Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 512.5

ОБ ОБОБЩЕННЫХ (σ, τ)–ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ

Н. Аржач, Э. Албаш

Аннотация: Обобщается понятие $(\sigma - \tau)$-дифференцирования, введенного А. Накажимой и М. Бресаром. Вводятся различные обобщения понятия (σ, τ)-дифференцирования, обобщенного жорданова (σ, τ)-дифференцирования, обобщенного лиева (σ, τ)-дифференцирования. Изучены связи между этими классами дифференцирований и их гомологические свойства.

Ключевые слова: обобщенное дифференцирование, некоммутативные кольца, точные последовательности модулей, расщепляющиеся последовательности

1. Введение

Понятие обобщенных производных первичного кольца A ввели М. Бресар [1] и Б. Хвала [2]. Аддитивное преобразование d ассоциативного кольца A называется *обобщенным дифференцированием*, если найдется такое дифференцирование α кольца A, для которого

$$d(xy) = d(x)y + x\alpha(y) \quad \text{при любых} \quad x, y \in A. \tag{1.1}$$

Таким образом, это понятие обобщает дифференцирование и левый мультипликатор (т. е. такое аддитивное отображение f, которое удовлетворяет тождеству $f(xy) = f(x)y$ при любых $x, y \in A$).

Аналогичное понятие ввел А. Накажима в работе [3]. Он установил ряд категорных свойств обобщенных дифференцирований.

Пусть A — алгебра над коммутативным кольцом k, а M — A/k-бимодуль, т. е. M является левым и правым A-модулем, причем при любых $s, t \in A$, $a \in k$ $m \in M$ выполняются соотношения $s(mt) = (sm)t$, $a(sm) = (as)m$ и $am = ma$. Пару (f, w), в которой $f : A \to M$ — гомоморфизм k-модулей, а $w \in M$, называем *обобщенным дифференцированием*, если для любых $s, t \in A$ выполнено соотношение

$$f(st) = f(s)t + sf(t) + swt. \tag{1.2}$$

Если кольцо A имеет единицу, то оба понятия обобщенного дифференцирования кольца совпадают.

В работе [3] Накажима доказал ряд категорных свойств множества всех обобщенных дифференцирований k-алгебры A в A/k-бимодуль M. В работе [4] им было введено следующее понятие. Пусть A, M и f такие, как выше. Для

Посвящается профессору Атсуши Накажима в честь его 60-летия.

элемента $w \in M$ пара (f, w) называется *обобщенным жордановым дифференцированием*, если

$$f(a^2) = f(a)a + af(a) + awa \quad \text{при любых} \quad a \in A. \tag{1.3}$$

Пара (f, w) называется *обобщенным лиевым дифференцированием*, если для любых $a, b \in A$ выполнено соотношение

$$f([a, b]) = [f(a), b] + [a, f(b)] + awb - bwa. \tag{1.4}$$

Здесь $[a, b] = ab - ba$.

Если $w = 0$, то эти определения приводят к обычным понятиям *жорданова* и *лиева дифференцирований* (см. [5–7]).

Цель работы — ввести обобщенные (σ, τ)-дифференцирования (соответственно обобщенные жордановы и лиевы (σ, τ)-дифференцирования) и установить ряд категорных свойств этих классов дифференцирований. Мы показываем, что для некоторых классов некоммутативных колец обобщенные жордановы (σ, τ)-дифференцирования совпадают с обобщенными (σ, τ)-дифференцированиями.

2. Основные определения

В этом разделе мы определяем обобщения понятий (σ, τ)-дифференцирований, жордановых и лиевых (σ, τ)-дифференцирований.

Пусть A и B — k-алгебры над коммутативным кольцом k. *Левым A/k-модулем* назовем такой левый A-модуль M, для которого при любых $a \in A$, $s \in k$, $w \in M$ выполняются равенства: $a(sw) = s(aw)$ и $sw = ws$. Под $(A/k, B/k)$-*бимодулем* будем понимать такой левый A/k-модуль и правый B/k-модуль M, для которого выполняется тождество $a(wb) = (aw)b$ $(a \in A, b \in B, w \in M)$. Если $A = B$, то M называем *A/k-бимодулем.* Если не оговаривается противное, то мы рассматриваем только k-линейные отображения.

