Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 513.588

О ЗАДАЧАХ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА С ТЕКУЩИМИ ГИПЕРПЛОСКОСТЯМИ

С. С. Кутателадзе

Аннотация: Изложен аналитический подход к задачам изопериметрического типа, в которых ищутся выпуклые фигуры, разделенные текущими гиперплоскостями.

Ключевые слова: смешанный объем, внутренняя задача Урысона, двойной пузырь

А. Д. Александров обогатил выпуклую геометрию методами функционального анализа и теории меры (см. [1]). Цель настоящей заметки — привлечь внимание к некоторым дополнительным аналитическим возможностям при исследовании такими методами изопериметрических проблем теории выпуклых поверхностей, связанных с оптимальным размещением нескольких фигур в ячейках, разделенных гиперплоскостями из заданных семейств. Их принято называть *задачами с текущими многогранниками.* Они относятся к классу экстремальных *задач со свободными границами* и представляют значительный интерес с точки зрения приложений, связанных с оптимальным размещением фигур. Примерами могут служить «выпуклые» варианты и аналоги задачи о «двойном пузыре» и подобные «мыльные» вопросы (см. [2–4] и приведенную там литературу). В заметке приводится модельный пример, иллюстрирующий возможность введения дополнительных ограничений включения в изопериметрических задачах типа двойного пузыря с текущими многогранниками. Подобная возможность анонсирована в [5].

Как известно, классическая *двойственность Минковского* состоит в отождествлении выпуклого компактного подмножества $\mathfrak{x}$ пространства $\mathbb{R}^N$ и его опорной функции $\mathfrak{x}(z) := \sup\{(x,z) \mid x \in \mathfrak{x}\}$ для $z \in \mathbb{R}^N$. Рассматривая элементы $\mathbb{R}^n$ как одноточечные фигуры, считают, что $\mathbb{R}^n$ включено в совокупность всех выпуклых компактов $\mathscr{V}_N$ пространства $\mathbb{R}^N$. Двойственность Минковского индуцирует в $\mathscr{V}_N$ структуру конуса в пространства $C(S_{N-1})$ непрерывных функций на единичной евклидовой сфере S_{N-1} — границе шара $\mathfrak{z}_N$. Эту параметризацию называют *структурой Минковского.* Сложению опорных функций при этом соответствует переход к их алгебраической сумме, называемой *суммой Минковского.* Полезно отметить, что *линейная оболочка* $[\mathscr{V}_N]$ конуса $\mathscr{V}_N$ плотна в $C(S_{N-1})$.

Класс эквивалентных с точностью до переноса выпуклых поверхностей $\{z + \mathfrak{x} \mid z \in \mathbb{R}^N\}$ отождествляют с соответствующей мерой на сфере — с *поверхностной функцией* этого класса $\mu(\mathfrak{x})$. Корректность этой параметризации

Памяти А. Д. Александрова (1912–1999).

определена классической теоремой Александрова о возможности восстановления выпуклой поверхности по заданной поверхностной функции. Поверхностная функция представляет собой *александровскую меру.* Так называют положительную меру на сфере, не сосредоточенную ни в одном сечении сферы гиперподпространством и аннулирующую точки. Александровская мера является инвариантным относительно сдвигов функционалом на конусе $\mathscr{V}_N$. В контексте теории выпуклых тел последнее свойство меры называют инвариантностью относительно сдвигов. Конус положительных инвариантных относительно сдвигов мер в сопряженном пространстве $C'(S_{N-1})$ обозначают через $\mathscr{A}_N$. Уточним некоторые из используемых понятий.

Пусть $\mathscr{V}_N$ — множество выпуклых компактов в $\mathbb{R}^N$. Для $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathscr{V}_N$ символическая запись $\mathfrak{x} =_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{y}$ означает совпадение $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ с точностью до параллельного переноса. Можно сказать, что $=_{\mathbb{R}^N}$ — отношение эквивалентности, связанное с предпорядком $\geq_{\mathbb{R}^N}$ в $\mathscr{V}_N$, выражающим вместимость одной фигуры в другую при помощи параллельного переноса. Рассмотрим фактор-множество $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$, составленное из классов транслятов элементов $\mathscr{V}_N$. Ясно, что $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ — конус в фактор-пространстве $[\mathscr{V}_N]/\mathbb{R}^N$ векторного пространства $[\mathscr{V}_N]$ по подпространству $\mathbb{R}^N$.

