Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 510.5

МИНИМАЛЬНЫЕ НАКРЫТИЯ В ПОЛУРЕШЕТКАХ РОДЖЕРСА Σ_n^0–ВЫЧИСЛИМЫХ НУМЕРАЦИЙ

С. А. Бадаев, С. Ю. Подзоров

Аннотация: Исследован вопрос о существовании минимальных и строго минимальных накрытий в полурешетках Роджерса Σ_n^0-вычислимых нумераций арифметических множеств для $n \geq 2$. Найдены два достаточных признака существования минимальных накрытий и одно достаточное условие существования строго минимальных накрытий. Полностью решен вопрос о минимальных накрытиях в полурешетках Роджерса для конечных семейств арифметических множеств.

Ключевые слова: полурешетка Роджерса, нумерация, минимальное накрытие

Понятие Σ_n^0-вычислимой нумерации семейства арифметических множеств введено С. С. Гончаровым и А. Сорби в рамках предложенного ими в [1] подхода к определению понятия вычислимости для семейств объектов, допускающих описание в эффективно заданном языке. Оно является обобщением классического понятия вычислимой нумерации [2] — традиционного объекта исследований в теории нумераций. В упомянутой монографии [2] можно найти множество теорем, относящихся к структурным свойствам полурешеток Роджерса вычислимых нумераций.

Изучение алгебраических свойств полурешеток Роджерса для обобщенного случая (понятие Σ_1^0-вычислимости совпадает с классическим понятием вычислимости; случай Σ_n^0-вычислимости для $n \geq 2$ мы называем обобщенным) начато С. А. Бадаевым и С. С. Гончаровым в [3]. В этой работе ими исследован ряд алгебраических свойств таких полурешеток, в том числе найдено одно достаточное условие для существования минимальных накрытий.

Впервые вопрос о существовании минимальных накрытий был изучен А. Лахланом [4]: он показал, что в полурешетке рекурсивно перечислимых m-степеней (изоморфной полурешетке вычислимых нумераций двухэлементного множества $\{\varnothing, 0\}$) минимальные накрытия существуют для любой не наибольшей m-степени. Впоследствии рядом авторов [5–7] были получены результаты, относящиеся к существованию накрытий из более широкого класса для полурешеток Роджерса вычислимых нумераций.

В предлагаемой вниманию читателей статье исследуется вопрос о существовании минимальных накрытий для полурешеток Роджерса Σ_n^0-вычислимых нумераций в обобщенном случае. Достаточный признак существования минимального накрытия из [3] существенно усилен; найдены два новых признака. Полностью решен вопрос о существовании минимальных накрытий в полурешетках Роджерса обобщенно вычислимых нумераций конечного семейства.

Исследования первого автора поддержаны INTAS (грант № 97–139), исследования второго автора частично поддержаны INTAS (грант № 97–139), фондом «Университеты России» и ФЦП «Интеграция».

§ 1. Основные понятия и обозначения

Мы будем придерживаться обозначений, принятых в [1, 3]. Понятия нумерации и сводимости нумераций читатель может найти в [2].

Для не более чем счетного непустого семейства S подмножеств натурального ряда нумерацию $\nu : \mathbb{N} \to S$ этого семейства будем называть Σ^0_n-*вычислимой*, если множество $\{\langle x, y\rangle : x \in \nu y\}$ принадлежит классу Σ^0_n арифметической иерархии. Множество всех Σ^0_n-вычислимых нумераций семейства S мы обозначаем через $\mathrm{Com}^0_n(S)$. Отношение сводимости нумераций задает на $\mathrm{Com}^0_n(S)$ предпорядок: факторизуя его по индуцированному им отношению эквивалентности, мы получаем верхнюю полурешетку [2], которую обозначаем через $\mathscr{R}^0_n(S)$ и называем *полурешеткой Роджерса* семейства S. Элемент полурешетки Роджерса, содержащий нумерацию ν, обозначаем через $\deg(\nu)$.

Отметим, что понятие Σ^0_n-вычислимой нумерации эквивалентно классическому понятию вычислимой нумерации, релятивизированному относительно тьюринговой степени множества $\varnothing^{(n-1)}$.

Для $\nu, \mu \in \mathrm{Com}^0_n(S)$ через $\nu \oplus \mu$ мы обозначаем прямую сумму этих нумераций [2]. Если A — непустое рекурсивно-перечислимое множество, а $\nu \in \mathrm{Com}^0_n(S)$, то под ν_A мы понимаем нумерацию некоторого подсемейства в S, определенную следующим образом: если f — всюду определенная вычислимая функция, область значений которой совпадает с A, то $\nu_A = \nu f$. С точностью до эквивалентности нумераций это определение не зависит от выбора функции f.

