Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 517.11:518.5

ИНТЕНСИОНАЛЬНОСТЬ, РЕФЛЕКСИЯ, БОЛЬШИЕ КАРДИНАЛЫ

Н. В. Белякин, В. А. Ганов

Аннотация: Исследуются дедуктивные возможности аксиоматических систем в языке множеств и классов с принципом рефлексии, распространенным на все формулы, не содержащие классовых кванторов. Их характерная особенность состоит в том, что *не все* множества являются классами. Предлагается способ построения моделей для этих систем и устанавливается связь с большими кардиналами.

Ключевые слова: множество, класс, рефлексия, интенсиональность, недостижимые кардиналы, кардиналы Мало, согласованный выбор

В аксиоматических исследованиях по теории множеств довольно заметную роль играет так называемый *принцип рефлексии.* В частности, согласно известной теореме Леви [1, с. 32] в ZF доказуемо:

$$\forall M' \,\exists\alpha \left(M' \subseteq V_\alpha \,\&\, \forall\bar{x} \mathop{\&}_{i=1}^{r} \big(\varphi_i(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi_i^{V_\alpha}(\bar{x})\big)\right)$$

для произвольного списка $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ ZF-формул, где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — список переменных, включающий все свободные переменные этих формул, $\alpha \in \mathrm{On}$, V_α — множество всех множеств рангов $< \alpha$, а $\varphi_i^{V_\alpha}$ — релятивизация φ_i к V_α (результат ограничения всех кванторов φ_i множеством V_α).

Отсюда тривиально следует, что если мы присоединим к языку теории ZF предметную константу M, постулируем транзитивность множества M и примем схему аксиом рефлексии:

$$\forall\bar{x} \in M\,(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi^M(\bar{x})), \tag{1}$$

где φ — произвольная ZF-формула, то получим консервативное расширение ZF. Поскольку в этом расширении всякая ZF-формула абсолютна относительно M, а всякое ZF-доказательство остается верным при его релятивизации к M, нетрудно убедиться, что $M = V_{\alpha_0}$ (α_0 есть ранг M) и α_0 является кардиналом.

В метаматематическом аспекте M является моделью ZF: если φ — ZF-аксиома, то в данном расширении выводима φ^M. Однако ввиду упомянутой консервативности этот факт не верифицируем: в этой расширенной теории можно сформулировать, но нельзя доказать предложение «Все аксиомы ZF выполняются в M», если, конечно, сама ZF непротиворечива (что мы подразумеваем). Впрочем, вопросы верифицируемости нас занимать не будут, поскольку мы здесь намерены придерживаться чисто синтаксического подхода (как в [2]). Когда мы будем говорить, что все аксиомы какой-либо теории T выполняются на некотором множестве $\mathscr{A}$ (в контексте теории T'), то это просто означает, что всякая T-аксиома, релятивизованная к $\mathscr{A}$, доказуема в T'.

Итак, присоединение к ZF схемы рефлексии не приводит к заметному усилению. Ситуация делается несколько более интересной, если мы дополнительно постулируем $\mathrm{Reg}(\alpha_0)$ (регулярность кардинала α_0). В полученной таким образом теории (обозначим ее через S_0) выводимо существование некоторых больших кардиналов.

Утверждение 1. *В S_0 доказуемо:*

$$\forall x\, f\, (x \in M \,\&\, (f : x \Rightarrow M) \to f \in M). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $f : x \Rightarrow M$, $x \in M$. Допустим от противного, что $f \notin M$. Тогда, как легко понять, множество рангов $f(t)$ $(t \in x)$ должно быть конфинально α_0. Пусть $t_1 \sim t_2$ означает, что ранги $f(t_1)$ и $f(t_2)$ равны. Фактор-множество $y = x/\sim$, очевидно, принадлежит M. Для $u \in y$ пусть $g(u)$ есть общий ранг всех $f(t)$, $t \in u$. Функция $g : y \Rightarrow \alpha_0$ разнозначна и потому индуцирует вполне упорядочение множества y (тоже принадлежащее M). А так как в ZF доказуемо, что всякое вполне упорядоченное множество изоморфно некоторому ординалу, то в рассматриваемом случае этот ординал обязан принадлежать M. Между тем, область значений функции g по построению конфинальна α_0, и это противоречит регулярности α_0.

Выраженное в (2) свойство множества M (а по сути дела — кардинала α_0) является в отсутствие аксиомы выбора естественным и адекватным определением сильной недостижимости. Применительно к любому α это свойство, т. е. формулу $\forall x\, f\, (x \in V_\alpha \,\&\, (f : x \Rightarrow V_\alpha) \to f \in V_\alpha)$, обозначим через $\mathrm{Inac}(\alpha)$ и в дальнейшем будем понимать сильную недостижимость только в этом смысле. Очевидно, $\mathrm{Inac}(\alpha)$ влечет $\mathrm{Reg}(\alpha)$.

