Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2002. Том 43, № 2

УДК 512.54.02+510.5

О КОНСТРУКТИВИЗИРУЕМОСТИ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МОДУЛЕЙ

И. В. Латкин

Аннотация: Введено понятие кольца с условием конструктивизируемости модулей из какого-либо класса, изучены простейшие свойства таких колец. Найден достаточный признак конструктивизируемости тензорного произведения модулей. Тем не менее оказывается, что существуют такие модули, тензорное произведение которых над кольцом целых чисел не конструктивизируемо. Библиогр. 6.

Пусть M — счетный модуль над счетным кольцом A. Определять его нумерации можно различным образом, например, можно рассматривать одноосновную модель с рекурсивным предикатом, выделяющим элементы кольца, и продолжать, как в [1] или [2]. Мы подойдем к определению нумерации аналогично тому, как это делается в [3, с. 409], а именно, будем говорить, что $\langle M, A, \alpha, \beta\rangle$ — нумерованный модуль, если M — A-модуль, $\langle M, \beta\rangle$ — нумерованная абелева группа с аддитивной записью, $\langle A, \alpha\rangle$ — нумерованное кольцо и, кроме того, существует рекурсивная функция f такая, что $\beta(f(n, m)) = \alpha(n)^*\beta(m)$ при любом $m \in \beta^{-1}(M)$ и всяком $n \in \alpha^{-1}(A)$. При обычных алгебраических построениях: факторизации, образовании прямых и тензорных произведений и т. п., обычно предполагается что все участвующие там модули рассматриваются над одним и тем же кольцом. Мы также будем рассматривать различные нумерации модуля M при какой-то одной фиксированной нумерации α кольца A.

Пусть $\langle A, \alpha\rangle$ — нумерованная алгебраическая система, η — конгруэнтность на A. Тогда на фактор-алгебре A/η естественным образом задается нумерация α/η: при $n \in \omega$ полагается $\alpha\eta(n) \rightleftharpoons \alpha(n)/\eta$. Эту нумерацию будем называть *канонической фактор-нумерацией.* Если B — рекурсивная подалгебра в $\langle A, \alpha\rangle$, то понятно, что $\langle B, \alpha \restriction B\rangle$ — тоже нумерованная алгебра, где $\alpha \restriction B$ — ограничение нумерации α на номерное множество $\alpha^{-1}(B)$. Все кольца, рассматриваемые в данной работе, подразумеваются коммутативными и ассоциативными. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ обладает интересным свойством: любая конструктивная абелева группа $\langle M, \beta\rangle$ есть конструктивный модуль над $\langle \mathbb{Z}, \alpha\rangle$, где α — гёделевская нумерация [2] кольца $\mathbb{Z}$, являющаяся конструктивизацией. Введем и немного изучим следующее свойство колец.

Определение. Будем говорить, что конструктивное кольцо $\langle A, \alpha\rangle$ *отвечает условию* (или *обладает свойством*) *конструктивизируемости модулей из класса* K, если для любого A-модуля M из класса K из конструктивизируемости абелевой группы $\langle M, +\rangle$ следует конструктивизируемость $\langle A, \alpha\rangle$-модуля M. Если K — класс всех модулей, то будем говорить, что $\langle A, \alpha\rangle$ *с условием конструктивизируемости модулей* или согласно [4] *с условием k^*. модулей.*

Лемма 1. 1. *Если $\langle A, \alpha\rangle$ обладает свойством k^*. модулей, J — рекурсивный идеал в $\langle A, \alpha\rangle$, то и $\langle A/J, \alpha/J\rangle$ удовлетворяет условию k^*. модулей.*

2. *Пусть A — рекурсивное подкольцо в $\langle B, \beta\rangle$ и B — существенное расширение кольца A, т. е. $\forall x \in B\,(x \neq 0) \to \exists y \in A\,(y \neq 0 \wedge xy \in A)$. Тогда если $\langle A, \beta \restriction A\rangle$ с условием $k^*_\cdot$ модулей, то и кольцо $\langle B, \beta\rangle$ с условием $k^*_\cdot$ модулей.*

