Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 512.554

О ГОМОТОПАХ АЛГЕБР НОВИКОВА

В. А. Середа, В. Т. Филиппов

Аннотация: Пусть Φ — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, содержащее $\frac{1}{2}$. Рассматривается гомотоп алгебры Новикова, т. е. алгебра A_φ, полученная из алгебры Новикова A посредством производной операции $x \cdot y = xy\varphi$ на Φ-модуле A, где отображение φ удовлетворяет равенству $xy\varphi = x(y\varphi)$, и находятся условия, при которых гомотоп алгебры Новикова снова является алгеброй Новикова. Библиогр. 3.

Пусть Φ — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, содержащее $\frac{1}{2}$. Неассоциативная Φ-алгебра A называется Φ-*алгеброй Новикова*, если в A выполняются тождества

$$x(yz) = y(xz), \tag{1}$$

$$(x, y, z) = (x, z, y), \tag{2}$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор элементов x, y, z (алгебры Новикова были впервые введены в [1]).

В статье рассматривается гомотоп алгебры Новикова, т. е. алгебра A_φ, полученная из алгебры Новикова A посредством производной операции $x \cdot y = xy\varphi$ на Φ-модуле A, где отображение φ удовлетворяет равенству $xy\varphi = x(y\varphi)$, и находятся условия, при которых гомотоп алгебры Новикова снова является алгеброй Новикова.

Далее через A и V обозначим соответственно произвольную Φ-алгебру Новикова и произвольную неассоциативную Φ-алгебру. Для сокращения записи слова вида $U = (\dots((x_1x_2)x_3)\dots)x_n$ будем записывать без скобок: $U = x_1x_2x_3\dots x_n$. Если не оговорено противное, будем предполагать, что $x, y, z, \dots$ — произвольные элементы алгебры V (алгебры A).

Правым и левым умножениями на x называются соответственно отображения $R_xy \to yx$ и $L_xy \to xy$ элемента $y \in V$. *Алгеброй правых умножений (левых умножений) алгебры* V называется подалгебра $R(V)$ (подалгебра $L(V)$) алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_\Phi V$ Φ-модуля V, порожденная тождественным эндоморфизмом ε и всеми правыми умножениями R_x (левыми умножениями L_x), где $x \in V$.

Следуя [2], отображение $\varphi \in \mathrm{End}_\Phi V$ назовем $\frac{1}{2}$-*дифференцированием алгебры* V, если для любых $x, y \in V$ выполняется равенство

$$xy\varphi = \frac{1}{2}x\varphi y + \frac{1}{2}x(y\varphi). \tag{3}$$

Далее будем использовать следующие обозначения: $x \circ y = xy + yx$ — j-умножение; $(x, y, z)_o = (x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z)$ — j-ассоциатор элементов x, y, z; $[x, y] = xy - yx$ — коммутатор элементов x и y; $V^{(-)}$ — коммутаторная алгебра алгебры V, т. е. антикоммутативная Φ-алгебра, определенная на

Ф-модуле V посредством операции коммутирования $[x,y]=xy-yx$; $\Gamma_l(V)$ — левый центроид алгебры V, т. е. централизатор алгебры $L(V)$ в алгебре $\operatorname{End}_\Phi V$; $\Delta(V)$ — множество $\frac{1}{2}$-дифференцирований алгебры V; $C(V)=\Gamma_l(V)\cap\Delta(V^{(-)})$.

По определению $\Gamma_l(V)$, $\varphi\in\Gamma_l(V)$ тогда и только тогда, когда

$$xy\varphi=x(y\varphi) \tag{4}$$

для любых $x,y\in V$.

Из тождества (1) следует, что $L(A)\subseteq\Gamma_l(A)$ и, в частности, $L(A)$ — коммутативная подалгебра алгебры $\operatorname{End}_\Phi(A)$.