Между $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ и $\mathscr{A}_N$ существует естественная биекция. Класс точек отождествляется с нулевой мерой. Классу, содержащему отрезок с концами x и y, сопоставляется мера

$$|x-y|(\varepsilon_{(x-y)/|x-y|} + \varepsilon_{(y-x)/|x-y|}),$$

где $|\cdot|$ — евклидова длина, и для $z \in S_{N-1}$ символ ε_z обозначает *меру Дирака*, сосредоточенную в точке z. Если размерность аффинной оболочки $\mathrm{Aff}(\mathfrak{x})$ представителя $\mathfrak{x}$ класса поверхностей из $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ больше единицы, то считаем, что $\mathrm{Aff}(\mathfrak{x})$ — подпространство $\mathbb{R}^N$ и класс отождествляем с поверхностной функцией $\mathfrak{x}$ в $\mathrm{Aff}(\mathfrak{x})$, являющейся в данном случае некоторой мерой на $S_{N-1} \cap \mathrm{Aff}(\mathfrak{x})$. Продолжая эту меру тривиальным способом до меры на S_{N-1}, получаем элемент из $\mathscr{A}_N$, отвечающий классу, порожденному $\mathfrak{x}$. Биективность этого соответствия легко вытекает из теоремы Александрова.

Структура векторного пространства в множестве регулярных борелевских мер индуцирует в $\mathscr{A}_N$ и, следовательно, в $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ структуру конуса, точнее, структуру $\mathbb{R}_+$-операторной коммутативной полугруппы с сокращением. Эту структуру в $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ и называют *структурой Бляшке.* Подчеркнем, что сумма поверхностных функций $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ порождает единственный класс $\mathfrak{x}\#\mathfrak{y}$, называемый *суммой Бляшке* $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$.

Пусть $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$ — фактор-пространство пространства $C(S_{N-1})$ по подпространству следов линейных функций на S_{N-1}. Обозначим через $[\mathscr{A}_N]$ пространство $\mathscr{A}_N - \mathscr{A}_N$ инвариантных относительно сдвигов мер. Легко видеть, что $[\mathscr{A}_N]$ представляет собой также и линейную оболочку множества александровских мер. Пространства $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$ и $[\mathscr{A}_N]$ приведены в двойственность канонической билинейной формой

$$\langle f, \mu\rangle = \frac{1}{N} \int\limits_{S_{N-1}} f\, d\mu \quad (f \in C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N, \mu \in [\mathscr{A}_N]).$$

Для $\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ и $\mathfrak{y} \in \mathscr{A}_N$ величина $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle$ совпадает со *смешанным объемом* $V_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$. Пространство $[\mathscr{A}_N]$ обычно рассматривают со слабой топологией, порожденной указанной двойственностью с $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$.

Под *двойственным конусом* K^* к данному конусу K в векторном пространстве X, приведенном в двойственность с пространством Y, понимают совокупность положительных линейных функционалов на K, т. е. $K^* := \{y \in Y \mid \langle x, y\rangle\}$. Напомним также, что для выпуклого множества U в X и точки $\bar{x}$ из U определен конус

$$K_{\bar{x}} := \mathrm{Fd}(U, \bar{x}) := \{h \in X \mid (\exists \alpha \geq 0)\ x + \alpha h \in U\},$$

называемый *конусом допустимых направлений* к U в точке $\bar{x}$. В рассматриваемой ситуации известно описание всех необходимых двойственных конусов.