Отметим три достаточно очевидных свойства введенного обозначения:

1) $A \subseteq B \to \nu_A \le \nu_B$;

2) $\nu_{A\cup B} \equiv \nu_A \oplus \nu_B$;

3) $\mu \le \nu \to \mu \equiv \nu_A$ для некоторого A.

Доказательства этих свойств читатель может найти в [3].

Нумерацию $\nu \in \mathrm{Com}^0_n(S)$ мы называем *главной* [2], если любая нумерация $\mu \in \mathrm{Com}^0_n(S)$ сводится к ν.

Если ν и μ — Σ^0_n-вычислимые нумерации, то мы говорим, что μ является *минимальным накрытием* ν, если $\nu \le \mu$, $\mu \not\le \nu$ и для любой нумерации $\gamma \in \mathrm{Com}^0_n(S)$ если $\nu \le \gamma \le \mu$, то $\gamma \equiv \nu$ или $\gamma \equiv \mu$. Мы называем μ *строго минимальным накрытием* ν, если $\nu \le \mu$, $\mu \not\le \nu$ и для любой нумерации $\gamma \in \mathrm{Com}^0_n(S)$ если $\gamma \le \mu$, то $\gamma \equiv \mu$ или $\gamma \le \nu$. Ясно, что каждое строго минимальное накрытие является минимальным накрытием.

Если нумерация μ является минимальным (строго минимальным) накрытием нумерации ν, то мы также говорим, что элемент $\deg(\mu)$ полурешетки Роджерса является *минимальным* (*строго минимальным*) *накрытием элемента* $\deg(\nu)$.

Зафиксируем еще несколько обозначений.

Пусть $f_0, f_1, \ldots$ — универсальная вычислимая последовательность всех одноместных частичных вычислимых функций; $W_0, W_1, \ldots$ — универсальная вычислимая последовательность всех рекурсивно-перечислимых множеств.

Для частичной функции f из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ через δf мы обозначаем ее область определения, а через ρf — область значений.

Под *двоичной последовательностью* мы понимаем последовательность конечной длины, составленную из нулей и единиц. Множество всех двоичных последовательностей обозначаем через $2^{<\omega}$, для $\tau \in 2^{<\omega}$ через $|\tau|$ — длину последовательности τ. Двоичную последовательность нулевой длины обозначаем через Λ. Для $\sigma, \tau \in 2^{<\omega}$ под $\tau * \sigma$ мы понимаем последовательность, в которой сначала идут все элементы τ, а потом все элементы σ. Если для некоторой $\rho \in 2^{<\omega}$ выполнено $\sigma = \tau * \rho$, то пишем $\tau \prec \sigma$.

Далее в тексте статьи мы везде предполагаем, что n — некоторое фиксированное натуральное число, большее единицы. Под S всегда будем понимать не более чем счетное семейство подмножеств натурального ряда, для которого $\mathrm{Com}_n^0(S) \neq \varnothing$.

§ 2. Минимальные накрытия

В этом параграфе мы докажем два простых признака существования минимальных накрытий.

Пусть $\nu, \mu \in \mathrm{Com}_n^0(S)$. Мы говорим, что ν *предельно сводится* к μ ($\nu \leq_{\lim} \mu$), если $\nu = \mu f$ для некоторой $\varnothing'$-вычислимой всюду определенной функции f. Мы называем $\nu \in \mathrm{Com}_n^0(S)$ *$\varnothing'$-главной*, если для всех $\gamma \in \mathrm{Com}_n^0(S)$ имеет место предельная сводимость $\gamma \leq_{\lim} \nu$.

По сути, понятия предельной сводимости и $\varnothing'$-главной нумерации — релятивизация понятий сводимости и главной нумерации относительно T-степени множества $\varnothing'$.

Теорема 1. *Если нумерация не является $\varnothing'$-главной, то для нее существует минимальное накрытие.*

Доказательство. Пусть $\nu \in \mathrm{Com}_n^0(S)$ — не $\varnothing'$-главная нумерация и $\gamma \not\leq_{\lim} \nu$. Определим нумерацию $\mu \in \mathrm{Com}_n^0(S)$.

Пусть M — максимальное рекурсивно-перечислимое множество, f — инъективная всюду определенная вычислимая функция из $\mathbb{N}$ в M, для которой $\rho f = M$, и $\overline{M} = \{m_0 < m_1 < \dots\}$.

Для $x \in \mathbb{N}$ полагаем $\mu x = \begin{cases} \nu f^{-1}(x), & x \in M, \\ \gamma i, & x = m_i. \end{cases}$ Ясно, что $\mu \in \mathrm{Com}_n^0(S)$. Так как $\nu \equiv \mu_M$, то $\nu \leq \mu$. Если $\mu \leq \nu$, то $\mu = \nu g$ для вычислимой функции g, и поскольку функция $h : i \mapsto m_i$ $\varnothing'$-вычислима, то $\gamma = \nu(gh)$ и $\gamma \leq_{\lim} \nu$. Наконец, если $\nu \leq \delta \leq \mu$, то $\delta \equiv \mu_D$ для некоторого рекурсивно-перечислимого множества D. Из $\nu \equiv \mu_M$ следует, что $\mu_D \equiv \mu_{D \cup M}$. Возможны такие два случая.