Если $\varphi\in\Gamma_l(V)$, то в силу (4) для любых $x,y,z\in V$ имеем равенство

$$(x,y,z)\varphi=xyz\varphi-x(yz)\varphi=xy(z\varphi)-x(yz\varphi)=xy(z\varphi)-x(y(z\varphi))=(x,y,z\varphi). \tag{5}$$

Отсюда и из тождества (2) для любых $x,y,z\in A$, $\varphi\in\Gamma_l(A)$ получим равенство

$$(x,y,z)\varphi=(x,z,y)\varphi=(x,z,y\varphi)=(x,y\varphi,z). \tag{6}$$

Пусть $\varphi\in\Gamma_l(V)$. Легко проверить, что в алгебре V следующие равенства равносильны:

$$[x,y]\varphi=\frac{1}{2}[x\varphi,y]+\frac{1}{2}[x,y\varphi], \tag{7}$$

$$[x,y]\varphi=x\varphi y-y\varphi x, \tag{8}$$

$$x\varphi\circ y=y\varphi\circ x. \tag{9}$$

Следовательно, $\varphi\in C(A)$ тогда и только тогда, когда выполняются (4) и одно из равенств (7)–(9).

1. Гомотопы и изотопы алгебр Новикова

Пусть φ — произвольный фиксированный элемент алгебры $\operatorname{End}_\Phi V$. Определим на Ф-модуле алгебры V новое умножение $(\cdot)$, положив

$$x\cdot y=xy\varphi \tag{10}$$

для любых $x,y\in V$. Ф-модуль V относительно умножения $(\cdot)$ становится Ф-алгеброй, которую назовем *гомотопом* алгебры V и обозначим через V_φ. Если φ — обратимый элемент $\operatorname{End}_\Phi V$, то гомотоп V_φ назовем *изотопом* алгебры V.

Теорема 1.1. *Если A — Ф-алгебра Новикова ($\frac{1}{2}\in\Phi$), φ — произвольный элемент из $C(A)$, то гомотоп A_φ является алгеброй Новикова.*

Доказательство. В силу (10), (4) и тождества (1)

$$x\cdot(y\cdot z)-y\cdot(x\cdot z)=x(yz\varphi)\varphi-y(xz\varphi)\varphi=x(yz)\varphi^2-y(xz)\varphi^2=[x(yz)-y(xz)]\varphi^2=0.$$

Следовательно, в алгебре A_φ выполняется тождество (1).

Пусть $(x,y,z).=(x\cdot y)\cdot z-x\cdot(y\cdot z)$ — ассоциатор элементов x, y, z в алгебре A_φ. Применив последовательно (4), (8), (5), (6) и (2), получим

$$\begin{aligned}(x,y,z).-(x,z,y).&=x\cdot y\cdot z-x\cdot(y\cdot z)-x\cdot z\cdot y+x\cdot(z\cdot y)\\ &=xy\varphi z\varphi-x(yz\varphi)\varphi-xz\varphi y\varphi+x(zy\varphi)\varphi\\ &=xy\varphi z\varphi-x(yz)\varphi^2-xz\varphi y\varphi+x(zy)\varphi^2=[xy\varphi z-x(yz)\varphi-xz\varphi y+x(zy)\varphi]\varphi\\ &=[xy\varphi z-xz\varphi y-x[y,z]\varphi]\varphi=[x(y\varphi)z-x(z\varphi)y-x[y,z]\varphi]\varphi\\ &=[x(y\varphi z)+(x,y\varphi,z)-x(z\varphi y)-(x,z\varphi,y)-x([y,z]\varphi)]\varphi\\ &=[x(y\varphi z-z\varphi y-[y,z]\varphi)+(x,y\varphi,z)-(x,z\varphi,y)]\varphi\\ &=[(x,y,z)\varphi-(x,z,y)\varphi]\varphi=[(x,y,z)-(x,z,y)]\varphi^2=0.\end{aligned}$$

Следовательно, в A_φ выполняется тождество (2), т. е. A_φ — алгебра Новикова. Теорема доказана.

Лемма 1.2. *Если $\varphi, \psi \in C(A)$ и $\varphi\psi = \psi\varphi$, то $\varphi\psi \in C(A)$.*

Доказательство. Пусть $\rho = \varphi\psi$. В силу (4)

$$xy\rho = xy\varphi\psi = x(y\varphi)\psi = x(y\varphi\psi) = x(y\rho).$$

Следовательно, $\rho \in \Gamma_l(A)$. Поскольку $\varphi, \psi \in \Delta(A^{(-)})$, ввиду (9)

$$x\rho \circ y = x\varphi\psi \circ y = y\psi \circ x\varphi = x\varphi \circ y\psi = x\psi\varphi \circ x = y\varphi\psi \circ x = y\rho \circ x.$$

Отсюда $\rho \in \Delta(A^{(-)})$ и, значит, $\rho = \varphi\psi \in C(A)$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. $L(A) \subseteq C(A)$.

