr{M}) \setminus \{M_0\}$ такого, что $a, b \in M_0'$. Тем самым носитель любой минимальной простой подмодели $\mathscr{M}_0$ и сама подмодель $\mathscr{M}_0$ однозначно задаются любыми своими двумя различными элементами a и b. В дальнейшем для модели $\mathscr{M}_0$ будем использовать обозначение $\mathscr{M}(a, b)$, а для носителя M_0 модели $\mathscr{M}_0$ — $M(a, b)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00571).

Напомним, что для любого множества A, содержащегося в носителе некоторой модели $\mathscr{M}$, через $\mathrm{acl}_{\mathscr{M}}(A)$ обозначается *алгебраическое замыкание* множества A в модели $\mathscr{M}$, т. е. множество всех элементов b таких, что

$$\mathscr{M} \models \varphi_b(b, \bar{a}) \wedge \exists^{\leq n} x\, \varphi_b(x, \bar{a})$$

для некоторых $n \in \omega$ и формул $\varphi_b(x, \bar{a})$ с кортежами параметров $\bar{a}$ из A. При фиксированной модели $\mathscr{M}$ вместо $\mathrm{acl}_{\mathscr{M}}(A)$ будем писать $\mathrm{acl}(A)$.

Если a — элемент модели $\mathscr{M}$, B — некоторое множество элементов из $\mathscr{M}$, то, как обычно, через $\mathrm{tp}(a/B)$ будем обозначать *тип* элемента a над множеством B, т. е. множество всех формул $\varphi(x, \bar{b})$ с кортежами $\bar{b}$ параметров из B таких, что $\mathscr{M} \models \varphi(a, \bar{b})$.

В следующем утверждении проясняется теоретико-модельная структура минимальной простой модели теории из класса $\mathscr{T}_H$.

Предложение. *Если $\mathscr{M}_0$ — минимальная простая подмодель модели теории из класса $\mathscr{T}_H$, a и b — различные элементы из M_0, то $M_0 = \mathrm{acl}(\{a, b\})$.*

Доказательство. Предположим, что существует $c \in M_0 \setminus \mathrm{acl}(\{a, b\})$. Тогда найдется реализация d типа $\mathrm{tp}(c/\{a, b\})$, не принадлежащая M_0. Однако $M_0 = M(a, b) = M(a, c) = M(b, c)$, $M(a, d) \neq M(b, d)$ и при действии автоморфизма f, переводящего d в c и фиксирующего a и b, получим $f(M(a, d)) \subseteq M_0$, $f(M(b, d)) \subseteq M_0$ и $f(M(a, d)) \neq f(M(b, d))$, что противоречит минимальности модели $\mathscr{M}_0$. Предложение доказано.

Маршрутом в гиперграфе $\langle M, H(\mathscr{M})\rangle$ называется любая последовательность элементов $a_0, a_1, \dots, a_n \in M$ такая, что существуют модели $\mathscr{M}(a_i, a_{i+1})$, $i = 0, \dots, n-1$, и $M(a_i, a_{i+1}) \neq M(a_{i+1}, a_{i+2})$, $i = 0, \dots, n-2$. При этом число $n-1$ называется *длиной* маршрута $(a_0, a_1, \dots, a_n)$. *Расстоянием* $\rho_{\mathscr{M}}(a, b)$ между элементами a и b из M назовем длину кратчайшего маршрута $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ (где $a_0 = a$, $a_n = b$), если такой маршрут существует, и $\rho_{\mathscr{M}}(a, b) \rightleftharpoons \infty$, если элементы a и b не связаны маршрутами.

Связной компонентой гиперграфа $\langle M, H(\mathscr{M})\rangle$ будем называть любое максимальное подмножество множества M, в котором любые два элемента связаны некоторым маршрутом. *Связной компонентой* модели $\mathscr{M}$ называется любая подсистема $\mathscr{N}$ модели $\mathscr{M}$, носитель которой является связной компонентой гиперграфа $\langle M, H(\mathscr{M})\rangle$.