1. *Двойственный конус $\mathscr{A}_N^*$ является конусом положительных элементов в $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$.*

2. *Пусть $\bar{\mathfrak{x}} \in \mathscr{A}_N$. Для конуса $\mathscr{A}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}^*$, двойственного к конусу допустимых направлений в точке $\bar{\mathfrak{x}}$, имеет место представление $\mathscr{A}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}^* = \{f \in \mathscr{A}_N^* \mid \langle \bar{\mathfrak{x}}, f\rangle = 0\}$.*

Пусть μ и ν — положительные меры на сфере $C(S_{N-1})$. Говорят, что μ *линейно сильнее* ν, и пишут $\mu \gg_{\mathbb{R}^N} \nu$, если для каждого разбиения ν в сумму конечного числа положительных слагаемых $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_m$ найдется разбиение μ в сумму конечного числа положительных слагаемых $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_m$ такое, что $\mu_k - \nu_k \in [\mathscr{A}_N]$ для всех $k = 1, \ldots, m$.

3. *Пусть $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ — выпуклые фигуры.*
(1) $\mu(\mathfrak{x}) - \mu(\mathfrak{y}) \in \mathscr{V}_N^* \leftrightarrow \mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^N} \mu(\mathfrak{y})$.
(2) *Если $\mathfrak{x} \geq_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{y}$, то $\mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^N} \mu(\mathfrak{y})$.*
(3) $\mathfrak{x} \geq_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{y} \leftrightarrow \mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^2} \mu(\mathfrak{y})$.

4. *Пусть $\bar{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{y}$ — выпуклые фигуры.*
(1) *Если $\mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{x}} \in \mathscr{A}_{N,\bar{\mathfrak{x}}}^*$, то $\mathfrak{y} =_{\mathbb{R}^N} \bar{\mathfrak{x}}$.*
(2) *Если $\mu(\mathfrak{y}) - \mu(\bar{\mathfrak{x}}) \in \mathscr{V}_{N,\bar{\mathfrak{x}}}^*$, то $\mathfrak{y} =_{\mathbb{R}^N} \bar{\mathfrak{x}}$.*

Различие между выпуклым компактом, соответствующим классом транслятов в $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ и отвечающей этому классу мерой в $\mathscr{A}_N$ обычно не проводится, что отражено в использовании единого обозначения для соответствующих объектов.

Можно отметить, что в случае структуры Минковского *объем* $V(\mathfrak{x}) := \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle$ является однородным полиномом степени N_0. По этой причине вычисление его субдифференциала не вызывает затруднений. Особенностью структуры Минковского является сложное строение конуса, двойственного к конусу множеств, описание которого дается с помощью отношения $\gg_{\mathbb{R}^N}$ в пространстве мер $[\mathscr{A}_N]$.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$p : \mathfrak{x} \mapsto V^{1/N}(\mathfrak{x}) \quad (\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N); \quad \widehat{p} : \mathfrak{x} \mapsto V^{(N-1)/N}(\mathfrak{x}) \quad (\mathfrak{x} \in \mathscr{A}_N).$$

В частности, *неравенство Минковского* переписывается в виде $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle \geq p(\mathfrak{x})\widehat{p}(\mathfrak{y})$.

Внутренняя задача Урысона с текущей гиперплоскостью. *Найти две выпуклые фигуры $\bar{\mathfrak{x}}$ и $\bar{\mathfrak{y}}$, лежащие в данной фигуре $\mathfrak{x}_o$ по разные стороны от гиперплоскости с единичной нормалью z_0, такие, что суммарный объем $\bar{\mathfrak{x}}$ и $\bar{\mathfrak{y}}$ максимален при заданной сумме их интегральных ширин.*

Критерий оптимальности. *Допустимая пара выпуклых тел $\bar{\mathfrak{x}}$ и $\bar{\mathfrak{y}}$ является решением внутренней задачи Урысона с текущей гиперплоскостью в том и только в том случае, если найдутся выпуклые фигуры $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ и положительные числа $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ такие, что*

(1) $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}\#\bar{\alpha}\mathfrak{z}_N$;
(2) $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}\#\bar{\alpha}\mathfrak{z}_N$;
(3) $\mu(\mathfrak{x}) \geq \bar{\beta}\varepsilon_{z_0}$, $\mu(\mathfrak{y}) \geq \bar{\beta}\varepsilon_{-z_0}$;
(4) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *при всех* $z \in \operatorname{supp}(\mathfrak{x}) \setminus \{z_0\}$;
(5) $\bar{\mathfrak{y}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *при всех* $z \in \operatorname{supp}(\mathfrak{x}) \setminus \{-z_0\}$,
где $\operatorname{supp}(\mathfrak{x})$ *— носитель фигуры* $\mathfrak{x}$*, т. е. носитель меры* $\mu(\mathfrak{x})$ *— поверхностной функции* $\mathfrak{x}$*.*