Доказательство. С учетом (1) имеем $yzL_x = x(yz) = y(xz) = y(zL_x)$. Поэтому

$$L_x \in \Gamma_l(A). \tag{11}$$

Раскрыв ассоциаторы в тождестве (2), получим тождество

$$xyz - x(yz) = xzy - x(zy),$$

которое можно записать в виде

$$x[y,z] = xyz - xzy, \tag{12}$$

так что $[y,z]L_x = yL_xz - zL_xy$. Тем самым $L_x \in \Delta(A^{(-)})$. Отсюда и из (11) вытекает включение

$$L_x \in C(A). \tag{13}$$

Поскольку по тождеству (1) операторы левого умножения перестановочны, то из включения (13) и леммы 1.2 следует, что любое слово $L_{x_1} \dots L_{x_n} \in L(A)$ лежит в $C(A)$. Но тогда $L(A) \subseteq C(A)$. Лемма доказана.

Замечание 1.4. Пусть $\Gamma(A^{(-)})$ — центроид коммутаторной алгебры $A^{(-)}$ алгебры A, т. е. централизатор алгебры умножений алгебры $A^{(-)}$. Легко видеть, что $\Gamma(A^{(-)}) \subseteq \Delta(A^{(-)})$. Если $\Gamma(A^{(-)}) = \Delta(A^{(-)})$, то по лемме 1.3 имеем включение $L_x \in \Gamma(A^{(-)})$. Тогда в A выполняется тождество

$$x[y,z] = [y,z]L_x = [yL_x, z] = [xy, z].$$

Отсюда

$$(x,y,z) = xyz - x(yz) = [xy,z] + z(xy) - x[y,z] - x(zy) = [xy,z] - x[y,z] = 0,$$

т. е. алгебра A ассоциативна. Следовательно, если A неассоциативна, то $\Gamma(A^{(-)}) \neq \Delta(A^{(-)})$.

Теорема 1.5. *Если A — Φ-алгебра Новикова ($\frac{1}{2} \in \Phi$), φ — произвольный элемент алгебры левых умножений $L(A)$, то ее гомотоп A_φ является Φ-алгеброй Новикова.*

Доказательство вытекает из леммы 1.3 и теоремы 1.1.

Теорема 1.6. *Если V — неассоциативная Φ-алгебра ($\frac{1}{2} \in \Phi$), φ — произвольный обратимый элемент $C(V)$, то изотоп V_φ является Φ-алгеброй Новикова тогда и только тогда, когда V является Φ-алгеброй Новикова.*

Доказательство. Если V — алгебра Новикова, то по теореме 1.1 V_φ также является алгеброй Новикова.

Пусть V_φ — алгебра Новикова. Тогда в V_φ выполняются тождества

$$x \cdot (y \cdot z) = y \cdot (x \cdot z), \quad (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot z) \cdot y - x \cdot (z \cdot y).$$

Отсюда и из определения операции $(\cdot)$ имеем

$$x(yz)\varphi^2 = y(xz)\varphi^2, \tag{14}$$

$$xy\varphi z\varphi - x(yz)\varphi^2 = xz\varphi y\varphi - x(zy)\varphi^2. \tag{15}$$

Поскольку φ обратимо, из (4) вытекает тождество (1), а из (15) — равенство $xy\varphi z - x(yz)\varphi = xz\varphi y - x(zy)\varphi$, откуда

$$xy\varphi z - xz\varphi y = x[y,z]\varphi. \tag{16}$$

Применив последовательно (8), (1), (8), (4) и (16), получим равенство

$$\begin{aligned}
[(x,y,z)-(x,z,y)]\varphi &= xyz\varphi - x(yz)\varphi - xzy\varphi + x(zy)\varphi = xyz\varphi - xzy\varphi - x[y,z]\varphi \\
&= z(xy)\varphi + [xy,z]\varphi - y(xz)\varphi - [xz,y]\varphi - x[y,z]\varphi \\
&= z(xy)\varphi + xy\varphi z - z\varphi(xy) - y(xz)\varphi - xz\varphi y + y\varphi(xz) - x[y,z]\varphi \\
&= x(zy)\varphi + xy\varphi z - z\varphi(xy) - x(yz)\varphi - xz\varphi y + y\varphi(xz) - x[y,z]\varphi \\
&= x(zy)\varphi + xy\varphi z - x(z\varphi y) - x(yz)\varphi - xz\varphi y + x(y\varphi z) - x[y,z]\varphi \\
&= -2x[y,z]\varphi + xy\varphi z - xz\varphi y + x(y\varphi z - z\varphi y) \\
&- 2x[y,z]\varphi + xy\varphi z - xz\varphi y + x([y,z]\varphi) = -x[y,z]\varphi + xy\varphi z - xz\varphi y = 0.
\end{aligned}$$

Так как φ обратимо, отсюда следует тождество (2), т. е. V_φ является алгеброй Новикова. Теорема доказана.