Начнем с определения разных типов дифференцирований. Пусть σ и τ — произвольные k-эндоморфизмы кольца A, а M — A/k-бимодуль. Пусть $d : A \to M$ — некоторое отображение k-модулей и $x, y \in A$. Отображение d называется (σ, τ)-*дифференцированием*, если при любом выборе x, y выполняется тождество

$$d(xy) = d(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y). \tag{2.1}$$

Напомним, что в работе [8] *жорданово (σ, τ)-дифференцирование* определялось как такое отображение k-модулей $d : A \to M$, для которого выполняется тождество

$$d(x^2) = d(x)\tau(x) + \sigma(x)d(x). \tag{2.2}$$

Приведем определения обобщенных дифференцирований из работ [1, 2]. Гомоморфизм k-модулей $f : A \to M$ называется *обобщенным (σ, τ)-дифференцированием*, если для него найдется (σ, τ)-дифференцирование $d : A \to M$ с тождеством

$$f(xy) = f(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y) \tag{2.3}$$

при любых $x, y \in A$. Для $m, n \in M$ отображение

$$f_{m,n} : A \ni x \mapsto m\tau(x) + \sigma(x)n \in M \tag{2.4}$$

называется *обобщенным внутренним (σ, τ)-дифференцированием.*

Гомоморфизм k-модулей $d : A \to M$ называется *лиевым (σ,τ)-дифференцированием*, если
$$d([x,y]) = [d(x),y]_{\sigma,\tau} - [d(y),x]_{\sigma,\tau}. \tag{2.5}$$
Здесь $[x,y]_{\sigma,\tau} = x\tau(y) - \sigma(y)x$ при $x,y \in A$.

Наконец, следуя [3, 4], определим такое понятие. Пусть $x,y \in A$, $w \in M$. Гомоморфизм k-модулей $f : A \to M$ называется *обобщенным (σ,τ)-дифференцированием*, если
$$f(xy) = f(x)\tau(y) + \sigma(x)f(y) + \sigma(x)w\tau(y). \tag{2.6}$$
Мы обозначаем это дифференцирование через (f,w). Оно называется *обобщенным жордановым (σ,τ)-дифференцированием*, если
$$f(x^2) = f(x)\tau(x) + \sigma(x)f(x) + \sigma(x)w\tau(x). \tag{2.7}$$
Дифференцирование (f,w) называется *обобщенным лиевым (σ,τ)-дифференцированием*, если
$$f([x,y]) = [f(x),y]_{\sigma,\tau} - [f(y),x]_{\sigma,\tau} + \sigma(x)w\tau(y) - \sigma(y)w\tau(x). \tag{2.8}$$
Гомоморфизм k-модулей $f : A \to M$ называется *обобщенным внутренним (σ,τ)-дифференцированием*, если
$$f_{m,n}(xy) = f_{m,n}(x)\tau(y) + \sigma(x)f_{m,n}(y) + \sigma(x)(-m-n)\tau(y). \tag{2.9}$$
Здесь $m,n \in M$. Мы обозначаем это дифференцирование $(f_{m,n}, -m-n)$.

В течение всей работы мы пользуемся обобщенными (σ,τ)-дифференцированиями в смысле (2.6). Введем обозначения:

$\mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ для множества (σ,τ)-дифференцирований,

$g\,\mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ для множества обобщенных (σ,τ)-дифференцирований,

$J\,\mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ для множества жордановых (σ,τ)-дифференцирований,

$gJ\,\mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ для множества обобщенных жордановых (σ,τ)-дифференцирований,

$\mathrm{Lie}\,\mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ для множества лиевых (σ,τ)-дифференцирований,

$g\,\mathrm{Lie}\,\mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ для множества обобщенных лиевых (σ,τ)-дифференцирований,

$\mathrm{Inn}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ для множества внутренних (σ,τ)-дифференцирований,

$g\,\mathrm{Inn}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ для множества обобщенных внутренних (σ,τ)-дифференцирований.

Заметим, что все вышеуказанные множества имеют структуру k-модуля.

Пусть $f : A \to M$ является гомоморфизмом k-модулей. Для элемента $w \in M$ обозначим $w_l : A \ni x \mapsto wx \in M$, а также $w_r(x) = xw$.

3. Гомологические свойства (σ,τ)-дифференцирований

В этом разделе исследуем соотношения между k-модулями $g\,\mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ и $\mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$.