1. Множество $\overline{M} \cap D$ конечно. Тогда $\mu_{D\cup M} \equiv \mu_M$ и $\delta \equiv \nu$.

2. Множество $\overline{M} \setminus D$ конечно. Тогда $\mu_{D\cup M} \equiv \mu_{\mathbb{N}}$ и $\delta \equiv \mu$. $\square$

Следующая теорема, основанная на идеях работы [3], существенно усиливает критерий, предложенный в этой работе.

Теорема 2. *Пусть $\nu \in \mathrm{Com}_n^0(S)$ — нумерация, для которой существует $\varnothing^{(n-1)}$-вычислимая всюду определенная функция f такая, что $\nu x \neq \nu f(x)$ для любого $x \in \mathbb{N}$. Тогда для ν в $\mathrm{Com}_n^0(S)$ существует минимальное накрытие.*

Доказательство. В основе доказательства лежит та же идея, что и в предыдущей теореме.

Пусть M — максимальное рекурсивно-перечислимое множество, g — инъективная всюду определенная вычислимая функция из $\mathbb{N}$ в M, для которой $\rho g = M$, и $\overline{M} = \{m_0 < m_1 < \dots\}$.

Определим нумерацию μ. Для $x \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\mu x = \begin{cases} \nu g^{-1}(x), & x \in M, \\ \nu 0, & x = m_i \text{ и } x \notin \delta f_i, \\ \nu f f_i(x), & x = m_i \text{ и } x \in \delta f_i. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\mu \in \mathrm{Com}_n^0(S)$ и $\nu \equiv \mu_M$. Если $\nu \leq \delta \leq \mu$, то $\delta \equiv \mu_D$ для некоторого рекурсивно-перечислимого множества D и $\mu_D \equiv \mu_{D \cup M}$. Возможны два случая.

1. Множество $\overline{M} \cap D$ конечно. Тогда $\mu_{D \cup M} \equiv \mu_M$ и $\delta \equiv \nu$.

2. Множество $\overline{M} \setminus D$ конечно. Тогда $\mu_{D \cup M} \equiv \mu_{\mathbb{N}}$ и $\delta \equiv \mu$.

Наконец, если $\mu \leq \nu$, то $\mu = \nu f_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Но так как f_i в этом случае всюду определена, то $m_i \in \delta f_i$ и $\mu m_i \neq \nu f_i(m_i)$ по определению μ. □

Замечание 1. Доказанный в [3] результат, касающийся минимальных накрытий, является прямым следствием только что доказанной теоремы. Из наличия множества $A \in S$, для которого $\nu^{-1}(A) \in \Delta_2^0$, напрямую следует существование $\varnothing'$-вычислимой функции, удовлетворяющей условию теоремы 2.

Отметим также, что условие, наложенное на нумерацию ν в теореме 2, представляет собой отрицание ослабленного свойства $\varnothing^{(n-1)}$-предполноты этой нумерации (определение предполной нумерации см. в [2], здесь имеется в виду полная релятивизация этого понятия относительно $\varnothing^{(n-1)}$). Действительно, предполагается, что для нумерации ν существует $\varnothing^{(n-1)}$-вычислимая всюду определенная функция, не обладающая неподвижной точкой.

Следствие 1. *Если S — конечное семейство и в $\langle S, \subseteq \rangle$ нет наименьшего элемента, то для любой нумерации $\nu \in \mathrm{Com}_n^0(S)$ в $\mathrm{Com}_n^0(S)$ существует минимальное накрытие.*

Доказательство. Пусть $\nu \in \mathrm{Com}_n^0(S)$. Покажем, что ν удовлетворяет условиям теоремы 2.

Пусть $S = \{R_1, \dots, R_m\}$ и для $k \leq m$ $R_1, \dots, R_k$ — все минимальные элементы $\langle S, \subseteq \rangle$. Из условия на S следует, что $k \geq 2$. Пусть σ — перестановка множества $\{1, \dots, k\}$ такая, что $\sigma i \neq i$ для всех $1 \leq i \leq k$.

Согласно [2] существует семейство конечных множеств $\{F_1, \dots, F_m\}$ такое, что для всех $1 \leq i, j \leq m$ $F_i \subseteq F_j \leftrightarrow F_i \subseteq R_j \leftrightarrow R_i \subseteq R_j$.

