Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 517.544

О ЛАКУНАРНЫХ АНАЛОГАХ ТЭТА–РЯДА ПУАНКАРЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИИ

Е. П. Аксентьева, Ф. Н. Гарифьянов

Аннотация: Рассматриваются такие фуксовы группы дробно-линейных преобразований, для которых каждая вершина фундаментального многоугольника является общей для четного или бесконечного числа фундаментальных конгруэнтных многоугольников, сходящихся в этой точке. Вся совокупность преобразований делится на два непересекающихся множества. По этим множествам вводятся два лакунарных ядра, сумма которых представляет собой известный аналог ядра Л. И. Чибриковой и В. В. Сильвестрова (Изв. вузов. Математика. 1978. № 12. С. 117–121), и исследуются их свойства. Вводятся автоморфные формы измерения $-4m$, отличающиеся от тэта-ряда Пуанкаре. Указывается приложение одного из построенных лакунарных ядер, не содержащего ядра Коши, к решению многоэлементной задачи со сдвигом контура внутрь области.

Ключевые слова: краевые задачи для аналитических функций, группы дробно-линейных преобразований, римановы поверхности

Пусть Γ — конечно-порожденная собственно разрывная группа дробно-линейных преобразований

$$\sigma_0(z) = z, \quad \sigma_k = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}, \quad \alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k = 1, \quad \gamma_k \neq 0,\ k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

бесконечно удаленная точка является обыкновенной точкой группы и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\gamma_k^{-2}\right| < \infty, \tag{2}$$

т. е. Γ — группа сходящегося типа [1, с. 226]. Для таких групп Л. И. Чибрикова и В. В. Сильвестров [2, 3] построили аналог ядра Коши в виде тэта-ряда Пуанкаре

$$A(z,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_k'(\tau)}{\sigma_k(\tau) - z} \Longrightarrow A[z, \sigma_j(\tau)] = (\gamma_j\tau + \delta_j)^2 A(z,\tau). \tag{3}$$

По переменной z ядро $A(z,\tau)$ является квазиавтоморфным:

$$A[\sigma_j(z), \tau] = A(z,\tau) + \eta_j(\tau), \quad \eta_j(\tau) = A[\sigma_j(\infty), \tau],$$

а циклические слагаемые $\eta_j(\tau)$ — автоморфные формы веса (-2) [3, 4], равные нулю во всех параболических вершинах. Такое ядро содержит одним из своих слагаемых ядро Коши, что дает возможность применить его к решению краевых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00914).

В приложениях при исследовании некоторых проблем из смежных областей комплексного анализа удобнее применять ядро, не содержащее ядра Коши. В статье рассматриваются группы, для которых каждая вершина фундаментального многоугольника является общей для четного или бесконечного числа конгруэнтных ему многоугольников, сходящихся в этой точке. Для таких групп в п. 1 работы строится ядро в виде (3), но не по всем, а лишь по «половине» преобразований группы. В эту «половину» не входит ядро Коши. В п. 2 вводятся автоморфные формы веса $-4m$, отличающиеся от тэта-ряда Пуанкаре, в частности, поведением в окрестности параболических точек. Исследуются свойства таких форм. В п. 3 указано одно из приложений построенного лакунарного ядра, не содержащего ядра Коши, к исследованию многоэлементной краевой задачи со сдвигом контура внутрь области.

1. Исследование лакунарных ядер

Пусть Γ — конечно-порожденная фуксова группа второго рода дробно-линейных преобразований (1) с главной окружностью ∂U, $U = \{z : |z| < 1\}$. Такая группа является группой сходящегося типа [5, с. 115], т. е. для нее выполняется неравенство (2). Внутренность D ее фундаментальной области Π расположена симметрично относительно ∂U. В качестве половины $D_0 \in U$ области D всегда может быть выбран многоугольник [4, с. 245] со сторонами

$$a_1b_1a_1'b_1' \dots a_gb_ga_g'b_g'c_1c_1' \dots c_nc_n'h_1x_1h_1' \dots h_rx_rh_r'. \tag{4}$$