Приведем пример алгебры Новикова U, показывающий, что не для всякого $\varphi \in \Gamma_l(U)$ гомотоп U_φ является алгеброй Новикова.

Пусть U — линейное пространство над полем Φ характеристики $p \neq 2$, $\dim U \geq 2$, $\alpha : U \to \Phi$ — линейный функционал, определенный на U. Введем умножение на U по формуле

$$xy = \alpha(x)y \tag{17}$$

для любых $x, y \in U$.

Легко проверить, что относительно этого умножения пространство U становится ассоциативной алгеброй Новикова. Из (17) вытекает, что левое умножение L_x имеет вид $L_x = \alpha(x)\varepsilon$ для любого $x \in U$, где ε — тождественное отображение. Поэтому L_x перестановочно с любым элементом $\mathrm{End}_\Phi U$, т. е. $\Gamma_l(U) = \mathrm{End}_\Phi U$. Следовательно, $L(U) \neq \Gamma_l(U)$.

Пусть $B = \{e_i\}_{i \in I}$ — базис U, $e_a \in B$. Определим функционал $\alpha(x)$, положив $\alpha(e_i) = 1$ для любого $i \in I$, и линейное отображение φ такое, что $e_a\varphi = e_a$, $e_b\varphi = 0$ для всех $e_b \in B \setminus e_a$. В силу (17)

$$[e_a, e_b]\varphi - e_a\varphi e_b + e_b\varphi e_a = e_a e_b\varphi - e_b e_a\varphi - e_a e_b = e_b\varphi - e_a\varphi - e_b = -e_a - e_b \neq 0.$$

Следовательно, φ не удовлетворяет равенству (8), $\varphi \notin \Delta(U^{(-)})$, $\Gamma_l(U) \not\subseteq \Delta(U^{(-)})$, т. е. $\Gamma_l(U) \neq C(U)$.

Пусть C — 2-мерное подпространство U с базисом e_a, e_b. В силу (17) и определения отображения φ C_φ — подалгебра алгебры U_φ с таблицей умножения базисных элементов

$$e_a \cdot e_a = e_a, e_b \cdot e_a = e_a, e_a \cdot e_b = 0, e_b \cdot e_b = 0.$$

Поскольку

$$(e_a, e_b, e_a)_\cdot - (e_a, e_a, e_b)_\cdot = (e_a \cdot e_b) \cdot e_a - e_a \cdot (e_b \cdot e_a) - (e_a \cdot e_a) \cdot e_b - e_a \cdot (e_a \cdot e_b) = -e_a \neq 0,$$

то C_φ и, значит, U_φ не являются алгебрами Новикова.

2. Гомотопы первичных алгебр Новикова

Далее будет показано, что в любой первичной алгебре Новикова A выполняется равенство $\Gamma_l(A) = C(A)$ и тем самым A_φ является алгеброй Новикова для любого $\varphi \in \Gamma_l(A)$.

Через $[A, A]$ и $M(A)$ обозначим соответственно Ф-подмодуль Ф-модуля A и идеал A, порожденные всеми коммутаторами, а через (A, A, A) и $D(A)$ — Ф-подмодуль Ф-модуля A и идеал A, порожденные всеми ассоциаторами.

Лемма 2.1. *В алгебре A выполняются равенства*

$$[A, A] = M(A), \tag{18}$$

$$(A, A, A) = D(A) \tag{19}$$

и включение

$$D(A) \subseteq M(A). \tag{20}$$

Доказательство. Достаточно показать замкнутость Ф-подмодулей $[A, A]$ и (A, A, A) относительно умножения на элементы из A.