Легко показать (аналогичное утверждение для классического случая вычислимых нумераций см. в [2]), что существует сильно $\varnothing^{(n-1)}$-вычислимая двойная последовательность конечных множеств $\nu^0 x \subseteq \nu^1 x \subseteq \nu^2 x \subseteq \dots$ такая, что $\bigcup\limits_{t \in \mathbb{N}} \nu^t x = \nu x$ для любого $x \in \mathbb{N}$.

Без ограничения общности можно считать, что $\nu x = R_x$ для $1 \leq x \leq k$.

Пусть для $x \in \mathbb{N}$

$$\varphi(x) = \min\{t : (\exists i \leq k)(F_i \subseteq \nu^t x)\}, \quad \psi(x) = \min\{i : F_i \subseteq \nu^{\varphi(x)} x\}.$$

Тогда функция $f = \sigma\psi$ удовлетворяет условиям теоремы 2. □

Следствие 2. *Если S — конечное семейство и в $\langle S, \subseteq \rangle$ нет наименьшего элемента, то в $\mathrm{Com}_n^0(S)$ не существует главной нумерации.*

Замечание 2. Можно показать, что для конечного S в $\mathrm{Com}_n^0(S)$ существует главная нумерация тогда и только тогда, когда в $\langle S, \subseteq \rangle$ есть наименьший элемент.

§ 3. Строго минимальные накрытия

В отличие от двух предыдущих теорема 3, доказанная в этом параграфе, дает достаточный критерий для существования строго минимального накрытия.

Теорема 3. *Если $\alpha \in \mathrm{Com}^0_n(S)$ и для некоторого подсемейства $P \subseteq S$ и вычислимой функции φ существует $\gamma \in \mathrm{Com}^0_n(P)$ такая, что $\gamma \nleq \alpha$ и для всех $x \in \mathbb{N}$ $\alpha\varphi(x) \subseteq \gamma x$, то для α в $\mathrm{Com}^0_n(S)$ существует строго минимальное накрытие.*

Доказательство теоремы основано на идеях Лахлана [4].

Конструкция состоит из двух этапов. На первом этапе происходит раскладка натуральных чисел по ящикам и перечисляется множество U со свойствами, близкими к свойствам максимального множества. Этот этап конструкции полностью эффективен. На втором этапе, использующем вычисления с оракулом, определяется нумерация β, которая является строго минимальным накрытием для α.

Перейдем к описанию первого этапа. Представим себе бесконечную совокупность китайских ящиков. Каждый ящик S содержит три отделения, которые мы обозначаем через S^0, S^1, S^2. Первые два отделения не содержат других ящиков, и в них по ходу конструкции могут находиться натуральные числа; третье отделение также может содержать числа, но оно, кроме того, содержит два аналогичных ящика. Каждый ящик имеет уникальную метку, в качестве которой выступает некоторая двоичная последовательность: существует самый внешний ящик с меткой Λ, который мы обозначаем через S_Λ; ящики, находящиеся в S^2_Λ, имеют метки 0 и 1 и обозначаются через S_0 и S_1 соответственно; ящики в S^2_0 имеют метки 00 и 01 и обозначаются через S_{00} и S_{01}, и т. д. Мы предполагаем, что у нас есть только одна копия каждого натурального числа. Мы говорим, что на некотором этапе конструкции число находится в ящике S, если оно находится в одном из отделений этого ящика или в одном из ящиков, находящихся в S^2; в последнем случае мы также считаем, что это число находится в S^2. Таким образом, если на некотором шаге мы кладем число в ящик S_σ, то оно после этого находится во всех ящиках S_τ для $\tau \prec \sigma$, и только в этих ящиках.

Рассмотрим ящик S_σ для некоторого $\sigma \in 2^{<\omega}$, и пусть $n^0_\sigma, n^1_\sigma, \ldots$ — натуральные числа, попадающие по ходу конструкции в ящик S_σ и расположенные в том порядке, в котором они попадают в этот ящик. Наша конструкция будет устроена так, что $n^0_\sigma < n^1_\sigma < \ldots$. По мере того как числа прибывают в ящик S_σ, раскладываем их по отделениям этого ящика: сначала в первое, затем во второе, затем в третье, потом опять в первое и т. д. Таким образом, для $j \leq 2$ в S^j_σ последовательно попадают числа $n^j_\sigma < n^{3+j}_\sigma < n^{6+j}_\sigma < \ldots$.

Введем частичный порядок на множестве двоичных последовательностей. Для $\tau, \sigma \in 2^{<\omega}$ будем говорить, что τ *меньше* или *левее*, чем σ, и писать $\tau < \sigma$, если существуют $\rho, \tau', \sigma' \in 2^{<\omega}$ такие, что $\tau = \rho * 0 * \tau'$, $\sigma = \rho * 1 * \sigma'$. В этом случае мы также говорим, что ящик S_τ *расположен слева от ящика* S_σ.