Здесь $x_1, \dots, x_r$ — свободные стороны, расположенные на ∂U, стороны a_j, a_j', b_j, b_j', $j = \overline{1,g}$; c_j, c_j', $j = \overline{1,n}$; h_j, h_j', $j = \overline{1,r}$, попарно конгруэнтны. Обозначим их связывающие и порождающие группу Γ преобразования через σ_j, $j = \overline{1, 2g+n+r}$, причем $\sigma_1(a_1) = a_1'$. Вершина C_j, общая для сторон c_j, c_j', $j = \overline{1,n}$, является неподвижной точкой эллиптического или параболического преобразования. В первом случае угол при вершине C_j равен $2\pi/k_j$, $k_j \geq 2$ — целое число, $C_j \in U$. Во втором случае стороны c_j, c_j' касаются в предельной точке группы $C_j \in \partial U$. Здесь значение параметра k_j полагаем равным ∞. Все остальные $4g+n+r$ вершин границы ∂D_0 образуют простой цикл, и сумма углов при них равна 2π. Фундаментальный многоугольник Π получается присоединением к D всех не конгруэнтных между собой точек границы ∂D (включая точки C_j, $j = \overline{1,n}$). Сигнатура группы Γ есть $(2g+r-1, r, n; k_1, k_2, \dots k_n)$, $2 \leq k_j \leq \infty$, $j = \overline{1,n}$.

Будем рассматривать только такие группы, где k_j, $n+r$ — четные числа. Тогда каждая вершина ∂D является общей для четного (k_j или $4g+n+r$) или бесконечного числа фундаментальных конгруэнтных многоугольников, сходящихся в этой точке.

Разобьем совокупность преобразований (1) на два непересекающихся множества. Пусть

$$\sigma_m = \sigma_{j_1}^{\pm m_1} \sigma_{j_2}^{\pm m_2} \dots \sigma_{j_n}^{\pm m_n}, \tag{5}$$

где $m_1, m_2, \dots m_n$ — натуральные числа и $1 \leq j_1, j_2, \dots, j_n \leq 2g+n+r$. Среди индексов $j_1, j_2, \dots j_n$ могут быть одинаковые, поскольку порождающие преобразования не обязаны коммутировать. Рассмотрим число $\lambda_m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Таких чисел бесконечно много, поскольку бесконечно много представлений (5). Но при фиксированном m все они либо четны, либо нечетны. Впредь под числом

λ_m будем подразумевать наименьшее из таких чисел. Для тождественного преобразования $\sigma_0(z)$ имеем $\lambda_0 = 2$, так как $\sigma_0 = \sigma_j\sigma_j^{-1}$. Для порождающих преобразований и преобразований, обратных к ним, будет $\lambda_j = 1$, $j = \overline{1, 2g+n+r}$.

Определение 1. Преобразование $\sigma_m(z)$ назовем *преобразованием первого типа* ($\sigma_m \in \mathrm{I}$), если число λ_m нечетно, и *второго типа* ($\sigma_m \in \mathrm{II}$), если λ_m четно.

Введем два новых ядра

$$A_1(z,\tau) = \sum_{\sigma_k \in \mathrm{I}} \frac{\sigma_k'(\tau)}{\sigma_k(\tau) - z}, \tag{6}$$

$$A_2(z,\tau) = \sum_{\sigma_k \in \mathrm{II}} \frac{\sigma_k'(\tau)}{\sigma_k(\tau) - z}. \tag{7}$$

Очевидно, $A_1(z,\tau) + A_2(z,\tau) = A(z,\tau)$, где $A(z,\tau)$ определено в (3). Кроме того, для $p, q = 1, 2$ имеем

$$\sigma_k'(\tau) A_p[z, \sigma_k(\tau)] = A_q(z,\tau), \tag{8}$$

$$A_p[\sigma_k(z), \tau] = A_q(z,\tau) + \eta_{k,p}(\tau), \tag{9}$$

где $p = q$ при $\sigma_k \in \mathrm{II}$ и $p \neq q$ при $\sigma_k \in \mathrm{I}$. Поскольку справедливо равенство

$$\sigma_k'(\tau)[\sigma_k(\tau) - z]^{-1} = \left[\tau - \sigma_k^{-1}(z)\right]^{-1} - \left[\tau - \sigma_k^{-1}(\infty)\right]^{-1},$$

циклические слагаемые имеют вид, аналогичный полученному в [3, с. 206, 207]:

$$\eta_{k,p}(\tau) = A_p[\sigma_k(\infty), \tau], \quad \eta_{k,1}(\tau) + \eta_{k,2}(\tau) = \eta_k(\tau).$$

Используя основное свойство тэта-ряда, имеем

$$\eta_{k,p}[\sigma_i(\tau)] = (\gamma_i\tau + \delta_i)^2 \eta_{k,q}(\tau), \tag{10}$$

причем $p = q$, если $\sigma_i \in \mathrm{II}$, и $p \neq q$ при $\sigma_i \in \mathrm{I}$.