В силу леммы 1.3 $L_x \in \Delta(A^{(-)})$ для любого $x \in A$. Следовательно, в A выполняется тождество

$$x[y, z] = \frac{1}{2}[xy, z] + \frac{1}{2}[y, xz]. \tag{21}$$

Отсюда $x[y, z] \in [A, A]$, $A[A, A] \subseteq [A, A]$, $[y, z]x = x[y, z] + [[y, z], x] \in [A, A]$, $[A, A]A \subseteq [A, A]$. Поэтому выполняется равенство (18).

Вследствие (1)

$$\begin{aligned} t(x, y, z) - (x, y, tz) &= t(xyz) - t(x(yz)) - xy(tz) + x(y(tz)) \\ &= xy(tz) - x(t(yz)) - xy(tz) + x(y(tz)) = -x(t(yz)) + x(y(tz)) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в A выполняется тождество

$$t(x, y, z) = (x, y, tz). \tag{22}$$

В любой неассоциативной алгебре выполняется тождество Тейхмюллера

$$(xy, z, t) - (x, yz, t) + (x, y, zt) - x(y, z, t) - (x, y, z)t = 0. \tag{23}$$

Ввиду (22) $t(x, y, z) \in (A, A, A)$, т. е. $A(A, A, A) \subseteq (A, A, A)$. Отсюда и из (23) имеем включение

$$(x, y, z)t = (xy, z, t) - (x, yz, t) + (x, y, zt) - x(y, z, t) \in (A, A, A),$$

т. е. $(A, A, A)A \subseteq (A, A, A)$. Следовательно, выполняется равенство (19).

В силу (2) и (1)

$$\begin{aligned}2(x, y, z) = (x, y, z) + (x, y, z) = (x, y, z) + (x, z, y) = xyz - x(yz) + xzy - x(zy)\\ = [xy, z] + z(xy) - x(yz) + y(xz) + [xz, y] - x(zy)\\ = [xy, z] + x(zy) - y(xz) + y(xz) + [xz, y] - x(zy) = [xy, z] + [xz, y]. \quad (24)\end{aligned}$$

Из (2) вытекает включение

$$(A, A, A) \subseteq [A, A],$$

из которого и из (18) и (19) получаем включение (20).

Лемма доказана.

Пусть $N_r(V)$ — правоассоциативный центр алгебры V:

$$N_r(V) = \{n \in V; (V, V, n) = 0\}.$$

Если $n \in N_r(A)$, то согласно (2) приходим к равенству

$$(A, n, A) = 0. \quad (25)$$

Лемма 2.2. *Правоассоциативный центр $N_r(A)$ алгебры A является ее идеалом, и выполняется равенство*

$$M(A)N_r(A) = 0. \quad (26)$$

Доказательство. Пусть $n \in N_r(A)$, $x, y, z \in A$. По тождеству (22) и определению $N_r(A)$,

$$(x, y, zn) = z(x, y, n) = 0. \quad (27)$$

С другой стороны, применив последовательно (25), определение $N_r(A)$, (2), (25), (22) и снова (25), получим равенство

$$\begin{aligned}(x, y, nz) = xy(nz) - x(y(nz)) = xynz - (xy, n, z) - x(ynz) + x(y, n, z)\\ = xynz - x(ynz) = x(yn)z + (x, y, n)z - x(ynz)\\ = x(yn)z - x(ynz) = (x, yn, z) = y(x, n, z) = 0. \quad (28)\end{aligned}$$

Из (27) и (28) имеем включение $zn, nz \in N_r(A)$. Следовательно, $N_r(A)$ — идеал A.

По определению $N_r(A)$ и (1)

$$[x, y]n = xyn - yxn = x(yn) + (x, y, n) - y(xn) - (y, x, n) = x(yn) - y(xn) = 0.$$

Отсюда и из леммы 2.1 следует (26). Лемма доказана.

Напомним, что алгебра называется *первичной*, если произведение двух любых ее ненулевых идеалов ненулевое.

Предложение 2.3. *Если A — первичная Φ-алгебра Новикова ($\frac{1}{2} \in \Phi$), то либо A — ассоциативная коммутативная алгебра, либо $N_r(A) = 0$.*

Доказательство. Если A является коммутативной, то по лемме 2.1 A ассоциативна. Если A не является коммутативной, тогда $M(A) \neq 0$ и по лемме 2.2 $N_r(A) = 0$. Предложение доказано.

В связи с предложением 2.3 заметим, что существуют даже простые алгебры Новикова, которые не являются ассоциативными коммутативными алгебрами (см., например, [3]) и, следовательно, имеют нулевой правоассоциативный центр.

