Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2002. Том 43, № 2

УДК 517.95.958

МЕТОД ХИРОТЫ И СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

А. В. Борзых

Аннотация: Методом Хироты получено 1-солитонное решение (3+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера. Библиогр. 8.

Хорошо известно, что нелинейное уравнение Шредингера описывает слабые нелинейные волны, в частности, модулированную волну Алфвена, распространяющуюся вдоль магнитного поля в холодной плазме, называемую солитоном [1], и лазерное пульсирующее распространение в слоях, которое называют оптическим солитоном [2]. Структура $(1+1)$-мерных нелинейных уравнений Шредингера сейчас очень хорошо исследована. Однако многое еще не известно о свойствах многомерных нелинейных эволюционных уравнений. В [3–7] обсуждено $(2+1)$-мерное обобщение интегрируемых нелинейных систем. В этой работе мы построим билинейную форму $(3+1)$-мерного нелинейного уравнения Шредингера и найдем его солитонные решения, используя метод Хироты. Через калибровочную эквивалентность этого уравнения к $(3+1)$-мерной интегрируемой спиновой системе, именуемой непрерывной изотропной спиновой системой ферромагнетика Гейзенберга (см., например, [5]), Р. Мырзакуловым было получено $(3+1)$-мерное нелинейное уравнение Шредингера.

Мы рассмотрим $(3+1)$-мерное нелинейное уравнение Шредингера

$$i\psi_t = \psi_{xy} + \psi_{xz} + V\psi, \tag{1}$$

$$V_x = 2((|\psi|^2)_y + (|\psi|^2)_z) \tag{2}$$

с начальным условием $\psi(x,y,z,t)|_{t=0} = \psi_0(x,y,z)$ и граничным условием $\psi(x,y,z,t) \to 0$, $|x| \to \infty$. Здесь $\psi = \psi(x,y,z,t)$ — комплекснозначная функция (классическое заряженное поле) из пространства Шварца и $|\psi|^2 = \psi\bar{\psi}$ (черта означает комплексное сопряжение).

Если $\psi = R$ и $\bar{\psi} = Q$, то уравнение (1), (2) и его комплексное сопряжение примут вид

$$iR_t = R_{xy} + R_{xz} + VR, \tag{3}$$

$$-iQ_t = Q_{xy} + Q_{xz} + VQ, \tag{4}$$

$$V_x = 2((RQ)_y + (RQ)_z). \tag{5}$$

Подставим $R = R_0\varphi^{-1}$, $Q = Q_0\varphi^{-1}$, $V = V_0\varphi^{-2} + V_1\varphi^{-1}$ в (3)–(5) и, используя D-оператор Хироты [8]

$$D_x^m D_t^n (F \circ G) = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n F(x,t)G(x',t')|_{x'=x,t'=t},$$

получим следующую билинейную форму Хироты для этого уравнения:

$$iD_t(R_0 \circ \varphi) = D_x(D_y + D_z)(R_0 \circ \varphi), \tag{6}$$

$$-iD_t(Q_0 \circ \varphi) = D_x(D_y + D_z)(Q_0 \circ \varphi), \tag{7}$$

$$D_x^2(\varphi \circ \varphi) = 2R_0 Q_0,$$

если $V = 2[(\ln \varphi)_y + (\ln \varphi)_z]_x$.

Уравнения (6), (7) можно записать вместе в простом виде, производя замену $\psi = g\varphi^{-1}$, $\bar{\psi} = \overline{g}\varphi^{-1}$:

$$iD_t(g \circ \varphi) = D_x(D_y + D_z)(g \circ \varphi), \tag{8}$$

$$D_x^2(\varphi \circ \varphi) = 2|g|^2. \tag{9}$$

Представим функции φ и g в виде рядов

$$\varphi = 1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^4\varphi_4 + \ldots, \tag{10}$$

$$g = \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3 + \varepsilon^5 g_5 + \ldots. \tag{11}$$

Здесь ε — формальный параметр. Он может принимать любое конечное значение.

Подставляя (10), (11) в (8), (9), выводим следующие две системы уравнений:

$$\begin{array}{l}
[i\partial_t - \partial_x(\partial_y + \partial_z)]g_1 = 0,\\
[i\partial_t - \partial_x(\partial_y + \partial_z)]g_3 = -[iD_t - D_x(D_y + D_z)](g_1 \circ \varphi_2),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[i\partial_t - \partial_x(\partial_y + \partial_z)]g_{2n+1} = -\displaystyle\sum_{r+s=n}[iD_t - D_x(D_y + D_z)](g_{2r+1} \circ \varphi_{2s})
\end{array} \tag{12}$$

и

$$\begin{array}{l}
\partial_x^2\varphi_2 = g_1\overline{g_1},\\
\partial_x^2\varphi_4 = (g_1\overline{g_3} + g_3\overline{g_1}) - \dfrac{1}{2}D_x^2(\varphi_2 \circ \varphi_2),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\partial_x^2\varphi_{2n} = \displaystyle\sum_{r+s=n}[g_{2r-1}\overline{g}_{2s+1} - \dfrac{1}{2}D_x^2(\varphi_{2r} \circ \varphi_{2s})].
\end{array} \tag{13}$$

Будем искать частное решение уравнения (12) в виде $g_1 = Ae^{ax+by+cz+dt}$. Тогда из (13) имеем

$$\varphi_2 = \frac{A\overline{A}}{(a+\overline{a})^2}e^{(a+\overline{a})x+(b+\overline{b})y+(c+\overline{c})z+(d+\overline{d})t},$$

где

$$\begin{array}{c}
iA_t - (aA)_y - (aA)_z = 0, \quad ia_t - a(a_y + a_z) = 0,\\
ib_t - a(b_y + b_z) = 0, \quad ic_t - a(c_y + c_z) = 0, \quad id - a(b + c) = 0.
\end{array} \tag{14}$$

Заметим, что каждое из этих уравнений тождественно удовлетворяется, если $\varphi_{2r} = 0$, $g_{2r-1} = 0$, $r = 2, 3 \ldots$.