Вычислим размерность пространства циклических слагаемых $\eta_{k,p}(z)$. В дальнейшем будем использовать функцию $F(z)$ с условием

$$\sigma_1'(z) F[\sigma_1(z)] = F(z), \tag{11}$$

где $\sigma_1(a_1) = a_1'$, или с условием

$$\sigma_1'(z) F[\sigma_1(z)] = -F(z). \tag{12}$$

Теорема 1. *Размерность пространства функций $\eta_{k,p}(z)$, $p = 1, 2$, равна $2\rho + n - 1$, где $\rho = 2g + r - 1$ — род области Π. Базис $\eta^{(j)}(z)$, $j = \overline{1, 2\rho + n - 1}$, пространства можно выбрать так, что ρ циклических постоянных удовлетворяют условию* (11), *а остальные* — (12).

Доказательство. Области D_0 после отождествления конгруэнтных сторон соответствует сфера с g ручками и r проколами (риманова поверхность с краем — фактор-пространство U/Γ, компактифицированное добавлением точек, соответствующих параболическим вершинам). Поэтому род области Π равен $\rho = 2g + r - 1$. Преобразования $\sigma_k(z) \in \mathrm{II}$ образуют группу Γ_1 с фундаментальной областью $\Pi_1 = \Pi \cup \sigma_1(\Pi \cup a_1')$. Положим $D_1 = D \cup \sigma_1(D \cup a_1')$. Пусть области $D_{01} = D_0 \cup \sigma_1(D_0 \cup a_1')$ соответствует сфера с g_1 ручками и r_1 проколами (компактифицированное фактор-пространство U/Γ_1). Тогда род области Π_1 равен

$\rho_1 = 2g_1 + r_1 - 1$. Выразим g_1 и r_1 через характеристики группы Γ. Прежде всего покажем, что $r = r_1$. Пусть $\sigma_1(x_j) = x'_j$, $j = \overline{1, r}$, тогда свободных сторон у D_{01} стало $2r$. Однако каждая из них не окружена двумя конгруэнтными относительно группы Γ_1 сторонами, ибо конгруэнтными являются h_j, $\sigma_1(h'_j)$ и h'_j, $\sigma_1(h_j)$. Используя [6, с. 257], можно преобразовать область D_{01} в такую, у которой имеются r свободных сторон, каждую из которых окаймляют конгруэнтные относительно $\sigma_k(z) \in \mathrm{II}$ стороны. Отсюда заключаем, что $r_1 = r$.

Найдем g_1. Для этого заметим, что сферу с g_1 ручками и r проколами превращают в односвязную область $l = 2g_1 + r - 1$ поперечных разрезов. Отсюда $g_1 = (l + 1 - r)/2$. Используем прием Форда [5, с. 255] для определения l, исходя из области D_{01}. Пусть s — число циклов границы ∂D_{01}. Число вершин параболического и эллиптического циклов в ∂D_{01} возрастает вдвое по сравнению с ∂D_0, но число циклов остается прежним. Непосредственно можно убедиться, что остальные вершины ∂D_{01} в силу четности числа $n + r$ образуют два цикла. Отсюда $s = n + 2$. Наконец, число пар конгруэнтных сторон в ∂D_{01} равно $n_1 = 4g + 2n + 2r - 1$. Склеивая ∂D_{01} по конгруэнтным сторонам, получим риманову поверхность, при этом все вершины, принадлежащие i-му циклу, попадут в одну точку P_i поверхности. Разобьем ее на односвязные части, проведя s кругообразных разрезов около точек $P_1, \dots P_s$ и n_1 разрезов вдоль кривых, по которым были склеены конгруэнтные стороны. В результате получим $s + 1$ односвязных областей, откуда $l = n_1 - s$ (здесь в отличие от [5] мы учитываем все s односвязных частей у точек $P_1, \dots P_s$, так как исходная поверхность имела границу). Отсюда $g_1 = 2g - 1 + (n + r)/2$, значит, $\rho_1 = 2\rho + n - 1$.