Схема (1) дает возможность (в рамках теории S_0) еще немного продвинуться в сторону больших кардиналов.

Утверждение 2. *В S_0 выводима следующая формульная схема* (*усиленная схема Мало*)*:*

$$\forall \bar{x}\, (\forall \alpha\, \exists! \beta\, \varphi(\alpha, \beta, \bar{x}) \to \forall \gamma\, \exists \delta > \gamma\, (\mathrm{Inac}(\delta) \,\&\, \forall \alpha\, \beta\, (\alpha < \delta \,\&\, \varphi(\alpha, \beta, \bar{x}) \to \beta < \delta))) \tag{3}$$

для произвольной ZF*-формулы* φ (*где* $\alpha, \beta, \ldots$ *суть переменные для ординалов*).

Доказательство. Фиксируем $\bar{x} \in M$. В силу (1) имеем:

$$\forall \alpha\, \exists! \beta\, \varphi(\alpha, \beta, \bar{x}) \leftrightarrow \forall \alpha \in M\, \exists! \beta \in M\, \varphi^M(\alpha, \beta, \bar{x}) \leftrightarrow \forall \alpha \in M\, \exists! \beta \in M\, \varphi(\alpha, \beta, \bar{x}).$$

Стало быть, α_0 есть неподвижная точка ординальной последовательности, задаваемой посредством $\varphi(\alpha, \beta, \bar{x})$, так что для данного $\bar{x}$ и произвольного $\gamma \in M$ справедливо:

$$\forall \alpha\, \exists! \beta\, \varphi(\alpha, \beta, \bar{x}) \to \exists \delta > \gamma\, (\mathrm{Inac}(\delta) \,\&\, \forall \alpha\, \beta\, (\alpha < \delta \,\&\, \varphi(\alpha, \beta, \bar{x}) \to \beta < \delta)).$$

Отсюда снова с помощью (1) получаем:

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in M\, \exists! \beta \in M\, \varphi^M(\alpha, \beta, \bar{x}) \to \exists \delta \in M\, (\delta > \gamma \,\&\, \mathrm{Inac}^M(\delta) \,\&\, \\ \forall \alpha\, \beta \in M\, (\alpha < \delta \,\&\, \varphi^M(\alpha, \beta, \bar{x}) \to \beta < \delta)) \end{aligned}$$

для любых $\bar{x}$, γ из M. Тем самым показано, что в S_0 имеет место релятивизация схемы (3) к M, а значит, и сама эта схема.

Теперь можно распространить схему (3) на все S_0-формулы, поскольку константу M можно считать значением одного из параметров.

Заметим, что в силу (1), (3) и регулярности α_0 последовательность сильно недостижимых предшественников α_0 имеет длину α_0. По рефлексии аналогичный факт должен иметь место и во всем универсуме теории S_0. А именно, с помощью подходящей ZF-формулы можно заиндексировать последовательность сильно недостижимых кардиналов всеми ординалами. Отсюда, впрочем, отнюдь не следует, что если (3) выполняется на некотором V_λ, то λ — регулярный кардинал (хотя имеет место импликация $\mathrm{Reg}(\lambda) \to \mathrm{Inac}(\lambda)$). Но даже в случае своей регулярности λ может не быть кардиналом Мало.

Следующий аналог теоремы Леви носит для нас скорее «рекогносцировочный» характер: в дальнейшем мы не раз будем встречаться с его разнообразными модификациями.

Утверждение 3. *Для произвольного списка Δ ZF-формул в ZF +(3) доказуемо:*

$$\forall\gamma\,\exists\delta > \gamma\,\bigl(\mathrm{Inac}(\delta)\,\&\,\forall\bar{x} \in V_\delta \mathop{\&}_{\varphi_i \in \Delta} \bigl(\varphi_i(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi_i^{V_\delta}(\bar{x})\bigr)\bigr).$$

Доказательство. Определим ординальную последовательность

$$\{\sigma_{\Delta,\xi} : \xi \in \mathrm{On}\} \tag{4}$$

так, чтобы для всякого $\xi > 0$ было верно:

$$\forall\bar{x} \in V_{\sigma_{\Delta,\xi}} \mathop{\&}_{\varphi_i \in \Delta} \bigl(\varphi_i(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi_i^{V_{\sigma_{\Delta,\xi}}}(\bar{x})\bigr). \tag{5}$$