3. *Из условия $k^*_\cdot$ конечно-порожденных модулей кольца $\langle A, \alpha\rangle$ следует свойство $k^*_\cdot$ конечно-порожденных модулей его простого алгебраического расширения $A(c)$ с гёделевской конструктивизацией $\alpha(c)$, продолжающей нумерацию α.*

4. *Свойство $k^*_\cdot$ модулей кольца $\langle A, \alpha\rangle$ и рекурсивность подкольца B позволяют получить условие $k^*_\cdot$ тех B-модулей, на которых определима структура A-модуля.*

Доказательство. 1. Пусть M — модуль над кольцом A/J. На нем можно естественным образом определить структуру A-модуля, полагая $a{\cdot}m = (a/J){\cdot}m$, где $a \in A$, $m \in M$. Тогда конструктивизация β модуля M над $\langle A, \alpha\rangle$ является также конструктивизацией над кольцом $\langle A/J, \alpha/J\rangle$.

2. Покажем, что любая конструктивизация v B-модуля M над кольцом $\langle A, \beta \restriction A\rangle$ также представляет собой конструктивизацию $\langle B, \beta\rangle$-модуля. Остается лишь найти алгоритм нахождения по $\beta(x)$ из B и $v(u) \in M$ такого l, что $\beta(x)^* v(u) = v(l)$. Пусть рекурсивная функция f представляет умножение в $\langle B, \beta\rangle$, а рекурсивная функция g — умножение на скаляр в $\langle M, A, \beta \restriction A, v\rangle$. По условию найдется такое y, что $\beta(x) \cdot \beta(y) = \beta(f(x,y)) \in A$. Выбор y можно сделать эффективно, а именно $y = \mu z\ (z \in \beta^{-1}(A) \wedge f(x,z) \in \beta^{-1}(A))$. Тогда

$$(\beta(x) \cdot \beta(y)) \cdot v(u) = \beta(f(x,y)) \cdot v(u) = v(g(f(x,y),u)).$$

С другой стороны,

$$\beta(x) \cdot (\beta(y) v(u)) = \beta(y) \cdot (\beta(x) v(u)) = \beta(y) \cdot v(l) = v(g(y,l)).$$

Так как $v(g(f(x,y),u)) = v(g(y,l))$, то $l = \mu t(v(g(y,t)) = v(g(f(x,y),u)))$.

3. Пусть M — модуль с порождающими $l_1, \dots, l_n$ над кольцом $A(c)$ и c — корень многочлена степени r над A. Рассмотрим конструктивизацию $\mu\langle A, \alpha\rangle$-модуля M и зафиксируем в ней номера конечного множества элементов $c^i l_j$ $(j = 1, \dots, n,\ i = 1, \dots, r)$. Зная их, можно по любому номеру k элемента кольца $A(c)$ и номеру u элемента модуля M вычислить μ-номер элемента $\alpha(c)(k)\mu(u)$, т. е. μ — конструктивизация $\langle A(c), \alpha(c)\rangle$-модуля M.

Следствие 1.1. *Любое кольцо из интервала $0 \leq \dots \leq n\mathbb{Z} \leq \dots \leq \mathbb{Z} \leq \dots \leq \mathbb{Q}$, а также каждое его фактор-кольцо удовлетворяют условию $k^*_\cdot$ модулей.*

Следствие 1.2. *Всякое конечное алгебраическое расширение кольца $\mathbb{Q}$ обладает свойством $k^*_\cdot$ конечно-порожденных модулей.*

Замечание. В этих следствиях не указаны конструктивизации колец ввиду того, что все они имеют лишь единственные с точностью до рекурсивной эквивалентности конструктивизации. Везде далее будем придерживаться этого правила.

Пример 1. Покажем, что условие $k^*_\cdot$ модулей не распространяется, вообще говоря, с кольца A на кольцо многочленов $A[x]$.