Условие (10) при $\sigma_i(z) \in \mathrm{I}$ и $p = 2$ является следствием этого же условия при $p = 1$. В частности, из него имеем

$$\sigma'_1(z)\eta_{k,p}[\sigma_1(z)] = \eta_{k,q}(z), \quad p \neq q. \tag{13}$$

Из условия (10) при $\sigma_i(z) \in \mathrm{II}$ следует, что линейно независимые дифференциалы $\eta_{k,1}(z)\,dz$ перейдут на римановой поверхности S_1, соответствующей Π_1, в базис абелевых дифференциалов первого рода, т. е. размерность их пространства $2\rho + n - 1$. Та же размерность и у пространства функций $\eta_{k,2}(z)$.

Из (13) следует, что наряду с $\eta_{k,q}(z)dz$ абелевыми дифференциалами будут и $\sigma'_1(z)\eta_{k,p}[\sigma_1(z)]\,dz$. Отсюда по аналогии с [7, с. 45] можно обосновать построение базиса функций $\eta_{k,p}(z)$ в виде $\eta^{(j)}(z)$, $j = \overline{1, 2\rho + n - 1}$, где функции $\eta^{(j)}(z)$ при $j = \overline{1, m_1}$ удовлетворяют условию (11), а остальные — (12). Определим число m_1. Дифференциалы $\eta^{(j)}(z)\,dz$, $j = \overline{1, m_1}$, на римановой поверхности S, соответствующей Π, переходят в абелевы дифференциалы первого рода, поэтому $m_1 \leq \rho$. С другой стороны, любой абелев дифференциал на S является дифференциалом и на S_1, т. е. он представим в виде линейной комбинации функций $\eta^{(j)}(z)$ со свойством (11). Отсюда $m_1 \geq \rho$, а следовательно, $m_1 = \rho$. Заметим, что между $\eta_{k,1}$ и $\eta_{k,2}$ существует связь

$$\eta_{k,1}(z) = \sum_{j=1}^{2\rho+n-1} c_j \eta^{(j)}(z) \Longrightarrow \eta_{k,2}(z) = \sum_{j=1}^{\rho} c_j \eta^{(j)}(z) - \sum_{j=\rho+1}^{2\rho+n-1} c_j \eta^{(j)}(z).$$

Теорема доказана.

2. Построение автоморфных форм

Пусть Γ — конечно-порожденная фуксова группа первого или второго рода дробно-линейных преобразований (1) с прежней неподвижной окружностью ∂U.

По-прежнему считаем $\gamma_k \neq 0$, но это не ограничивает общности, так как в противном случае можно перейти к изоморфной группе, где это условие будет выполняться. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^{-2m}$ при $m \geq 1$ сходится для фуксовой группы второго рода, а при $m \geq 2$ — для фуксовой группы первого рода, так как она является группой расходящегося типа [1, с. 226]. Фундаментальная область для фуксовой группы второго рода описана выше.

Границу внутренности $D \subset U$ фундаментального многоугольника фуксовой группы первого рода можно привести к виду с расположением сторон [4, с. 241]

$$a_1 b_1 a_1' b_1' \dots a_g b_g a_g' b_g' c_1 c_1' \dots c_n c_n'.$$

Здесь нет свободных сторон, а относительно остальных справедливо все, что сказано о сторонах (4). Простой цикл образуют $4g+n$ отличных от C_j вершин. Одна из таких вершин вместе с областью D, вершинами C_j, $j=\overline{1,n}$, сторонами a_j, b_j, $j=\overline{1,g}$; c_j, $j=\overline{1,n}$, образуют фундаментальную область П. Сигнатура фуксовой группы первого рода есть $(g, n; k_1, k_2, \dots k_n)$, $2 \leq k_j \leq \infty$, $j=\overline{1,n}$. Числа n, k_j считаем четными, а определение 1 имеющим место.

Введем функцию

$$f_{2m}(z) = \sum_{\sigma_k \in \mathrm{I}} \left[\frac{\sigma_k'(z)}{[\sigma_k(z) - z]^2} \right]^m, \quad m \geq 1, \tag{14}$$

и докажем ряд ее свойств.