Диаметром $d_H(\mathscr{M})$ гиперграфа $\langle M, H(\mathscr{M})\rangle$ называется наибольшее из расстояний между элементами, лежащими в одной компоненте связности, если такое расстояние определено, и $d_H(\mathscr{M}) \rightleftharpoons \infty$ в противном случае. *Диаметром* $d(T)$ теории T назовем $\sup\{d_H(\mathscr{M}) \mid \mathscr{M} \models T\}$.

Элемент a модели $\mathscr{M}$ называется *точкой сочленения*, если он принадлежит по крайней мере двум минимальным простым подмоделям и для любых минимальных простых подмоделей $\mathscr{M}_0^1$ и $\mathscr{M}_0^2$ таких, что $M_0^1 \cap M_0^2 = \{a\}$, любой маршрут, соединяющий элементы из M_0^1 и M_0^2, содержит элемент a.

Расстоянием $\rho_{\mathscr{M}}(\mathscr{M}_0^1, \mathscr{M}_0^2)$ между минимальными простыми моделями $\mathscr{M}_0^1$ и $\mathscr{M}_0^2$ с носителями из $H(\mathscr{M})$ называется наименьшее значение $\rho_{\mathscr{M}}(a, b)$, где $a \in M_0^1$ и $b \in M_0^2$.

Обозначим через $\mathscr{T}_H^a$ подкласс класса $\mathscr{T}_H$, состоящий из теорий T, у которых любая модель $\mathscr{M} \models T$ удовлетворяет следующим условиям:

(г) гиперграф $\langle M, H(\mathscr{M})\rangle$ *ацикличен*, т. е. не существует попарно различных множеств $M^0, \dots, M^n \in H(\mathscr{M})$, $n \geq 1$, таких, что

$$M^i \cap M^{i+1} \neq \varnothing, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad M^n \cap M^0 \neq \varnothing;$$

(д) для любых двух семейств $\{\mathscr{M}_i \mid i \in I\}$ и $\{\mathscr{M}'_i \mid i \in I\}$ минимальных простых подмоделей модели $\mathscr{M}$ из условий $\rho_{\mathscr{M}}(\mathscr{M}_i, \mathscr{M}_j) = \rho_{\mathscr{M}}(\mathscr{M}'_i, \mathscr{M}'_j)$ для любых $i, j \in I$ и существования изоморфизмов

$$f_i : \mathscr{M}_i \widetilde{\rightarrow} \mathscr{M}'_i$$

таких, что точки сочленения, через которые проходят все маршруты, связывающие $\mathscr{M}_i$ с $\mathscr{M}_j$, переходят в точки сочленения, через которые проходят все маршруты, связывающие $\mathscr{M}'_i$ с $\mathscr{M}'_j$, следует существование изоморфизма $f : \bigcup\{\mathscr{M}_i \mid i \in I\} \widetilde{\rightarrow} \bigcup\{\mathscr{M}'_i \mid i \in I\}$, расширяющего изоморфизмы f_i и расширяющегося до автоморфизма некоторой элементарной надмодели $\mathscr{N}$ модели $\mathscr{M}$.

Примеры. 1. Пусть T_f — теория бесконечного связного унара $\langle M, f^{(1)}\rangle$, для которого существует число $n_0 \in \omega$ такое, что для любого элемента $a \in M$ выполнено $|\{b \mid f(b) = a\}| \leq n_0$. Любая связная компонента модели теории T_f является минимальной простой моделью, а различные связные компоненты не пересекаются. Таким образом, теория T_f принадлежит классу $\mathscr{T}_H^a$.

2. Рассмотрим модель $\langle M, f^{(1)}\rangle$ из предыдущего примера и расширим эту модель новой константой c с условием $f(c) = c$. Теория T_c модели

$$\langle M \cup \{c\}, f^{(1)}, c\rangle$$

принадлежит классу $\mathscr{T}_H^a$. При этом минимальные простые модели содержат константу в качестве элемента их общего пересечения.