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда получаем точное солитонное решение уравнения (1), (2):

$$\psi = \frac{g_1}{1 + \varphi_2}.$$

Пусть $a = \mathrm{const}$. Тогда общее решение системы (14) имеет вид

$$b = q_1\big(\alpha_1^1 y + \alpha_2^1 z + ia\big(\alpha_1^1 + \alpha_2^1\big)t\big), \quad c = q_2\big(\alpha_1^2 y + \alpha_2^2 z + ia\big(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\big)t\big),$$
$$A = q_3\big(\alpha_1^3 y + \alpha_2^3 z + ia\big(\alpha_1^3 + \alpha_2^3\big)t\big), \quad d = -ia(q_1 + q_2)$$

и мы приходим к 1-солитонному решению уравнения (1), (2):

$$\psi_1 = \frac{q_3 e^{ax+q_1y+q_2z-ia(q_1+q_2)t}}{1 + \frac{|q_3|^2}{(a+\bar{a})^2} e^{(a+\bar{a})x+(q_1+\bar{q}_1)y+(q_2+\bar{q}_2)z+q_4t}},$$

где

$$q_j = q_j\big(\alpha_1^j y + \alpha_2^j z + ia\big(\alpha_1^j + \alpha_2^j\big)t\big), \ j = 1, 2, 3, \quad q_4 = i[\bar{a}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2) - a(q_1 + q_2)],$$

q_j, $j = 1, 2, 3,$ — произвольные дифференцируемые функции.

Пусть $a \neq \mathrm{const}$, в частности,

$$a = \frac{\alpha_5 y + \alpha_6 z + \alpha_7}{t_1 + (\alpha_5 + \alpha_6)it} \neq \mathrm{const}.$$

Тогда имеем общее решение системы уравнений (14):

$$b = q_5\left(\frac{a}{i}\right), \quad c = q_6\left(\frac{a}{i}\right),$$

$$A = (t_1 + (\alpha_5 + \alpha_6)it)q_7(\psi_5, \psi_6), \ d = -ia\left(q_5\left(\frac{a}{i}\right) + q_6\left(\frac{a}{i}\right)\right).$$

Таким образом, получаем 1-солитонное решение (3+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера (1), (2):

$$\psi_2 = \frac{Ae^{ax+q_5y+q_6z-ia(q_5+q_6)t}}{1 + \frac{|(t_1+(\alpha_5+\alpha_6)it)q_7|^2}{(a+\bar{a})^2} e^{(a+\bar{a})x+(q_5+\overline{q_5})y+(q_6+\overline{q_6})z+q_8t}},$$

где $q_l = q_l(a/i)$, $l = 5, 6$, $q_7 = q_7(\psi_5, \psi_6)$, $q_8 = i[\bar{a}(\bar{q}_5 + \bar{q}_6) - a(q_5 + q_6)]$, $\psi_j = \frac{(\alpha_5 y + \alpha_6 z + \alpha_7)^{1/\alpha_j}}{(t_1 + (\alpha_5 + \alpha_6)it)^{1/(\alpha_5+\alpha_6)i}}$, $j = 5, 6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ablowitz M. J. Segur H.* Solitons and the inverse scattering transform. Philadelphia: SIAM, 1980.
2. *Shan-liang Lin, Wen-zheng Wang* N-soliton solution of the modified nonlinear Schrödinger equation // Phys. Rev. E. 1993. V. 48, N 4. P. 3054–3058.
3. *Strachan I. A. B.* Wave solutions of a (2+1)-dimensional generalization of the nonlinear Schrödinger equation // Inverse Problems. 1992. V. 8. P. L21–L27.
4. *Radha R., Lakshmanan M.* Singularity structure analysis and bilinear form of a (2+1)-dimensional generalization of the nonlinear Schrödinger equation // Inverse Problems. 1994. V. 10. P. L29–L33.
5. *Myrzakulov R., Lakshmanan M.* On the geometrical and gauge equivalence of certain (2+1)-dimensional integrable spin model and nonlinear Schrödinger equation. Алматы, 1986.
6. *Блиев Н. К., Мырзакулов Р., Борзых А. В.* Солитонные решения (2+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера // Вестн. НАН РК. 1997. № 1. С. 34–40.
7. *Блиев Н. К., Мырзакулов Р., Борзых А. В.* (2+1)-Мерное нелинейное уравнение Шредингера отталкивающего типа: высшие иерархии и n-солитонные решения // Докл. НАН РК. 1997. № 3. С. 19–27.
8. *Абловиц М. Ж., Сегур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Наука, 1987.

Статья поступила 20 ноября 2000 г.

Борзых Александра Валерьевна
Институт математики МОиН РК, ул. Пушкина, 125, Алматы 480100, Казахстан
alex@math.kz