Конструкция первого этапа состоит из последовательно выполняющихся шагов, каждый из которых является шагом одного из трех описанных ниже типов.

Шаг типа 1 для натурального числа x. Для каждого x происходит бесконечно много таких шагов.

Если x еще не перечислено в U, то проверим условие: существует двоичная последовательность σ такая, что x в момент выполнения шага находится в ящике S_σ и для некоторой последовательности $\tau < \sigma$ ящик S_τ содержит число, большее x. Если это условие выполнено, то относим x к множеству U.

Шаг типа 2 для натурального числа i. Для каждого i происходит бесконечно много шагов этого типа.

Ищем наименьшую (т. е. самую левую) последовательность σ такую, что $|\sigma| = i$ и ящик $S_{\sigma*1}$ содержит число x, уже перечисленное в W_i, но еще не перечисленное в U и превосходящее все числа, которые мы до этого момента клали в $S_{\sigma*0}$. Если такая σ найдется, то наименьшее число x с указанным свойством перекладываем в $S_{\sigma*0}$.

Шаг типа 3 для двоичной последовательности σ. Для каждой последовательности σ выполняется бесконечно много таких шагов.

Если в S^2_σ находятся числа, которые еще не побывали в ящике $S_{\sigma*1}$, то мы кладем в $S_{\sigma*1}$ наименьшее из этих чисел.

Перед началом выполнения конструкции положим все натуральные числа в ящик S_Λ. Другими словами, мы считаем, что перед выполнением начального шага S^0_Λ содержит множество чисел $\{3x : x \in \mathbb{N}\}$, S^1_Λ — множество $\{3x+1 : x \in \mathbb{N}\}$, S^2_Λ — множество $\{3x+2 : x \in \mathbb{N}\}$, а все ящики, отличные от S_Λ, пусты.

В следующих пяти леммах мы докажем несколько важных для нас свойств конструкции, не зависящих от того, каким способом мы упорядочим шаги.

Лемма 1. *Для каждого $i \in \mathbb{N}$ существует двоичная последовательность σ длины i такая, что в ящик S_σ попадает бесконечно много чисел. Если σ_i — самая левая из всех таких последовательностей, то $\sigma_i \prec \sigma_{i+1}$, множество $\{x : (\exists\tau)(\tau < \sigma_i \& x$ попадает в $S_\tau)\}$ конечно и лишь конечное число элементов натурального ряда покидает ящик S_{σ_i}.*

Доказательство совпадает с доказательством аналогичного утверждения из работы [4]. Ясно, что $\sigma_0 = \Lambda$ удовлетворяет требуемым свойствам. Предположим, что $\sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \ldots \prec \sigma_i$ существуют и удовлетворяют условиям леммы. Так как бесконечно много чисел попадает в ящик S_{σ_i} и лишь конечное число покидают этот ящик, то бесконечно много чисел попадет в ящик S_{σ_i*1} на шагах типа 3. Следовательно, σ_{i+1} существует, и $\sigma_{i+1} \leq \sigma_i * 1$. По индукционному предположению $\sigma_{i+1} \not< \sigma_i$, значит, $\sigma_i \prec \sigma_{i+1}$. Множество чисел, попадающих в ящики, расположенные левее $S_{\sigma_{i+1}}$, конечно, так как $\tau < \sigma_{i+1}$ влечет $\tau < \sigma_i \vee \sigma_i \prec \tau$. Поскольку каждое число, покидая $S_{\sigma_{i+1}}$, попадает в один из ящиков, расположенных слева от $S_{\sigma_{i+1}}$, то множество чисел, покидающих $S_{\sigma_{i+1}}$, конечно. $\square$

Для $\tau \in 2^{<\omega}$ через S^*_τ обозначим множество чисел, которые на некотором шаге конструкции попадают в ящик S_τ и не покидают его впоследствии. Для $j \leq 2$ через S^{*j}_τ обозначим множество чисел из S^*_τ, «оседающих» в соответствующих отсеках ящика S_τ.

Лемма 2. *Пусть $\tau \in 2^{<\omega}$ и $|\tau| = i$. Если $\sigma_i < \tau$, то $S^*_\tau \subseteq U$. Если $\tau \leq \sigma_i$, то множество $(S^{*0}_\tau \cup S^{*1}_\tau) \cap U$ конечно.*

Доказательство. В первом случае для всякого $x \in S^*_\tau$ рассмотрим такой шаг типа 1 для x, на котором x уже находится в S_τ и в S_{σ_i} есть числа, большие x. Тогда после этого шага x окажется перечисленным в U. Во втором случае заметим, что любое число, однажды попав в U, уже не переносится в ящики, расположенные слева от того, в котором оно в данный момент находится. Следовательно, если $x \in S^{*0}_\tau \cup S^{*1}_\tau$ и $x \in U$, то x попало в U, находясь в ящике S_ρ для некоторого $\rho \prec \tau$. В этот момент в ящике S_{ρ_1} для $\rho_1 < \rho$ находилось число, большее x. Однако множество таких чисел конечно. $\square$