3. Любая теория $T(\mathrm{pm})$ всюду конечно определенной полигонометрии [3] принадлежит классу $\mathscr{T}_H^a$. Действительно, минимальные простые подмодели любой модели $\mathscr{M} \models T(\mathrm{pm})$ элементарны и образуют ациклическую структуру так, что различные минимальные простые модели имеют в пересечении не более одного общего элемента и покрывают модель $\mathscr{M}$. Кроме того, любая система минимальных простых подмоделей определяется однозначно с точностью до изоморфизма системой расстояний между минимальными простыми подмоделями, а также взаимосвязью точек сочленения.

Отметим, что условия (а)–(д) независимы. В качестве примера отделимости этих условий приведем пример, для которого выполняются условия (а)–(г) и не выполняется условие (д). Рассмотрим множество целых чисел $\mathbf{Z}$ с обычным отношением $\leq$ и функцией следования $m' = m + 1$. Очевидно, что модели теории $\mathrm{Th}(\langle \mathbf{Z}, \leq, '\rangle)$ разбиваются на попарно не пересекающиеся однопорожденные минимальные простые модели. При этом если $\mathscr{M}_0^1$ и $\mathscr{M}_0^2$ — различные простые модели, порожденные элементами a_0^1 и a_0^2 соответственно, $a_0^1 < a_0^2$, то не существует автоморфизма f такого, что $f(\mathscr{M}_0^1) = \mathscr{M}_0^2$ и $f(\mathscr{M}_0^2) = \mathscr{M}_0^1$.

Далее через $I(T, \lambda)$ будем обозначать число попарно неизоморфных моделей теории T, имеющих мощность λ.

Теорема. *Любая теория T из класса $\mathscr{T}_H^a$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $1 \leq d(T) \leq 2$, $I(T, |T|) = |\alpha + \omega|$, *где* $|T| = \omega_\alpha$, *и* $I(T, \lambda) = 1$, *если* $\lambda > |T|$;

2) $d(T) = \infty$, T — *тотально трансцендентная теория бесконечного ранга Морли, и*

$$I(T, \omega_\alpha) = (\max(\lambda_0, |\alpha|))^\omega,$$

где λ_0 — число точек сочленения минимальной простой модели, лежащей в $|T|^+$-насыщенной модели теории T, $\omega_\alpha \geq |T|$.

Доказательство. Предположим, что $d(T) = 1$, т. е. минимальные простые модели попарно не пересекаются. Тогда по условию (д) модели $\mathscr{M}_1$ и

$\mathscr{M}_2$ теории T изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое число минимальных простых подмоделей. Если модель $\mathscr{M}$ имеет мощность $|T| = \omega_\alpha$, то число минимальных простых подмоделей не превосходит ω_α, т. е. $I(T, |T|) = |\alpha + \omega|$. Если $\lambda > |T|$, то для любой модели мощности λ число минимальных простых подмоделей равно λ и $I(T, \lambda) = 1$.

Допустим, что $d(T) = 2$. Тогда каждая минимальная простая модель имеет ровно одну точку сочленения, будучи подмоделью $|T|^+$-насыщенной модели. При этом точка сочленения является единственной реализацией некоторого изолированного типа. Снова по условию (д) модели $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ теории T изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое число входящих в них минимальных простых подмоделей. Тогда аналогично имеем $I(T, |T|) = |\alpha + \omega|$, где $|T| = \omega_\alpha$, и $I(T, \lambda) = 1$, если $\lambda > |T|$.

Предположим теперь, что $d(T) > 2$. Тогда каждая минимальная простая модель имеет по крайней мере две точки сочленения. Поэтому из условия (г) следует, что $d(T) = \infty$.

Пусть λ_0 — число точек сочленения некоторой (любой) минимальной простой модели, лежащей в $|T|^+$-насыщенной модели теории T.