Лемма 2.4. *Если a_i, b_i $(i = 1, \dots, k)$ — произвольные элементы из A, удовлетворяющие соотношению*

$$\sum_i (x, a_i, b_i) = 0 \tag{29}$$

для любого $x \in A$, то

$$\sum_i a_i \circ b_i \in N_r(A). \tag{30}$$

Доказательство. В дальнейшем знак суммы будем опускать, считая, что в формулах, содержащих повторяющийся индекс i, имеется в виду суммирование по i от 1 до k.

Применив последовательно (23), (2), (29), (22), (2) и снова (22), получим равенство

$$\begin{aligned}(xa_i, b_i, y) &= (x, a_ib_i, y) - (x, a_i, b_iy) + x(a_i, b_i, y) + (x, a_i, b_i)y \\ &= (x, y, a_ib_i) - (x, a_i, b_iy) + x(a_i, b_i, y) = (x, y, a_ib_i) - b_i(x, a_i, y) + (a_i, b_i, xy) \\ &= (x, y, a_ib_i) - b_i(x, y, a_i) + (a_i, b_i, xy) = (x, y, a_ib_i) - (x, y, b_ia_i) + (a_i, b_i, xy).\end{aligned} \tag{31}$$

По (23), (29), (2), (22), (2) и (29)

$$\begin{aligned}(x, y, a_ib_i) - (x, y, a_i)b_i &= (x, ya_i, b_i) - (xy, a_i, b_i) + x(y, a_i, b_i) \\ &= (x, ya_i, b_i) = (x, b_i, ya_i) = y(x, b_i, a_i) = y(x, a_i, b_i) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(x, y, a_ib_i) = (x, y, a_i)b_i. \tag{32}$$

Используя последовательно (2), (23), (22), (29), (2), (22) и (32), находим

$$\begin{aligned}(xa_i, b_i, y) &= (xa_i, y, b_i) = (x, a_iy, b_i) - (x, a_i, yb_i) + x(a_i, y, b_i) + (x, a_i, y)b_i \\ &= a_i(x, y, b_i) - y(x, a_i, b_i) + x(a_i, y, b_i) + (x, a_i, y)b_i \\ &= a_i(x, y, b_i) + x(a_i, y, b_i) + (x, a_i, y)b_i \\ &= a_i(x, y, b_i) + (x, y, a_i)b_i + x(a_i, y, b_i) = (x, y, a_ib_i) + (a_i, b_i, xy) + (x, y, a_i)b_i \\ &= (x, y, a_ib_i) + (a_i, b_i, xy) + (x, y, a_ib_i) = 2(x, y, a_ib_i) + (a_i, b_i, xy).\end{aligned}$$

Отсюда и из (31) имеем равенство

$$(x, y, a_ib_i) - (x, y, b_ia_i) + (a_i, b_i, xy) = 2(x, y, a_ib_i) + (a_i, b_i, xy),$$

или, после приведения подобных, равенство

$$(x, y, a_i \circ b_i) = 0.$$

Значит, выполняется включение (30). Лемма доказана.

Теорема 2.5. *Если A — первичная Φ-алгебра Новикова ($\frac{1}{2} \in \Phi$), то $\Gamma_l(A)$ — коммутативная подалгебра алгебры $\mathrm{End}_\Phi\, A$ и выполняется равенство*

$$\Gamma_l(A) = C(A). \tag{33}$$

Доказательство. В силу (4) $\Gamma_l(A)$ — подалгебра алгебры $\mathrm{End}_\Phi\, A$. Пусть φ, ψ — произвольные элементы из $\Gamma_l(A)$. По предложению 2.3 либо A — коммутативная ассоциативная алгебра, либо $N_r(A) = 0$.

В первом случае в силу (4) и коммутативности A

$$xy\varphi\psi = x(y\varphi)\psi = y\varphi x\psi = y\varphi(x\psi) = x\psi(y\varphi) = x\psi y\varphi = y(x\psi)\varphi = yx\psi\varphi = xy\psi\varphi.$$

Следовательно, $xy[\varphi,\psi] = 0$ и ввиду (4) $x(y[\varphi,\psi]) = 0$, $y[\varphi,\psi] \in \operatorname{Ann} A$. Но с учетом первичности A будет $\operatorname{Ann} A = 0$. Поэтому $y[\varphi,\psi] = 0$, $[\varphi,\psi] = 0$, т. е. $\Gamma_l(A)$ коммутативна.