Лемма 3. *Отношения «$x \in U$», «число n^k_τ определено» и «$x \in S^*_\tau$» вычислимы с оракулом для $\varnothing'$.*

Доказательство. Отношение «$x \in U$» вычислимо с оракулом для $\varnothing'$, так как U перечислимо. Второе отношение также перечислимо. Для третьего отношения достаточно заметить, что $x \in S^*_\tau$ тогда и только тогда, когда x попадает в S_τ на некотором шаге и для всех $\rho < \tau$ x никогда не попадает в S_ρ. $\square$

Лемма 4. *Для $i \in \mathbb{N}$ если $\sigma_{i+1} = \sigma_i * 0$, то $S^*_{\sigma_{i+1}} \subseteq W_i$, а если $\sigma_{i+1} = \sigma_i * 1$, то $S^*_{\sigma_{i+1}} \cap W_i \subseteq U$.*

Доказательство. То, что $S^*_{\sigma*0} \subseteq W_i$ для любой последовательности σ такой, что $|\sigma| = i$, напрямую следует из описания конструкции. Пусть $\sigma_{i+1} = \sigma_i*1$. Рассмотрим наименьшее число $x \in (S^*_{\sigma_{i+1}} \cap W_i) \setminus U$. Это x больше всех чисел, которые когда-либо попадают в S_{σ_i*0}, так как иначе всякое такое число, однажды попав в S_{σ_i*0}, будет всегда находиться в ящиках, лежащих слева от $S_{\sigma_{i+1}}$, и на достаточно большом шаге x попадет в U. Для последовательности $\sigma < \sigma_i$ такой, что $|\sigma| = i$, условия шага типа 2 для числа i могут выполняться лишь конечное число раз, поскольку для каждой такой σ в ящик $S_{\sigma*1}$ попадает лишь конечное число элементов натурального ряда и любое число, будучи вынутым из $S_{\sigma*1}$, в этот ящик уже не возвращается. Рассмотрим шаг типа 2 для числа i, настолько большой, что ни для какого $\sigma < \sigma_i$ условие этого шага не выполнено для σ, x уже перечислен в W_i, x находится в ящике $S_{\sigma_{i+1}}$ и ни одно число, меньшее x, которое не является элементом $S^*_{\sigma_{i+1}}$, в ящике $S_{\sigma_{i+1}}$ не находится. Тогда на этом шаге вопреки предположению x перейдет в ящик S_{σ_i*0} и больше в ящик $S_{\sigma_{i+1}}$ не вернется. $\square$

Лемма 5. *Для любого $x \in \mathbb{N}$ существует двоичная последовательность τ такая, что $x \in S^{*0}_\tau \cup S^{*1}_\tau$.*

Доказательство. Пусть x — наименьшее число, для которого не существует такой двоичной последовательности. Для $y < x$ через τ_y обозначим последовательность, существование которой для y утверждается в лемме. Пусть на некотором шаге для каждого $y < x$ y уже находится в $S^*_{\tau_y}$, а число i больше, чем любое из чисел вида $|\tau|$, где τ таково, что для некоторого $y \leq x$ y находилось в ящике S_τ после одного из предшествующих шагов. Пусть ρ — такая двоичная последовательность, что $|\rho| \leq i$, на некотором шаге x попадает в ящик S_ρ и для всех $\tau \in 2^{<\omega}$ таких, что $|\tau| \leq i$ и x когда-либо попадает в ящик S_τ, $\rho < \tau$ или $\tau \prec \rho$. Ясно, что $x \in S^*_\rho$. Если $x \in S^{*0}_\rho \cup S^{*1}_\rho$, то лемма доказана. Если же это не так, то $|\rho| = i$ и x — наименьшее число, которое попадает в ящики вида S_τ при $|\tau| > i$. Но тогда $x \in S^{*0}_{\rho*1}$ или $x \in S^{*0}_{\rho*0}$. $\square$

Перейдем к описанию второго этапа конструкции. Все вычисления, производимые на этом этапе, эффективны с оракулом для $\varnothing^{(n-1)}$. На нулевом шаге мы для каждого $x \in \mathbb{N}$ определим значение βx; это значение на последующих шагах может переопределяться, но всегда в «большую» сторону (т. е. если для $s_1, s_2 \in S$ на некотором шаге $\beta x = s_1$, а на большем шаге $\beta x = s_2$, то $s_1 \subseteq s_2$).