Зафиксируем минимальную простую модель $\mathscr{N}_0$, лежащую в некоторой модели $\mathscr{M}$ теории T, $|\mathscr{M}| = \omega_\alpha$. Подсчитаем число возможных подсистем вида $\mathscr{N}_n = \bigcup\{\mathscr{M}_0 \mid \mathscr{M}_0$ — минимальная простая подмодель модели $\mathscr{M}$ и $\rho_{\mathscr{M}}(\mathscr{N}_0, \mathscr{M}_0) \leq n\}$, $n \in \omega$. Если $n = 1$, то из условия (д) и того, что каждая точка сочленения может содержаться не более чем в $\max(|\alpha|, \omega)$ минимальных простых моделей, следует, что число систем вида $\mathscr{N}_1$ равно $\max(\lambda_0, |\alpha|, \omega)$. Аналогично для любого $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$ число систем вида $\mathscr{N}_n$ равно

$$\max(\lambda_0, |\alpha|, \omega).$$

Следовательно, число систем вида $\mathscr{N}_\omega = \bigcup\limits_{n \in \omega} \mathscr{N}_n$ равно

$$(\max(\lambda_0, |\alpha|, \omega))^\omega = (\max(\lambda_0, |\alpha|))^\omega.$$

Отметим, что подсистема $\mathscr{N}$ модели $\mathscr{M}$ является ее связной компонентой тогда и только тогда, когда $\mathscr{N}$ — подсистема вида $\mathscr{N}_\omega$. Поэтому число попарно неизоморфных связных компонент в моделях мощности ω_α равно $(\max(\lambda_0, |\alpha|))^\omega$.

Так как из связных компонент, имеющих мощности не более ω_α, можно скомбинировать не более $(\max(\lambda_0, |\alpha|))^\omega \cdot |\alpha + \omega|$ моделей мощности ω_α и

$$(\max(\lambda_0, |\alpha|))^\omega \cdot |\alpha + \omega| = (\max(\lambda_0, |\alpha|))^\omega,$$

то $I(T, \omega_\alpha) = (\max(\lambda_0, |\alpha|))^\omega$.

Осталось заметить, что для любой модели $\mathscr{M}$ теории T тип $p(x) \in S(\mathscr{M})$, не реализуемый в модели $\mathscr{M}$ и имеющий в качестве реализации элемент a модели $\mathscr{N}$, $\mathscr{N} \succ \mathscr{M}$, определяется условиями $\rho_{\mathscr{N}}(x, b) = \rho_{\mathscr{N}}(a, b)$, где b — элементы модели $\mathscr{M}$, и типом $\mathrm{tp}(a/\{c\})$, где c — элемент из модели $\mathscr{M}$ такой, что любой маршрут, связывающий a с элементом из $\mathscr{M}$, проходит через элемент c. Таким образом,

$$|S(\mathscr{M})| = |\mathscr{M}| + \omega \cdot |\mathscr{M}| = |\mathscr{M}|,$$

и T — тотально трансцендентная теория. При этом формула $x = x$ имеет бесконечный ранг Морли ($RM(x = x) \geq \omega$), поскольку по теореме компактности из равенства $\rho_{\mathscr{N}}(a, b) = n$ следует существование формулы $\varphi_n(x, y)$ с условиями $\models \varphi_n(a, b)$ и $RM(\varphi_n(x, b)) \geq n$. Теорема доказана.

Отметим, что на приведенных примерах реализуются все условия, сформулированные в теореме, а сама теорема обобщает основное утверждение из [3].

В заключение автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания, способствовавшие улучшению содержания работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
2. *Справочная* книга по математической логике. Ч. 1: Теория моделей / Под ред. Дж. Барвайса. Пер. с англ. М.: Наука, 1982.
3. *Судоплатов С. В.* Число моделей теорий всюду конечно определенных полигонометрий // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 689–694.

Статья поступила 12 октября 2000 г.

Судоплатов Сергей Владимирович
Новосибирский гос. технический университет,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630099
algebra@nstu.ru; sudoplat@mail.ru