Вследствие коммутативности A и (4)

$$[x,y]\varphi - x\varphi y + y\varphi x = -y(x\varphi) + x(y\varphi) = -yx\varphi + xy\varphi = 0.$$

Значит, $\varphi \in \Delta(A^{(-)})$, $\Gamma_l(A) = C(A)$.

Пусть A не является коммутативной, тогда $N_r(A) = 0$. В силу (4)–(6) получим равенство

$$(x,y,z[\varphi,\psi]) = (x,y,z)[\varphi,\psi] = (x,y,z)\varphi\psi - (x,y,z)\psi\varphi$$
$$= (x,y,z\varphi)\psi - (x,y\psi,z)\varphi = (x,y\psi,z\varphi) - (x,y\psi,z\varphi) = 0.$$

Отсюда $z[\varphi,\psi] \in N_r(A)$ и по предложению 2.3 $z[\varphi,\psi] = 0$, $[\varphi,\psi] = 0$, $\Gamma_l(A)$ коммутативна.

В силу (5) и (6)

$$(x,y,z\varphi) - (x,y\varphi,z) = (x,y,z)\varphi - (x,y,z)\varphi = 0.$$

Отсюда и из леммы 2.4 получим включение $y\circ z\varphi - y\varphi\circ z \in N_r(A)$ и, следовательно, по предложению 2.3 $y\circ z\varphi - y\varphi\circ z = 0$, т. е. выполняется равенство (9). Поэтому $\varphi \in \Delta(A^{(-)})$ и верно (33). Теорема доказана.

Из теоремы 1.1 и теоремы 2.5 вытекает

Теорема 2.6. *Если A — первичная Φ-алгебра Новикова ($\frac{1}{2} \in \Phi$), φ — произвольный элемент из $\Gamma_l(A)$, то гомотоп A_φ является алгеброй Новикова.*

В заключение покажем, что можно дать определение первичности алгебр Новикова в более слабой форме.

Назовем алгебру V *слабо первичной*, если для любых идеалов I_1, I_2 алгебры V из равенств $I_1I_2 = 0$, $I_2I_1 = 0$ следует, что либо $I_1 = 0$, либо $I_2 = 0$.

Лемма 2.7. *В алгебре A выполняются равенства*

$$D(A)N_r(A) = 0, \tag{34}$$
$$N_r(A)D(A) = 0. \tag{35}$$

Доказательство. Равенство (34) получаем из лемм 2.1 и 2.2. Для любого $n \in N_r(A)$ в силу (22) и леммы 2.2 имеем $n(x,y,z) = (x,y,nz) = 0$. Отсюда, из лемм 2.1 и 2.2 вытекает (35).

Предложение 2.8. *Φ-алгебра Новикова A ($\frac{1}{2} \in \Phi$) слабо первична тогда и только тогда, когда A первична.*

Доказательство. В силу леммы 2.7 либо алгебра A ассоциативна, либо $N_r(A) = 0$.

В первом случае если I_1, I_2 — идеалы алгебры A такие, что $I_1I_2 = 0$, то идеал I_2I_1 имеет нулевое умножение и, следовательно, ввиду слабой первичности $I_2I_1 = 0$. Но тогда либо $I_1 = 0$, либо $I_2 = 0$. Поэтому алгебра A первична.

Во втором случае из равенства $I_1I_2 = 0$ и (1) следует равенство для любых $a \in I_1$, $b \in I_2$:

$$(x,a,b) = xab - x(ab) = xab - a(xb) = 0.$$

По лемме 2.4 $a\circ b \in N_r(A) = 0$. Значит, $ba = -ab = 0$, $I_2I_1 = 0$, т. е. A первична.

Обратное очевидно. Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балинский А. А, Новиков С. П.* Скобки Пуассона гидродинамического типа, фробениусовы алгебры и алгебры Ли // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 5. С. 1036–1039.
2. *Филиппов В. Т.* δ-Дифференцирования первичных алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 201–213.
3. *Филиппов В. Т.* Об одном классе простых неассоциативных алгебр // Мат. заметки. 1989. Т. 45, № 1. С. 101–105.

Статья поступила 26 октября 2000 г.

Середа Владимир Александрович
Красноярский гос. аграрный университет, ул. Мира, 89, Красноярск 660017
sereda48@mail.ru

Филиппов Валерий Терентьевич