Лемма 3.1. *Пусть (f, m) — обобщенное (σ,τ)-дифференцирование. Тогда существует такое (σ,τ)-дифференцирование $d : A \to M$, для которого при любых $s, t \in A$ выполнено соотношение $f(st) = f(s)\tau(t) + \sigma(s)d(t)$. Если, кроме того, $\{m \in M \mid Am = 0\} = 0$ и отображение $\sigma : A \to A$ сюръективно, то d определяется однозначно исходя из f.*

Доказательство. Определим отображение $d : A \to M$ формулой $d = f + m_l\tau$, подробнее, $d(s) = f(s) + m\tau(s)$, $s \in A$. Тогда имеем соотношение (2.6), $d(st) = d(s)\tau(t) + \sigma(s)d(t)$. Заключаем, что d служит (σ,τ)-дифференцированием и $f(st) = f(s)\tau(t)+\sigma(s)d(t)$. Кроме того, если d_1 и d_2 являются (σ,τ)-дифференцированиями, так что $f(st) = f(s)\tau(t)+\sigma(s)d_1(t) = f(s)\tau(t)+\sigma(s)d_2(t)$, то $\sigma(s)(d_1 - d_2)(t) = 0$. Поскольку отображение σ сюръективно, выводим $d_1 = d_2$.

Отметим, что если A содержит единицу 1, то σ сюръективно и f является (σ,τ)-дифференцированием в смысле (2.3). Тогда для любого унитарного A/k-бимодуля M выводим равенство $f(t) = f(1)\tau(t)+d(t)$, так что $f(st) = f(s)\tau(t)+\sigma(s)f(t) + \sigma(s)(-f(1))\tau(t)$. Следовательно, f является обобщенным (σ,τ)-дифференцированием $(f, -f(1))$ в смысле (2.6). Мы называем (σ,τ)-дифференцирование d из леммы 3.1 *ассоциированным* с f.

Лемма 3.2. *Пусть $d : A \to M$ — (σ,τ)-дифференцирование. Тогда для любого ненулевого $m \in M$ отображение $(f = d+m_l\tau, -m)$ является обобщенным (σ,τ)-дифференцированием, причем $f \neq d$ и d ассоциировано с f.*

Доказательство. Для ненулевого элемента $m \in M$ отображение $f : A \to M$, определенное формулой $f = d + m_l\tau$, представляет собой гомоморфизм k-модулей и $f(st) = d(st) + m\tau(st) = d(s)\tau(t) + \sigma(s)d(t) + m\tau(s)\tau(t) = f(s)\tau(t) + \sigma(s)\tau(t)+\sigma(s)(-m)\tau(t)$, так что $(f, -m)$ является обобщенным (σ,τ)-дифференцированием и легко выводится соотношение $f(st) = f(s)\tau(t) + \sigma(s)d(t)$.

Замечание 3.1. Для обобщенного (σ,τ)-дифференцирования $(f, m) : A \to M$ отображение $d_1 : A \to M$, определенное формулой $d_1(s) = (f + m_r\sigma)(s) = f(s) + \sigma(s)m$, будет (σ,τ)-дифференцированием, однако соотношение $f(st) = f(s)\tau(t) + \sigma(s)d_1(t)$ не выполняется. Обратно, если $d : A \to M$ является (σ,τ)-дифференцированием, то $(d + m_r\sigma, -m)$ служит (σ,τ)-дифференцированием и также $(d + m_r\sigma)(st) \neq (d + m_r\sigma)(s)\tau(t) + \sigma(s)d(t)$. В любом случае если определить обобщенное (σ,τ)-дифференцирование в (2.3) по формуле $f(st) = \sigma(s)f(t)+d(s)\tau(t)$, то леммы 3.1 и 3.2 выполняются для правого умножения m_r.

Теперь если (f, m) и (g, n) — обобщенные (σ,τ)-дифференцирования, то $(f+g, m+n)$ и (af, am) $(a \in k)$ также служат обобщенными (σ,τ)-дифференцированиями и $g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M)$ является k-модулем. Для k-модулей $\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M)$ и $g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M)$ выполняется следующая

Теорема 3.1. *Пусть M является A/k-бимодулем, причем $\{m \in M \mid Am = 0\} = 0$, а отображение $\sigma : A \to A$ сюръективно. Тогда следующая последовательность k-модулей является точной расщепляющейся последовательностью:*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi_M} g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) \xrightarrow{\varphi_M} \operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Здесь $\psi_M(m) = (m_l\tau, -m)$ и $\varphi_M(f, m) = f + m_l\tau$.