Пусть M — модуль над кольцом $n\mathbb{Z}[x]$ $(n > 1)$ с множеством порождающих $\{e, xe, x^2 e, \dots\}$. Рассмотрим в нем подмодуль N с порождающим множеством $\{n x^i e \mid i \in \mathbb{L}\}$, где $\mathbb{L}$ — рекурсивно-перечислимое нерекурсивное множество. Ясно, что $M/N \models n x^i e = 0$ тогда и только тогда, когда $i \in L$. Отсюда M/N не конструктивизируем как $n\mathbb{Z}[x]$-модуль, так как если $T - k^*_\cdot$ — модуль, u —

произвольный фиксированный элемент из T, то $\{i \mid nx^i u = 0\}$ — рекурсивное множество. Тем не менее $M/N - k^*_\cdot$ — абелева группа. Действительно, пусть j — наименьший элемент в L. Тогда

$$M/N = \sum_{i<j}(x^i e) \oplus \sum_{i\in L}(x^i e)/(nx^i e) \oplus \sum_{i>j, i\notin L}(x^i e)/(n^2 x^i e)$$

$$\cong \sum_{i<j} Z^{(i)} \oplus \sum_{i\in L} Z^{(i)}_n \oplus \sum_{i>j, i\notin L} Z^{(i)}_{n^2} \cong \sum_{i<j} Z^{(i)} \oplus \sum_{i\in \omega} Z^{(i)}_n \oplus \sum_{i\in \omega} Z^{(i)}_{n^2},$$

где $Z^{(i)} = \mathbb{Z}$, $Z^{(i)}_n = \mathbb{Z}_n$ и $Z^{(i)}_{n^2} = \mathbb{Z}_{n^2}$, т. е. N/M — прямая сумма конечного числа групп $\mathbb{Z}$ и счетного числа групп $\mathbb{Z}_n$ и $\mathbb{Z}_{n^2}$, следовательно, по лемме 1.4 $M/N - k^*_\cdot$ — $n\mathbb{Z}$-модуль.

Предложение 1. *Пусть $\langle M, \mu\rangle$, $\langle N, \nu\rangle$ — конструктивные модули над кольцом $\langle A, \alpha\rangle$ с единицей и условием $k^*_\cdot$ модулей. Предположим, что аддитивные группы колец M и N не имеют кручения. Тогда тензорное произведение $M \otimes_A N$ конструктивизируемо.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $M \otimes_A N$ конструктивизируем как абелева группа. Предварительно напомним и докажем ряд утверждений о тензорных произведениях.

Лемма 2 [5]. *Если $\mathbb{Z}$-модули M и N без кручения, то их тензорное произведение $M \otimes_Z N$ — абелева группа без кручения.*

Следствие 2.1. *Пусть модули M и N над кольцом A с единицей — абелевы группы без кручения, тогда $M \otimes_A N$ тоже не имеет кручения.*

Доказательство. Так как абелевы группы M и N со структурой A-модулей без кручения, то и аддитивная группа кольца A не имеет кручения, поэтому можно считать, что $\mathbb{Z}$ — подкольцо в A. Тогда гомоморфизм $\mathbb{Z}$-модулей $M \otimes_A N \to (M \otimes_A N) \otimes A$, определенный по правилу $m \otimes n \mapsto (m \otimes n) \otimes 1$, является вложением [6]. Но M, N, A — это бимодули с действием как кольца A, так и кольца $\mathbb{Z}$. Значит, имеет место цепочка изоморфизмов $\mathbb{Z}$-модулей [6]:

$$(M \otimes_A N) \otimes_Z A \cong M \otimes_A (N \otimes_Z A) \cong M \otimes_A (A \otimes_Z N) \cong (M \otimes_A A) \otimes_Z N \cong (M \otimes_Z N).$$

По лемме $M \otimes_Z N$ без кручения, отсюда и абелева группа $M \otimes_A N$ не имеет кручения.