1°. *Функция $f_{2m}(z)$ мероморфна на любом компакте $Q \subset \overline{\mathbb{C}}$, не содержащем предельных точек группы Γ, при $m \geq 1$ для фуксовой группы второго рода и при $m \geq 2$ для фуксовой группы первого рода.*

Для доказательства достаточно обосновать, что ряд (14) сходится в Q, если из него удалить конечное число слагаемых, имеющих в Q полюсы. Поскольку

$$\frac{\sigma_k'(z)}{[\sigma_k(z) - z]^2} = \frac{1}{[\gamma_k z^2 + z(\delta_k - \alpha_k) - \beta_k]^2},$$

члены ряда (14) имеют полюсы только в неподвижных точках эллиптических преобразований $\sigma_k(z)$, расположенных в Q. Так как эти точки являются вершинами фундаментального многоугольника и ему конгруэнтных, а число их, покрывающих Q, конечно, то и число членов ряда, имеющих полюсы в Q, тоже конечно. Удалив их, для оставшихся членов ряда (14) получим оценку

$$\left| \frac{\sigma_k'(z)}{[\sigma_k(z) - z]^2} \right|^m = \frac{1}{\left| \gamma_k \left(z - \xi_1^{(k)}\right)\left(z - \xi_2^{(k)}\right) \right|^{2m}} \leq \frac{1}{|\gamma_k|^{2m} d^{4m}},$$

где $\left|z - \xi_i^{(k)}\right| \geq d$, $i = 1, 2$, d — расстояние от ∂Q до ближайшей к ней и расположенной вне Q неподвижной точки преобразований группы. Мажорирующий ряд $d^{-4m} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^{-2m}$ сходится при $m \geq 1$ и $m \geq 2$ для фуксовой группы второго и первого родов соответственно.

2°. *Мероморфная функция $f_{2m}(z)$ есть автоморфная форма веса $-4m$* [3, 4].

Покажем, что $f_{2m}[\sigma_j(z)] = (\gamma_j z + \delta_j)^{4m} f_{2m}(z)$. Имеем

$$f_{2m}[\sigma_j(z)] = \sum_{\sigma_k \in \mathrm{I}} \left[\frac{\sigma_k'[\sigma_j(z)]}{[\sigma_k \sigma_j(z) - \sigma_j(z)]^2} \right]^m,$$

$$\frac{\sigma_k'[\sigma_j(z)]}{[\sigma_k\sigma_j(z)-\sigma_j(z)]^2}=\frac{[\sigma_k\sigma_j(z)]'(\gamma_j z+\delta_j)^4}{\{[\gamma_j\sigma_k\sigma_j(z)-\alpha_j]z+\delta_j\sigma_k\sigma_j(z)-\beta_j\}^2}.$$

Преобразования $\sigma=\sigma_j^{-1}\sigma_k\sigma_j$ являются преобразованиями первого типа вне зависимости от того, какого типа преобразования σ_j, так как $\sigma_k\in \mathrm{I}$. Поскольку

$$\sigma(z)-z=-\frac{[\gamma_j\sigma_k\sigma_j(z)-\alpha_j]z+\delta_j\sigma_k\sigma_j(z)-\beta_j}{\gamma_j\sigma_k\sigma_j(z)-\alpha_j},$$

$$\sigma'(z)=\left(\frac{-\delta_j\sigma_k\sigma_j(z)+\beta_j}{\gamma_j\sigma_k\sigma_j(z)-\alpha_j}\right)'=\frac{[\sigma_k\sigma_j(z)]'}{[\gamma_j\sigma_k\sigma_j(z)-\alpha_j]^2},$$

то

$$\frac{\sigma_k'[\sigma_j(z)]}{[\sigma_k\sigma_j(z)-\sigma_j(z)]^2}=\frac{\sigma'(z)(\gamma_j z+\delta_j)^4}{[\sigma(z)-z]^2}.$$

Подстановка этого равенства в формулу для f_{2m} завершает доказательство.

3°. *Функция $f_{2m}(z)$ в неподвижных точках эллиптических преобразований имеет полюсы порядка $2m$.*

Пусть среди преобразований, порождающих группу Γ, есть эллиптическое преобразование $\sigma_1(z)=(\alpha_1z+\beta_1)/(\gamma_1z+\delta_1)$. Одна из его неподвижных точек ξ_1 принадлежит U, вторая, ξ_2, ей сопряжена относительно ∂U. Эти же точки являются неподвижными для циклической подгруппы (и только для нее), порожденной $\sigma_1(z)$. Имеем

$$\frac{\sigma_1(z)-\xi_1}{\sigma_1(z)-\xi_2}=\exp(2\pi i/k)\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2},$$

где k — четное число,

$$\sigma_n(z)=\sigma_1^n(z)=\frac{\alpha_nz+\beta_n}{\gamma_nz+\delta_n},\quad \alpha_n\delta_n-\beta_n\gamma_n=1,\quad \frac{\sigma_n(z)-\xi_1}{\sigma_n(z)-\xi_2}=\exp(2\pi in/k)\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2},$$