Доказательство. По определению сложения в $g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M)$ отображения ψ_M и φ_M — гомоморфизмы k-модулей. Тогда по леммам 3.1, 3.2 гомоморфизм φ_M является эпиморфизмом и легко видеть, что $\operatorname{Ker}\varphi_M = \operatorname{Im}\psi_M$.

Определим отображение $\varphi'_M : \operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) \to g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M)$ по формуле $\varphi'_M(d) = (d, 0)$. Тогда $\varphi_M\varphi'_M$ — тождественное отображение на $\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M)$, так что последовательность (3.1) точная и расщепляющаяся.

Можно вывести расщепление последовательности (3.1) с помощью отображений $\psi : M \ni m \mapsto (m_r\sigma, -m) \in g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M)$ и $\varphi : g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) \ni (f, m) \mapsto f + m_r\sigma \in \operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M)$.

Точность последовательности (3.1) приводит к следующей функториальной связи между $\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -)$ и $g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -)$. Пусть $\alpha : M \to N$ — некоторый гомоморфизм A/k-бимодулей. Тогда α индуцирует гомоморфизм k-модулей:

$$\alpha_\star : g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) \ni (f, m) \mapsto (\alpha f, \alpha(m)) \in g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, N),$$

и $g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -)$ является функтором из категории A/k-бимодулей в категорию k-модулей. Кроме того, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
g\mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) & \xrightarrow{\alpha_\star} & g\mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, N) \\
\phi_M \downarrow & & \downarrow \phi_N \\
\mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) \oplus M & \xrightarrow{\overline{\alpha_\star}} & \mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, N) \oplus N,
\end{array}$$

где $(\overline{\alpha_\star})(d, m) = (\alpha d, \alpha(m))$, $\phi_X(f, x) = (f + x_l\tau, x)$ $(x \in X,\ X = M, N)$. Таким образом, имеется естественное преобразование функторов

$$\Phi : g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -) \longrightarrow \operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -) \oplus F,$$

где F — стирающий функтор из категории A/k-бимодулей в категорию k-модулей. Поскольку Φ_M — изоморфизм для любого A/k-бимодуля M из теоремы 3.1 получаем

Следствие 3.1. *Функторы $g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -)$ и $\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -) \oplus F$ из категории A/k-бимодулей в категорию k-модулей естественно эквивалентны.*

Теорема 3.2. *Пусть $\{m \in M \mid Am = 0\} = 0$ и $\sigma : A \to A$ сюръективно. Тогда следующая диаграмма коммутативна, а ее строки являются точными и расщепляющимися:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\Psi_1} & g\operatorname{Inn}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) & \xrightarrow{\varphi_1} & \operatorname{Inn}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) & \longrightarrow & 0 \\
 & & i_0 \downarrow & & i \downarrow & & \downarrow i_1 & & \\
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\Psi_M} & g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) & \xrightarrow{\varphi_M} & \operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Здесь i_0, i, i_1 — канонические инъекции,

$$\Psi_1(m) = (f_{m,0}, -m), \quad \varphi_1((f_{m,n}, -m-n)) = f_{m,n} + (-m-n)_l\tau,$$

$d_n : A \to M$ является внутренней (σ, τ)-производной, определенной по формуле $d_n(s) = n\tau(s) - \sigma(s)n$ для любого $s \in A$.

Доказательство. Легко видеть, что все отображения диаграммы служат гомоморфизмами k-модулей, а ее коммутативность очевидна. Предположим, что $\varphi_1((f_{m,n}, -m-n)) = 0$. Тогда для любого $s \in A$ выводим $n\tau(s) = \sigma(s)n$, так что $f_{m,n} = (m+n)_l\tau = f_{m+n,0}$. Отсюда $\operatorname{Im}\Psi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_1$. Остальное следует из теоремы 3.1 и определения Ψ_1 и φ_1.