Доказательство. Ясно, что рассматриваемая задача переписывается в виде

$$\begin{gathered}\mathfrak{x} \leq \mathfrak{x}_0;\\ \mathfrak{x}(z_0) + \mathfrak{y}(-z_0) \leq 0;\\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N\rangle + \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{z}_N\rangle = \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N\rangle + \langle \bar{\mathfrak{y}}, \mathfrak{z}_N\rangle;\\ p(\mathfrak{x}) + p(\mathfrak{y}) \to \max.\end{gathered}$$

В самом деле, достаточно заметить, что условие разделения гиперплоскостью с нормалью z_0 переписывается следующим образом:

$$\mathfrak{x}(z_0) = \sup\{(x, z_0) \mid x \in \mathfrak{x}\} \leq \inf\{(x, z_0) \mid x \in \mathfrak{y}\} = -\mathfrak{y}(-z_0).$$

Остается применить субдифференциальный критерий экстремума для выписанной выше выпуклой программы: для того чтобы допустимые тела $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ были оптимальным решением программы, необходимо и достаточно, чтобы нашлись положительные числа $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ и меры μ, ν такие, что

$$\begin{gathered}\mu + \nu + \bar{\alpha}\mu(\mathfrak{z}_N) + \bar{\beta}(\varepsilon_{z_0} + \varepsilon_{-z_0}) - \mu(\bar{\mathfrak{x}}) - \mu(\bar{\mathfrak{y}}) \in \mathscr{V}^*_{N,\bar{\mathfrak{x}}} \times \mathscr{V}^*_{N,\bar{\mathfrak{y}}};\\ \mu(\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}) = 0; \quad \nu(\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{y}}) = 0.\end{gathered}$$

Ясно, что $\mu + \bar{\beta}\varepsilon_{z_0}$ и $\nu + \bar{\beta}\varepsilon_{-z_0}$ — поверхностные функции некоторых фигур $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$, обладающих требуемым свойством. Осталось вспомнить строение двойственных конусов к конусам допустимых направлений.

Замечание 1. Отметим, что положительная линейная комбинация Бляшке тетраэдра и шара пропорциональна решению внутренней задачи Урысона в тетраэдре (ср. [3]). При $N = 2$ сумма Бляшке превращается, как обычно, в сумму Минковского. При замене условий на интегральную ширину, характеризующих задачу Урысона (см. [6]), ограничениями на площадь поверхности или иные смешанные объемы более общего вида возникают, вообще говоря, невыпуклые задачи, для которых аналогичное рассуждение приводит к необходимым признакам решений.

Замечание 2. Приведенный анализ и симметризация Шварца показывают, в частности, что решение «внутренней» задачи о двойном пузыре внутри шара в классе объединений пар выпуклых тел дается подходящей частью объединения сферических шапочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alexandrov A. D.* Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers. London etc.: Gordon and Breach, 1996.
2. *Foisy J., Alfaro M., Brock J., Hodges N., Zimba J.* The standard double soap bubble in $\mathbb{R}^2$ uniquely minimizes perimeter // Pacific J. Math. 1993. V. 159, N 1. P. 47–59.

3. *Погорелов А. В.* Погружение «мыльного пузыря» внутрь тетраэдра // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 2. С. 90–93.
4. *Hutchings M., Morgan F., Ritoré M., Ros A.* Proof of the double bubble conjecture // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 6, N 6. P. 45–49.
5. *Kutateladze S. S,* Parametrization of isoperimetric-type problems in convex geometry // Siberian Adv. Math. 1999. V. 9, N 3. P. 115–131.
6. *Урысон П. С.* Зависимость между средней шириной и объемом выпуклых тел // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3. С. 477–486.

Статья поступила 20 мая 2002 г.

Кутателадзе Семён Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
sskut@math.nsc.ru