Вернемся к доказательству предложения. По конструктивизациям кольца A и модулей M и N строится гёделевская нумерация τ свободного модуля $A \cdot (M \times N)$, которая является конструктивизацией. Модуль D, порожденный элементами видов $(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$, $(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$, $a(m, n) - (am, n)$, $a(m, n) - (m, an)$, где $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $a \in A$, в этой конструктивизации рекурсивно-перечислим, поэтому каноническая фактор-нумерация τ/D модуля $A(M \times N)/D = M \otimes_A N$ позитивная. Ввиду следствия 2.1 $M \otimes_A N$ — конструктивизируемая абелева группа как позитивно нумерованная абелева группа без кручения [4].

В дальнейшем условимся называть нумерацию τ/D канонической нумерацией тензорного произведения $M \otimes_A N$; ее можно строить по любым нумерациям модулей M и N.

Предложение 2. *Пусть $\langle M, A, \mu\rangle$ — конструктивный модуль, N — свободный A-модуль со счетной базой. Тогда каноническая нумерация тензорного* *произведения $M \otimes_A N$ является конструктивизацией, в частности, это верно, когда $N = A[x]$.*

Доказательство. Пусть $N = \sum_{n\in\omega} A \cdot e_n$. Тогда $M \otimes_A N \cong \sum_{n\in\omega} (M \otimes_A Ae_n)$, но $M \otimes_A Ae_n \cong M$.

Теорема. *Существуют конструктивные $\mathbb{Z}$-модули $\langle M, \mu\rangle$ и $\langle N, \nu\rangle$ такие, что $M \otimes N$ не конструктивизируемо.*

Доказательство. Определим M как прямую сумму квазициклических групп $C_{p_i^\infty}$ по всем простым p_i, $i \in \omega$.

Пусть рекурсивная функция f перечисляет без повторения рекурсивно-перечислимое нерекурсивное множество L. Модуль N зададим как прямую сумму $\sum_{j\in\omega} \overline{Q}_{p_j} \otimes A_j$, где $\overline{Q}_{p_j}$ — подгруппа группы Q, состоящая из чисел вида m/n таких, что $(m,n) = 1 \to p_j \nmid n$; $A_j = (a_j)/(p_j^l \cdot a_j)$, если $f(l) = j$, а если $j \notin L$, то $A_j = (a_j) \cong \mathbb{Z}$. Абелева группа N имеет естественное рекурсивное представление. Покажем, что в этом представлении разрешима проблема равенства. Действительно, всякий элемент b из N однозначно представим в виде конечной суммы элементов вида $b_j \otimes c_j$, где $b_j \in \overline{Q}_{p_j}$, $c_j \in A_j$, причем $b = 0$ равносильно тому, что все слагаемые $b_j \otimes c_j$ равны нулю. Запишем $b_j \neq 0$ в виде несократимой дроби $p_j^r m/n$ так, чтобы $(p_j^r, m) = 1$. Если одно из чисел $f(0), f(1), \dots, f(r)$ равно j, то $j \in L$ и

$$\overline{Q}_{p_j} \otimes \mathbb{Z}_{p_j}^l \vDash \big(p_j^r m/n\big) \otimes c_j = \big(p_j^{r-l} m/n\big) \otimes p_j^l c_j = \big(p_j^{r-l} m/n\big) \otimes 0 = 0.$$

В том случае, когда ни одно из чисел $f(0), f(1), \dots, f(r)$ не равно j, то даже если $j \in L$, то $j = f(l)$ для $l > r$ и поэтому $\overline{Q}_{p_j} \otimes \mathbb{Z}_{p_j}^l \vDash p_j^r m/n \otimes c_j \neq 0$ при c_j, не делящемся на p_j^{l-r}. Это следует из того, что $\overline{Q}_{p_j} \otimes \mathbb{Z}_{p_j}^l = \overline{Q}_{p_j} \otimes_Z \mathbb{Z}/p_j^l\mathbb{Z} \cong \overline{Q}_{p_j}/p_j^l \overline{Q}_{p_j}$ [6].