Любое (σ, τ)-дифференцирование является обобщенным (σ, τ)-дифференцированием. Следующий пример показывает, что обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 3.1. Рассмотрим кольцо матриц

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пусть элементы n и m выбраны из $\mathbb{Z}$. Рассмотрим A-бимодуль матриц

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пусть σ и τ — два эндоморфизма A, определенные формулой

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \tau\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}.$$

Выберем $w = \begin{bmatrix} 0 & -m \\ 0 & -n \end{bmatrix} \in M$. Тогда гомоморфизм $\mathbb{Z}$-модулей $f : A \to M$, определенный по формуле

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & y + mz \\ 0 & nz \end{bmatrix},$$

является обобщенным (σ, τ)-дифференцированием, но не (σ, τ)-дифференцированием на A.

4. Гомологические свойства обобщенных жордановых и лиевых (σ, τ)-дифференцирований

В этом разделе обсуждается связь между k-модулями $gJ\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M)$ и $\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M)$ (соответственно $g\operatorname{Lie}\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M)$ и $\operatorname{Lie}\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M)$) для A/k-бимодуля M.

Напомним некоторые определения. Пусть $g : A \to B$ — k-линейное отображение k-алгебры A в k-алгебру B, которое называется *жордановым гомоморфизмом*, если для любого $a \in A$

$$g(a^2) = g(a)g(a).$$

Если A не имеет кручения по модулю два, то это равносильно тому, что для любых $a, b \in A$

$$g(a \circ b) = g(a) \circ g(b),$$

здесь $a \circ b = ab + ba$, g называется *лиевым гомоморфизмом* если для любых $a, b \in A$

$$g([a, b]) = [g(a), g(b)].$$

Следуя работе [4], построим (σ, τ)-тривиальное расширение $A \times_w M$. Пусть w — элемент M, а $A \times_w M$ — прямое произведение k-модулей A и M. Определим умножение на $A \times_w M$ по формуле

$$(a, m)(b, n) = (ab, \sigma(a)n + m\tau(b) + \sigma(a)w\tau(b))$$

для любых $(a, m), (b, n) \in A \times_w M$. Легко видеть, что такое умножение ассоциативно и выполнен закон дистрибутивности. Потому $A \times_w M$ является k-алгеброй. Легко проверить следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть $A\times_w M$ — k-алгебра, определенная выше. Пусть σ и τ сюръективны. Если A имеет единицу 1, то $(1,-w)$ — единичный элемент $A\times_w M$. Если a обратим в A, то (a,m) обратим в $A\times_w M$ и его обратным будет $(a^{-1},-\sigma(a^{-1})w-w\tau(a^{-1})-\sigma(a^{-1})m\tau(a^{-1}))$.*

В следующей лемме устанавливается связь между обобщенными жордановыми (лиевыми) (σ,τ)-дифференцированиями и жордановыми (лиевыми) гомоморфизмами.

Лемма 4.2. *Для любого k-линейного отображения $f: A\to M$ полагаем* $\mathbf{F}$*: $A\ni a\to (a,f(a))\in A\times_w M$. Тогда*

(1) (f,w) является обобщенным (σ,τ)-дифференцированием тогда и только тогда, когда $\mathbf{F}$ *— гомоморфизм колец;*

(2) (f,w) является обобщенным жордановым (лиевым) (σ,τ)-дифференцированием тогда и только тогда, когда $\mathbf{F}$ *служит жордановым (лиевым) гомоморфизмом.*

Доказательство. Отображение f является обобщенным (σ,τ)-дифференцированием, если и только если $f(ab)=f(a)\tau(b)+\sigma(a)f(b)+\sigma(a)w\tau(b)$. Поэтому утверждение следует из определения умножения в кольце $A\times_w M$. Соотношение (2) устанавливается таким же образом.

Лемма показывает, что свойства обобщенных жордановых (лиевых) (σ,τ)-гомоморфизмов приводят к свойствам жордановых (лиевых) дифференцирований.

Лемма 4.3. *Пусть $f: A\to M$ — k-линейное отображение. Тогда для любого $w\in M$ выполняются свойства:*

(1) если (f,w) — обобщенное жорданово (лиево) (σ,τ)-дифференцирование, то $f+w_l\tau$ и $f+w_r\sigma$ тоже служат жордановыми (лиевыми) (σ,τ)-дифференцированиями;

(2) если f — жорданово (лиево) (σ,τ)-дифференцирование, то $(f+w_l\tau,-w)$ и $(f+w_r\sigma,-w)$ служат обобщенными жордановыми (лиевыми) (σ,τ)-дифференцированиями.

Доказательство проводится аналогично доказательствам из разд. 3.