причем для $\sigma_n(z)\in\mathrm{I}$ будет $n\in M=\{1,3,\dots,k-1\}$. Сумма всех членов ряда, имеющих в ξ_1 полюсы, есть $\sum\limits_{n\in M}\frac{1}{[\gamma_n(z-\xi_1)(z-\xi_2)]^{2m}}$. Свойство 3° будет доказано, если покажем, что $\sum\limits_{n\in M}\gamma_n^{-2m}\neq 0$. Найдем γ_n. Пусть $K=\exp(2\pi in/k)$, тогда

$$\sigma_n(z)=\frac{z(\xi_1-\xi_2K^n)-\xi_1\xi_2+K^n\xi_1\xi_2}{z(1-K^n)-\xi_2+K^n\xi_1}\Longrightarrow\gamma_n^2=\frac{(1-K^n)^2}{K^n(\xi_1-\xi_2)^2}$$
$$\Longrightarrow\sum_{n\in M}\frac{1}{\gamma_n^{2m}}=\frac{(-1)^m(\xi_1-\xi_2)^{2m}}{4^m}\sum_{n\in M}\frac{1}{\sin^{2m}(\pi n/k)}\neq 0.$$

4°. *В окрестности параболической точки ξ справедливо представление*

$$f_{2m}(z)=(c\ln t/2\pi i)^{4m}g(t),\tag{15}$$

где $t=\exp[2\pi i/c(z-\xi)]$, $z\in D$, $g(t)$ аналитична в $t=0$ и $g(0)\neq 0$.

Исследуем поведение $f_{2m}(z)$ в окрестности параболической точки, следуя [5, с. 120].

Пусть группе Γ принадлежит параболическая циклическая подгруппа, порожденная преобразованием $\sigma_1(z)=\frac{\alpha_1z+\beta_1}{\gamma_1z+\delta_1}$, для которого точка $\xi\in\partial U$ является неподвижной. Для $\sigma_1(z)$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\sigma_1(z)-\xi}=\frac{1}{z-\xi}+c,\ c\in\mathbb{C},\quad\Longrightarrow\frac{d\sigma_1}{dz}=\left(\frac{\sigma_1(z)-\xi}{z-\xi}\right)^2.$$

Введем функцию $G(z)=(z-\xi)^{4m}f_{2m}(z)$. Имеем

$$G[\sigma_1(z)]=[\sigma_1(z)-\xi]^{4m}f_{2m}[\sigma_1(z)]=(z-\xi)^{4m}f_{2m}(z)=G(z).$$

Следовательно, $G(z)$ автоморфна по отношению к параболической циклической подгруппе. После замены $t=\exp[2\pi i/c(z-\xi)]$, $z\in D$, получим функцию $g(t)=G(z)$, однозначную в окрестности $t=0$, что дает формулу (15). Исследуем $G(z)$ при $z\in D\cap U_\varepsilon$, ∂U_ε — окружность радиуса ε, проходящая через точки ξ, z_1, z_2, где z_1, z_2 — конгруэнтные точки на сторонах ∂D, исходящих из ξ. Имеем

$$G(z)=\sum_{\sigma_k\in\mathrm{I}}\frac{(z-\xi)^{4m}}{\bigl[\gamma_k\bigl(z-\xi_1^{(k)}\bigr)\bigl(z-\xi_2^{(k)}\bigr)\bigr]^{2m}}$$
$$=\sum{}'\frac{1}{\gamma_k^{2m}}+\sum{}''\frac{(z-\xi)^{4m}}{\bigl[\gamma_k\bigl(z-\xi_1^{(k)}\bigr)\bigl(z-\xi_2^{(k)}\bigr)\bigr]^{2m}},$$

где первая сумма относится к преобразованиям циклической параболической подгруппы. Первый ряд сходится. Для доказательства сходимости второго ряда достаточно заметить, что ε можно взять настолько малым, что в $\triangle z_1z_2\xi$ не будет, кроме ξ, неподвижных точек других преобразований группы. Значит, $G(z)$ остается ограниченной, когда $z\to\xi$. Поэтому $g(t)$ аналитична в $t=0$. Более того, так как

$$\sigma_k(z)=\sigma_1^k(z)=\frac{z(1+kc\xi)-kc\xi^2}{kcz+1-kc\xi}\Longrightarrow\gamma_k=ck,\quad k=\pm1,\pm3,\dots,$$

то

$$\lim_{t\to0}g(t)=\lim_{z\to\xi}G(z)=\sum{}'\frac{1}{\gamma_n^{2m}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{[c(2n+1)]^{2m}}\neq0.$$

Последнее отличает поведение $f_{2m}(z)$ от тэта-ряда Пуанкаре $\theta(z)$ [5, с. 112], который имеет то же представление (15), но $g(t)\to0$ при $t\to\xi$.