Для нумераций α и γ зафиксируем сильно $\varnothing^{(n-1)}$-вычислимые последовательности конечных множеств $\alpha^0 x \subseteq \alpha^1 x \subseteq \dots$ и $\gamma^0 x \subseteq \gamma^1 x \subseteq \dots$ так, чтобы $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{N}} \alpha^t x = \alpha x$, $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{N}} \gamma^t x = \gamma x$. Без ограничения общности можно считать, что для всех x и t $\alpha^t \varphi(x) \subseteq \gamma^t x$. Для $t \in \mathbb{N}$ перед шагом $t+1$ нам известен либо α-номер y множества βx, либо γ-номер z этого множества. В первом случае полагаем $\beta^t x = \alpha^t y$, во втором — $\beta^t x = \gamma^t z$. Из описания конструкции будет следовать, что $\beta^0 x \subseteq \beta^1 x \subseteq \dots$ и $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{N}} \beta^t x \in S$, так что β — нумерация некоторого подсемейства S. После описания шагов конструкции мы покажем, что β — нумерация всего семейства S, удовлетворяющая заключению теоремы.

Нам понадобится «счетчик», показывающий наличие сводимости β к α. Пусть

$$c'(i,t) = \max\{s \le t : (\forall n < s)(\forall x < s)[n \in \delta f_i \& (x \in \alpha^t f_i(n) \leftrightarrow x \in \beta^t n)]\},$$

а $c(i,t) = \max\{c'(i,0), c'(i,1), \dots, c'(i,t)\}$. Легко видеть, что $c(i,t)$ — всюду определенная $\varnothing^{(n-1)}$-вычислимая функция, возрастающая по второму аргументу, для которой $\lim\limits_{t\to\infty} c(i,t) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\beta = \alpha f_i$.

Без ограничения общности можно считать, что каждый элемент семейства S имеет в нумерации α бесконечно много номеров. Пусть l — вычислимая функция такая, что для любого $x \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много $y \in \mathbb{N}$, для которых $l(y) = x$.

Шаг 0. Для каждого $x \in \mathbb{N}$ если $x \in U$, то полагаем $\beta x = \alpha 0$. Если $x \notin U$, то ищем $\tau \in 2^{<\omega}$, для которого $x \in S^{*0}_\tau \cup S^{*1}_\tau$. Если $x = n^{3i}_\tau$, то полагаем $\beta x = \alpha i$; если $x = n^{3i+1}_\tau$, то пусть $\beta x = \alpha\varphi(i)$. Переходим к шагу 1.

Шаг $t+1$. Пусть $i = l(t)$ и $k = c(i,t)$. Рассмотрим самый левый ящик S_τ такой, что $|\tau| = i$ и число n^{3k+1}_τ определено. Для всех $m \le k$ если $n^{3m+1}_\tau \in S^{*1}_\tau \setminus U$, то полагаем $\beta n^{3m+1}_\tau = \gamma m$. Переходим к следующему шагу.

Докажем три леммы, из которых вытекает заключение теоремы.

Лемма 6. *β — нумерация всего семейства S, $\alpha \le \beta$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $\alpha x = \beta(3x)$. □

Лемма 7. *Нумерация β не сводится к α.*

Доказательство. Пусть $\beta = \alpha f_i$. Тогда значение функции $c(i,t)$ неограниченно возрастает. В этом случае, как нетрудно заметить, почти для всех k $\beta n^{3k+1}_{\sigma_i} = \gamma k$. Но тогда $\gamma \le \beta$ и $\gamma \le \alpha$, что противоречит начальным условиям теоремы. □

Лемма 8. *Если δ — нумерация некоторого подсемейства S и $\delta \le \beta$, то $\delta \equiv \beta$ или $\delta \le \alpha$.*

Доказательство. Так как $\delta \le \beta$, то $\delta \equiv \beta_{W_i}$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим следующие множества:

$$A = S^*_{\sigma_{i+1}}, \quad B = \bigcup_{\tau<\sigma_{i+1}} S^*_\tau, \quad C = \bigcup_{k\le i}(S^{*0}_{\sigma_k} \cup S^{*1}_{\sigma_k}).$$

Множество B конечно. Множества A и C рекурсивно-перечислимы (более того, вычислимы) в силу того, что они, за исключением конечного числа элементов, совпадают с множествами чисел, когда-либо попадающих в соответствующие ящики.

Опираясь на лемму 2, легко показать, что $A \cup B \cup C \cup U = \mathbb{N}$. Согласно описанию конструкции β_U — нумерация одноэлементного подсемейства S и $\beta_U \le \alpha$. Очевидно, что β_B также сводится к α.