Приведем категорные приложения леммы 4.3.

Легко заметить, что $J\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$, $gJ\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$, $\operatorname{Lie}\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ и $g\operatorname{Lie}\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ становятся k-модулями, если операции сложения и скалярного умножения определить следующим образом. Для любых $m,n\in M$, $(f,m),(g,n)\in gJ\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ (соответственно $g\operatorname{Lie}\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$) и $a\in k$ будет $(f+g,m+n)$, $a(f,m)=(af+am)\in gJ\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ (соответственно $g\operatorname{Lie}\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$). По лемме 4.3 легко установить следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть $\{m\in M\mid Am=0\}=0$ и σ сюръективно. Тогда следующая последовательность k-модулей точная и расщепляющаяся:*

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\psi_M} gJ\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)\xrightarrow{\varphi_M} J\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)\longrightarrow 0. \tag{4.1}$$

Здесь $\psi_M(m)=(m_l\tau,-m)$ и $\varphi_M(f,m)=f+m_l\tau$.

Заметим, что (4.1) тоже точная последовательность. Это устанавливают отображения

$$\psi: M\ni m\mapsto (m_r\sigma,-m)\in gJ\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$$

и

$$\varphi : gJ\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) \ni (f, m) \mapsto f + m_r\sigma \in J\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M).$$

Далее, точная последовательность (4.1) приводит к следующей функториальной зависимости между $J\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -)$ и $gJ\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -)$. Пусть $\alpha : M \to N$ — гомоморфизм A/k-бимодулей. Тогда α индуцирует гомоморфизм k-модулей

$$\alpha_\star : gJ\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) \ni (f, m) \mapsto (\alpha f, \alpha(m)) \in gJ\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, N)$$

и $g\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -)$ является функтором из категории A/k-бимодулей в категорию k-модулей. Кроме того, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} gJ\mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) & \xrightarrow{\alpha_\star} & gJ\mathrm{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, N) \\ \phi_M \downarrow & & \downarrow \phi_N \\ J\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) \oplus M & \xrightarrow{\overline{\alpha_\star}} & J\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, N) \oplus N. \end{array}$$

Здесь $(\overline{\alpha_\star})(f, m) = (\alpha f, \alpha(m))$, $\phi_X(f, x) = (f + x_l\tau, x)$ $(x \in X,\ X = M, N)$. Мы имеем естественное преобразование функторов

$$\Phi : gJ\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -) \longrightarrow J\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -) \oplus F,$$

где F — стирающий функтор из категории A/k-бимодулей в категорию k-модулей. Поскольку для любого A/k-бимодуля M отображение Φ_M является изоморфизмом, из теоремы 4.1 выводим

Следствие 4.1. *Функторы $gJ\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -)$ и $J\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -) \oplus F$ из категории A/k-бимодулей в категорию k-модулей естественно эквивалентны.*

Аналогично устанавливается следующая теорема для обобщенных лиевых (σ, τ)-дифференцирований.

Теорема 4.2. *Пусть $\{m \in M \mid Am = 0\} = 0$ и $\sigma : A \to A$ сюръективно, тогда расщепима следующая диаграмма:*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi_M} g\operatorname{Lie}\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) \xrightarrow{\varphi_M} \operatorname{Lie}\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, M) \longrightarrow 0, \tag{4.2}$$

где $\psi_M(m) = (m_l\tau, -m)$ и $\varphi_M(f, m) = f + m_l\tau$.

Следствие 4.2. *Функторы $g\operatorname{Lie}\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -)$ и $\operatorname{Lie}\operatorname{Der}_k^{(\sigma,\tau)}(A, -) \oplus F$ из категории A/k-бимодулей в категорию k-модулей естественно изоморфны.*

Пример 4.1. Пусть R — кольцо, $\operatorname{char} R \neq 2$, а для всех $a \in R$ имеем $a^2 = 0$. Пусть R имеет такой ненулевой элемент $0 \neq x$, для которого при всех $a \in R$ выполнено равенство $axa = 0$, однако $axb \neq 0$ для некоторых $0 \neq a$, $0 \neq b \in R$ и, кроме того, $ax \neq 0$ для некоторого $0 \neq a \in R$. Рассмотрим кольцо матриц

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}.$$

Пусть σ и τ — эндоморфизмы A, определенные по формулам

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выберем $w = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$. Тогда отображение R-модулей $f : A \to A$, заданное формулой

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ax \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

определяет жорданово (σ, τ)-дифференцирование, но не обобщенное (σ, τ)-дифференцирование A.