5°. *Если группа* Γ *содержит эллиптическое или параболическое преобразование, то функция* f_{2m} *нетривиальна.*

Это свойство является следствием предыдущих.

3. Исследование краевой задачи со сдвигом контура внутрь области

Пусть $\alpha(t):\partial D\to\partial^-D$ — обратный сдвиг Карлемана, совпадающий на каждой стороне ∂D с одним из порождающих преобразований группы или преобразований, обратных к ним. Сдвиг удовлетворяет условию $\alpha[\alpha(t)]=t$ и имеет в вершинах ∂D разрывы первого рода.

Рассмотрим задачу

$$\Phi^+[\alpha(t)]+\Phi[h(\alpha(t))]=G(t)\{\Phi^+(t)+\Phi[h(t)]\}+g(t),\quad t\in\partial D,\tag{16}$$

при следующих предположениях.

(а) Неизвестная функция $\Phi(z)$ голоморфна в D, а ее граничное значение $\Phi^+(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на каждой дуге границы, не содержащей вершин C_j. В вершинах допускаются интегрируемые особенности.

(б) Функция $h(t)$ непрерывна на ∂D, и для любого $t\in\partial D$ имеем $h(t)\in D$, причем $\exists\varepsilon>0:|h(t)-t|>\varepsilon$.

(в) Гёльдеровские функции $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям

$$G(t)G[\alpha(t)] \equiv 1, \quad G[\alpha(t)]g(t) + g[\alpha(t)] \equiv 0, \tag{17}$$

гарантирующим отсутствие переопределенности. Кроме того, $G(t) \neq 0$, $G(C_j) = 1$ для любого j. Считаем также, что неоднородная задача Карлемана

$$a^+(t) = -G(t)a^+[\alpha(t)] + g_1(t), \quad t \in \partial D, \tag{18}$$

где коэффициент $g_1(t)$ удовлетворяет условию, гарантирующему отсутствие переопределенности, безусловно разрешима (см. по этому поводу результаты Э. И. Зверовича [8]).

Проведем равносильную регуляризацию задачи (16) с учетом (6), (7). Для этого воспользуемся интегральным представлением

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \Phi^+[\alpha(\tau)]A_1(z,\tau)\,d\tau, \quad z \in D. \tag{19}$$

В самом деле, (19) равносильно тому, что

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \Phi^+(t)A_2(z,t)\,dt, \quad z \in D,$$

а последнее справедливо в силу теоремы Коши. Здесь надо учесть изменение ориентации контура при замене переменной интегрирования $t = \alpha(\tau)$ и равенство (8) при $p = 1$ и $q = 2$, поскольку на каждой из сторон сдвиг совпадает с одним из преобразований первого типа. Теперь важно заметить, что в представлении (19) плотность в интеграле определена с точностью до слагаемого $a^+(\tau)$ (все преобразования первого типа переводят точку z из D в ее внешность). За счет подбора функции $a(z)$ получим интегральное представление

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \varphi(\tau)A_1(z,\tau)\,d\tau, \quad z \in D, \tag{20}$$

с плотностью $\varphi(\tau) = -G(\tau)\varphi[\alpha(\tau)]$. Последнее равносильно безусловной разрешимости неоднородной задачи Карлемана (18) при $g_1(t) = -G(t)\Phi^+(t) - \Phi^+[\alpha(t)]$. Для интеграла (20) справедлив аналог формулы Сохоцкого — Племеля

$$\Phi^+(t) = -\varphi[\alpha(t)]/2 + \Phi(t), \quad t \in \partial D,$$

где особый интеграл $\Phi(t)$ понимается в смысле главного значения по Коши. Задача (16) запишется в виде интегрального уравнения второго рода

$$-\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \varphi(\tau)K(t,\tau)\,d\tau = g(t), \quad t \in \partial D, \tag{21}$$

где $K(t,\tau) = K_1(t,\tau) + K_1[h(t),\tau]$ и

$$K_1(t,\tau) = A_1[\alpha(t),\tau] - \frac{G(t)}{G(\tau)}A_1[t,\alpha(\tau)]\alpha'(\tau). \tag{22}$$

Ядро $K_1[h(t),\tau]$ ограничено в силу условия (б). С помощью соотношений (8) и (9) перепишем равенство (22) в виде

$$K_1(t,\tau) = A_2(t,\tau)[1 - G(t)/G(\tau)] + \eta(\tau),$$

где $\eta(\tau)$ — кусочная функция, совпадающая на каждой из сторон ∂D с одним из циклических слагаемых $\eta_{k,1}(\tau)$.