Однако мы не знаем, существует ли такое $l > r$, что $f(l) = j$, и если существует, то какое оно. Но это и не нужно: находим максимальное t, при котором c_j делится на p_j^t в кольце $\mathbb{Z}_{pj}^{t+r}$ и при $t > 0$ проверяем включение $j \in \{f(r+1), \dots, f(r+t)\}$. Если оно верно, то $m/n \otimes c_j = 0$, а если нет, то $m/n \otimes c_j \neq 0$. Тем более, если $j \notin L$, то $\overline{Q}_{p_j} \otimes A_j = \overline{Q}_{p_j} \otimes \mathbb{Z} \vDash b_j \otimes c_j \neq 0$ при $b_j \neq 0$ и $c_j \neq 0$.

Таким образом, в группе N разрешима проблема равенства и, значит, N конструктивизируем.

Далее,

$$M \otimes N = \sum_{i\in\omega} \sum_{j\in\omega} C_{p_i^\infty} \otimes (\overline{Q}_{p_j} \otimes A_j).$$

При $i \neq j$

$$C_{p_i^\infty} \otimes (\overline{Q}_{p_j} \otimes A_j) \cong (C_{p_i^\infty} \otimes \overline{Q}_{p_j}) \otimes A_j.$$

Пусть $c \in C_{p_i^\infty}$, $p_i^t c = 0$ и $m/n \in \overline{Q}_{p_j}$. Тогда

$$c \otimes m/n = c \otimes \big(p_i^t m/n p_i^t\big) = 0 \otimes \big(m/n p_i^t\big) = 0,$$

т. е. $C_{p_i^\infty} \otimes \overline{Q}_{p_j} = 0$.

Когда $i = j$ и $i \in L$, существует такое l, что $f(l) = i$ и

$$C_{p_i^\infty} \otimes \big(\overline{Q}_{p_j} \otimes \mathbb{Z}_{pi}^l\big) \cong \big(C_{p_i^\infty} \otimes \mathbb{Z}_{pi}^l\big) \otimes \overline{Q}_{p_j}.$$

Но $C_{p_i^\infty} \otimes \mathbb{Z}^l_{pi} = 0$ ввиду полноты квазициклической группы. Если $i = j$ и $i \notin L$, то

$$C_{p_i^\infty} \otimes (\overline{Q}_{p_j} \otimes A_i) = C_{p_i^\infty} \otimes (\overline{Q}_{p_j} \otimes \mathbb{Z}) \cong C_{p_i^\infty} \otimes \overline{Q}_{p_j} \neq 0$$

ввиду того, что квазициклическая группа — это индуктивный предел циклических групп $\mathbb{Z}^r_{pi}$, а тензорное произведение перестановочно с индуктивными пределами [6], т. е.

$$C_{p_i^\infty} \otimes (\overline{Q}_{p_j} \otimes A_i) \cong \varinjlim (\mathbb{Z}^r_{pi} \otimes \overline{Q}_{p_j}) \cong \varinjlim \overline{Q}_{p_j}/p_j^r \overline{Q}_{p_j}.$$

Следовательно,

$$M \otimes N = \sum_{i \notin L} C_{p_i^\infty} \otimes \overline{Q}_{p_i}.$$

Так как в каждом прямом слагаемом есть элементы только порядка p_i^r, то во всей прямой сумме элементы простых порядков могут быть лишь в отдельном слагаемом. Отсюда если $T(S) = \{i \mid \exists x(p_i x = 0 \vee x \neq 0)\}$, то $T(M \otimes N) = \overline{L} \in \prod_1^0 \setminus \sum_1^0$, однако для конструктивизируемого $\mathbb{Z}$-модуля S $T(S)$ должно быть рекурсивно-перечислимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* Конструктивные алгебры // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 3–60.
2. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
3. *Stoltenberg-Hansen V., Tucker J. V.* Computable rings and fields // Handbook of computability theory. New York; Amsterdam: Elsevier scientific publ., 1999. P. 365–447.
4. *Хисамиев Н. Г.* Иерархии абелевых групп без кручения // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 2. С. 205–226.
5. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.
6. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 17 мая 2000 г.

Латкин Иван Васильевич
Восточно-Казахстанский гос. университет, кафедра алгебры и геометрии,
ул. 30-й Гвардейской дивизии, 34, Усть-Каменогорск 492036, Казахстан
vkgu@ukg.kz