Пример 4.2. Пусть

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пусть σ и τ — эндоморфизмы A, определенные формулами

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & -y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выберем $0 \neq m$, $0 \neq n \in \mathbb{Z}$. Тогда отображение $\mathbb{Z}$-модулей $d : A \to A$, определенное как

$$d\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xm & xn \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

является лиевым (σ,τ)-дифференцированием, но не (σ,τ)-дифференцированием или жордановым (σ,τ)-дифференцированием кольца A.

С леммой 4.3(2) связан следующий

Пример 4.3. Пусть A, σ, τ, d, m, n выбраны, как в примере 4.2. Тогда $(f = d + w_l\tau, -w)$ — обобщенное лиево (σ,τ)-дифференцирование по лемме 4.3(2), здесь $w = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$, $0 \neq k \in \mathbb{Z}$. Значит, гомоморфизм $\mathbb{Z}$-модулей $f : A \to A$, определенный по формуле

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x(m-k) & xn \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

является обобщенным лиевым (σ,τ)-дифференцированием, но не обобщенным (σ,τ)-дифференцированием.

Очевидно, любое лиево (σ,τ)-дифференцирование служит обобщенным лиевым (σ,τ)-дифференцированием. В следующем примере укажем обобщенное лиево (σ,τ)-дифференцирование, которое не будет лиевым (σ,τ)-дифференцированием.

Пример 4.4. Пусть

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пусть σ и τ — эндоморфизмы кольца A, определенные по формуле

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \tau\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & -y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выберем $0 \neq m$, $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ и $w = \begin{bmatrix} -2m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$. Тогда отображение $\mathbb{Z}$-модулей $d : A \to A$, определенное по формуле

$$d\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2mx & xn + my \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

является обобщенным лиевым (σ,τ)-дифференцированием, но не лиевым (σ,τ)-дифференцированием.

5. Другие результаты об обобщенных жордановых (σ, τ)-дифференцированиях

Жордановы (σ, τ)-дифференцирования были изучены в работе [8], где установлено следующее

Предложение 5.1 [8, предложение 3]. *Пусть M будет A/k-бимодулем без 2-кручения. Тогда если $d : A \to M$ является жордановым (σ, τ)-дифференцированием, то d удовлетворяет следующим соотношениям:*

(i) $d(ab + ba) = d(a)\tau(b) + d(b)\tau(a) + \sigma(a)d(b) + \sigma(b)d(a)$,

(ii) $d(aba) = d(a)\tau(b)\tau(a) + \sigma(a)d(b)\tau(a) + \sigma(a)\sigma(b)d(a)$,

(iii) $d(abc + cba) = d(a)\tau(b)\tau(c) + d(c)\tau(b)\tau(a) + \sigma(a)d(b)\tau(c) + \sigma(c)d(b)\tau(a) + \sigma(a)\sigma(b)d(c) + \sigma(c)\sigma(b)d(a)$,

(iv) $d(a, b)[\tau(a), \tau(b)] = 0$ *и* $[\sigma(a), \sigma(b)]d(a, b) = 0$,

(v) $d(a, b)\tau(c)[\tau(a), \tau(b)] + [\sigma(a), \sigma(b)]\sigma(c)d(a, b) = 0$, *где* $a, b, c \in A$ *и* $d(a, b) = d(ab) - d(a)\tau(b) - \sigma(a)d(b)$.

В этом разделе мы покажем, что результаты о жордановых (σ, τ)-дифференцированиях легко продолжаются на обобщенные жордановы (σ, τ)-дифференцирования. Далее предполагаем, что M является A/k-бимодулем без 2-кручения, $f : A \to M$ — обобщенное жорданово (σ, τ)-дифференцирование и $a^b = f(ab) - f(a)\tau(b) - \sigma(a)f(b) - \sigma(a)w\tau(b)$, $a, b \in A$.

Следуя рассуждениям из доказательства предложения 5.1, легко доказать следующую лемму о (σ, τ)-дифференцированиях.