Пусть $t_0 \in \partial D$ и $\tau \to t_0$, $t \to t_0$. Тогда

$$K(t,\tau) \sim (\tau - t)^{\mu-1}\widetilde{K}(t,\tau), \tag{23}$$

где $\widetilde{K}(t,\tau)$ ограничена на ∂D, а $\mu > 0$ — показатель Гёльдера функции $G(t)$. В вершинах справедлива та же оценка (23).

Значит, уравнение (21) является уравнением со слабой особенностью, а в случае, когда $G(t)$ удовлетворяет условию Липшица, ядро (22) ограничено.

Таким образом, решение исходной задачи сводится к исследованию интегрального уравнения Фредгольма (21). Справедливо и обратное. Пусть уравнение (21) разрешимо. Тогда существует его решение $\varphi(t)$, удовлетворяющее условию $\varphi(t) = -G(t)\varphi[\alpha(t)]$ (см., например, [7] или [9], где рассматривались уравнения с ядрами подобной структуры). Интеграл (20) с такой плотностью и является решением задачи (16). Доказана

Теорема 2. *Любое решение задачи* (16) *имеет вид* (20), *где* $\varphi(t)$ — *решение уравнения* (21) *со свойством* $\varphi(t) = -G(t)\varphi[\alpha(t)]$.

Замечание. Интегральное представление

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \varphi(\tau)A(z,\tau)\,d\tau, \quad z \in D, \tag{24}$$

использующее квазиавтоморфный аналог ядра Коши (3), для регуляризации таких задач применить невозможно. Во-первых, совершенно не ясно, любое ли решение задачи (16) представимо в таком виде с плотностью, удовлетворяющей условию $\varphi(\tau) = -f(\tau)\varphi[\alpha(\tau)]$, так как здесь справедлив иной аналог формулы Сохоцкого

$$\Phi^+(t) = [\varphi(t) - \varphi(\alpha(t))]/2 + \Phi(t), \quad t \in \partial D.$$

Во-вторых, ядро $A(t,\tau)$ имеет неинтегрируемые особенности не только при $\tau \to t_0$, $t \to t_0$, но и при $\tau \to t_0$, $t \to \alpha(t_0)$. Поэтому произведение $[1 - G(t)/G(\tau)]A(t,\tau)$ с учетом первого из условий (17) может иметь слабую особенность только в вырожденных случаях $G(t) \equiv 1$ или $G(t) \equiv -1$, не представляющих особого интереса. Во всех остальных случаях интегральные представления вида (24) приводят к сингулярным уравнениям, ядра которых имеют конечное число точечных особенностей неинтегрируемого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Винберг Э. Б., Шварцман О. В.* Римановы поверхности // Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1978. Т. 16. С. 191–245 (Итоги науки и техники).
2. *Чибрикова Л. И., Сильвестров В. В.* К вопросу об эффективности решения краевой задачи Римана для автоморфных функций // Изв. вузов. Математика. 1978. № 12. С. 117–121.
3. *Чибрикова Л. И., Сильвестров В. В.* Построение автоморфного аналога ядра Коши для одного класса собственно разрывных групп // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1979. Вып. 16. С. 202–217.
4. *Lehner J.* Discontinuous groups and automorphic functions. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1964.
5. *Форд Л. Р.* Автоморфные функции. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
6. *Неванлинна Р.* Униформизация. М.: Изд–во иностр. лит., 1955.
7. *Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н.* К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана // Изв. вузов. Математика. 1983. № 4. С. 43–51.

8. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 1. С. 113–179.

9. *Гарифьянов Ф. Н.* Интегральное представление аналитической функции внутри параллелограмма и его приложение // Изв. вузов. Математика. 1991. № 12. С. 8–12.

Статья поступила 14 июня 2001 г.

Аксентьева Евгения Павловна
Казанский гос. университет, кафедра общей математики, Казань 420008
Evgenija.Aksenteva@ksu.ru

Гарифьянов Фархат Нургаязович
Казанская гос. сельскохозяйственная академия, кафедра физики и математики,