Докажем, что $\beta_C \equiv \alpha$. Действительно, $\alpha \le \beta_C$, так как $S^{*0}_\Lambda \subseteq C$. С другой стороны, $\beta_C = \beta_{S^{*0}_{\sigma_0}} \oplus \beta_{S^{*1}_{\sigma_0}} \oplus \beta_{S^{*0}_{\sigma_1}} \oplus \ldots \oplus \beta_{S^{*1}_{\sigma_i}}$. Для $k \le i$ имеем $\beta n^{3x}_{\sigma_k} = \alpha x$ для всех x таких, что $n^{3x}_{\sigma_k} \in S^{*0}_{\sigma_k}$; кроме того, поскольку счетчик $c(k,t)$ ограничен, $\beta n^{3x+1}_{\sigma_k} = \alpha\varphi(x)$ почти для всех x таких, что $n^{3x+1}_{\sigma_k} \in S^{*1}_{\sigma_k}$.

Рассмотрим следующие два случая.

1. $\sigma_{i+1} = \sigma_i * 0$. Согласно лемме 4 $A \subseteq W_i$. Так как в нумерации α каждый элемент семейства S имеет бесконечно много номеров, то $\beta_{S^{*0}_{\sigma_{i+1}}} \equiv \alpha$ и $\alpha \le \beta_A \le \beta_{W_i}$. Имеем

$$\beta \equiv \beta_{\mathbb{N}} = \beta_{A\cup B\cup C\cup U} = \beta_{W_i\cup B\cup C\cup U} = \beta_{W_i} \oplus \beta_B \oplus \beta_C \oplus \beta_U \equiv \beta_{W_i} \oplus \alpha \equiv \beta_{W_i}.$$

2. $\sigma_{i+1} = \sigma_i * 1$. Тогда

$$\beta_{W_i} = \beta_{(W_i\cap A)\cup(W_i\cap B)\cup(W_i\cap C)\cup(W_i\cap U)} \equiv \beta_{W_i\cap A} \oplus \beta_{W_i\cap B} \oplus \beta_{W_i\cap C} \oplus \beta_{W_i\cap U}.$$

Второй и четвертый члены суммы сводятся к α, так как B конечно, а β_U — нумерация одноэлементного подсемейства. Третий член суммы сводится к α, ибо $\beta_C \equiv \alpha$. Наконец, $\beta_{W_i\cap A} \le \alpha$, поскольку $W_i \cap A \subseteq U$ по лемме 4 и $\beta_{W_i\cap A}$ — нумерация одноэлементного подсемейства. $\square$

Лемма 8 завершает доказательство теоремы 3. $\square$

Замечание 3. Формулировку теоремы 3 можно усилить. Достаточно предполагать, что φ — $\varnothing^{(n-1)}$-вычислимая функция и нумерация $\alpha\varphi$ сводится к α.

Следствие 3. *Если $\alpha \in \mathrm{Com}^0_n(S)$ и для некоторого подсемейства $P \subseteq S$ такого, что для некоторого $s_0 \in S$ $(\forall p \in P)(s_0 \subseteq p)$ существует $\gamma \in \mathrm{Com}^0_n(P)$ такая, что $\gamma \not\le \alpha$, то для α в $\mathrm{Com}^0_n(S)$ существует строго минимальное накрытие.*

Следствие 4. *Если семейство S содержит наименьший по включению элемент, то для каждой неглавной нумерации из $\mathrm{Com}^0_n(S)$ в $\mathrm{Com}^0_n(S)$ существует строго минимальное накрытие.*

Следствие 5. *Если семейство S конечно, то для каждой неглавной нумерации из $\mathrm{Com}^0_n(S)$ в $\mathrm{Com}^0_n(S)$ существует минимальное накрытие.*

Вопрос о том, всегда ли для неглавной нумерации $\nu \in \mathrm{Com}^0_n(S)$ существует минимальное (строго минимальное) накрытие, пока остается открытым.

Известны примеры накрытий, которые являются минимальными, но не строго минимальными. В связи с этим также представляет интерес ответ на следующий вопрос: если для нумерации $\nu \in \mathrm{Com}^0_n(S)$ существует минимальное накрытие, то всегда ли для нее существует строго минимальное накрытие?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С., Сорби А.* Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 621–641.
2. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
3. *Бадаев С. А., Гончаров С. С.* О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. 2001. Т. 39, № 5. С. 455–475.
4. *Lachlan A. H.* Two theorems on many-one degrees of recursively enumerable sets // Алгебра и логика. 1972. V. 11, N 2. P. 216–229.
5. *Ершов Ю. Л., Лавров И. А.* Верхняя полурешетка $L(\mathfrak{S})$ // Алгебра и логика. 1979. Т. 12, № 2. С. 167–189.
6. *Вьюгин В. В.* Сегменты рекурсивно перечислимых m-степеней // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 6. С. 635–654.
7. *Вьюгин В. В.* О верхних полурешетках нумераций // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217, № 4. С. 749–751.

Статья поступила 29 марта 2001 г.

Бадаев Серикжан Агыбаевич
Казахский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Масанчи, 39/47, Алматы 480012, Казахстан

Подзоров Сергей Юрьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
podz@math.nsc.ru