Лемма 5.1. *Пусть M определено, как выше, и пусть σ и τ — эндоморфизмы A. Если гомоморфизм k-модулей $f : A \to M$ служит обобщенным жордановым (σ, τ)-дифференцированием, то он удовлетворяет следующим соотношениям:*

(i) $f(ab + ba) = f(a)\tau(b) + f(b)\tau(a) + \sigma(a)f(b) + \sigma(b)f(a) + \sigma(a)w\tau(b) + \sigma(b)w\tau(a)$,

(ii) $f(aba)=f(a)\tau(b)\tau(a)+\sigma(a)f(b)\tau(a)+\sigma(a)\sigma(b)f(a)+\sigma(a)[w\tau(b)+\sigma(b)w]\tau(a)$,

(iii) $f(abc+cba) = f(a)\tau(b)\tau(c) + f(c)\tau(b)\tau(a) + \sigma(a)f(b)\tau(c) + \sigma(c)f(b)\tau(a) + \sigma(a)\sigma(b)f(c) + \sigma(c)\sigma(b)f(a) + \sigma(a)[w\tau(b) + \sigma(b)w]\tau(c) + \sigma(c)[w\tau(b) + \sigma(b)w]\tau(a)$,

(iv) $a^b[\tau(a), \tau(b)] = 0$ *и* $[\sigma(a), \sigma(b)]a^b = 0$,

(v) $a^b\tau(c)[\tau(a), \tau(b)] + [\sigma(a), \sigma(b)]\sigma(c)a^b = 0$, *где* $a, b, c \in A$, $w \in M$.

Следующая теорема обобщает [8, теорема 1].

Теорема 5.1. *Пусть A — некоммутативное кольцо, M, как выше, а σ и τ — эндоморфизмы A. Предположим, что*

либо σ сюръективно и соотношение $bAx = 0$ для $x \in M$, $b \in A$ возможно только при $x = 0$ или $b = 0$,

либо τ сюръективно и соотношение $xAb = 0$ для $b \in A$, $x \in M$ влечет $x = 0$ или $b = 0$.

Тогда любое обобщенное жорданово (σ, τ)-дифференцирование $f : A \to M$ является обобщенным (σ, τ)-дифференцированием.

Доказательство. Рассмотрим только случай, в котором τ сюръективно и соотношение $xAb = 0$ для $b \in A$, $x \in M$ влечет $x = 0$ или $b = 0$. Другой случай рассматривается аналогично.

Умножим соотношение (v) из леммы 5.1 справа на $[\tau(a), \tau(b)]$ и по (iv) получим $a^b\tau(c)[\tau(a), \tau(b)]^2 = 0$. Мы используем [8, замечание 5] и предполагаем кольцо A первичным. Поскольку τ сюръективно, это соотношение приводит к тому, что для любой пары $a, b \in A$ либо $a^b = 0$, либо $[\tau(a), \tau(b)]^2 = 0$.

Предположим, что f не является обобщенным (σ, τ)-дифференцированием. Так как τ сюръективно, по лемме из [9, с. 428] получаем, что A — коммутативное кольцо; противоречие. Тогда $a^b = 0$ и $f(ab) = f(a)\tau(b) + \sigma(a)f(b) + \sigma(a)w\tau(b)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brešar M.* On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations // Glasgow Math. J. 1991. V. 33. P. 89–93.

2. *Hvala B.* Generalized derivations in rings // Comm. Algebra. 1998. V. 26, N 4. P. 1147–1166.

3. *Nakajima A.* On categorical properties of generalized derivations // Sci. Math. 1999. V. 2. P. 345–352.

4. *Nakajima A.* Generalized Jordan derivations // International Conference on Ring Theory. Boston: Birkhäuser, 2000. P. 235–243.

5. *Cusack J. M.* Jordan derivations on rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 53. P. 321–324.

6. *Herstein I. N.* Jordan derivations of prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 1104–1110.

7. *Herstein I. N.* Topics in ring theory. Chicago; London: Univ. of Chicago Press, 1969.

8. *Brešar M., Vukman J.* Jordan (θ, φ)-derivations // Glasnic Matematički. 1991. V. 26. P. 13–17.

9. *Smiley M. F.* Jordan homomorphisms onto prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 8. P. 426–429.

Статья поступила 25 марта 2002 г.

Аржач Нуржан, Албаш Эмине (Nurcan Argaç, Emine Albaş)
Department of Mathematics, Science Faculty, Ege University,
35100 Bornova, Izmir, Turkey
`argac@sci.ege.edu.tr, albas@sci.ege.edu.tr`