Для этого полагаем $\sigma_{\Delta,0} = 0$, а для предельных ξ пусть $\sigma_{\Delta,\xi} = \bigcup\limits_{\zeta<\xi} \sigma_{\Delta,\zeta}$; переход от ξ к $\xi + 1$ осуществим с помощью теоремы Леви: приняв за M' множество $V_{\sigma_{\Delta,\xi}} \cup \{V_{\sigma_{\Delta,\xi}}\}$, в качестве очередного $V_{\sigma_{\Delta,\xi+1}}$ возьмем доставляемое этой теоремой V_α при минимальном подходящем α. Так как $V_{\sigma_{\Delta,\xi}} \in V_{\sigma_{\Delta,\xi+1}}$, то $\sigma_{\Delta,\xi} < \sigma_{\Delta,\xi+1}$. Нетрудно убедиться, что при этом (5) сохраняет силу и для предельных ξ, так что, в частности, последовательность (4) содержит все свои предельные точки. А поскольку эта последовательность определима в ZF, применяя к ней схему (3), получаем искомый результат.

Через $S_{0,\Delta}$ обозначим фрагмент теории S_0, который получается ограничением схемы (1) формулами списка Δ. Только что приведенное доказательство дает способ построения интерпретаций $S_{0,\Delta}$ в ZF+(3), в которых универсум множеств и отношение принадлежности сохраняют свой первоначальный смысл, а в качестве M можно взять V_σ для любого сильно недостижимого σ из последовательности (4).

ZF-формулу, выражающую свойство «быть сильно недостижимым кардиналом Мало», обозначим через $\mathrm{Mahlo}(\alpha)$. Как известно, $\mathrm{Mahlo}(\lambda)$ влечет выполнение в V_λ всех аксиом ZF, так что доказательство утверждения 3 можно провести в V_λ. Стало быть, в силу утверждения 2 схема (3) тоже выполняется в V_λ. В свою очередь, отсюда легко выводится, что любая сходящаяся к λ ординальная последовательность имеет сильно недостижимые неподвижные точки. Обычно этот факт устанавливается в контексте ZFC, однако на самом деле аксиома выбора здесь не нужна.

Из сказанного непосредственно вытекает непротиворечивость S_0 относительно ZF $+\exists\alpha\,\mathrm{Mahlo}(\alpha)$. Естественно поэтому, что в S_0 нельзя вывести существование сильно недостижимого кардинала Мало. Имеет смысл привести чисто синтаксическое доказательство этой невыводимости.

В самом деле, предположим от противного, что имеется вывод $\exists\alpha\ \mathrm{Mahlo}(\alpha)$ в S_0, и пусть Δ — список формул, к которым в этом выводе применяется схема рефлексии. Пусть λ — наименьший сильно недостижимый кардинал Мало. Поскольку все аксиомы $S_{0,\Delta}$ верны в V_λ (коль скоро M интерпретируется как V_δ при подходящем $\delta < \lambda$), формула $\exists\alpha\ \mathrm{Mahlo}(\alpha)$ тоже верна в V_λ. Легко проверить, что ординал $\alpha \in V_\lambda$, удовлетворяющий $\mathrm{Mahlo}^{V_\lambda}(\alpha)$, действительно является сильно недостижимым кардиналом Мало и это противоречит выбору λ.

Далее мы будем предполагать, что существование сильно недостижимых кардиналов Мало совместно с ZF. Это же относится и к сильно недостижимым кардиналам гипер-Мало, гипергипер-Мало и т. д. Все эти кардиналы можно определить посредством единой ZF-формулы $\mathrm{Hyp}(n,\alpha)$, построение которой предоставляется читателю. Для удобства полагаем, что $\mathrm{Hyp}(0,\alpha)$ означает $\mathrm{Mahlo}(\alpha)$.

Если усилить S_0, постулировав $\mathrm{Hyp}(n-1,\alpha_0)$ $(n \geqslant 1)$, то в полученной теории будет выводима формульная схема:

$$\forall\bar{x}\,(\forall\alpha\,\exists!\beta\,\varphi(\alpha,\beta,\bar{x}) \to \forall\gamma\,\exists\delta > \gamma\,(\mathrm{Hyp}(n-1,\delta) \\ \&\,\forall\alpha\,\beta\,(\alpha < \delta\,\&\,\varphi(\alpha,\beta,\bar{x}) \to \beta < \delta))). \quad (3_n)$$

(Доказательство такое же, как для утверждения 2.) Легко видеть, что $S_0 + \mathrm{Hyp}(n-1,\alpha_0)$ непротиворечива относительно $\mathrm{ZF} + \exists\alpha\,\mathrm{Hyp}(n,\alpha)$; это является тривиальным метаматематическим следствием утверждения, которое мы сейчас докажем.

Утверждение 4. (а) *В* $\mathrm{ZF} + \exists\alpha\,\mathrm{Hyp}(n,\alpha)$ *доказуемо:*

$$\forall\gamma\,\exists\delta > \gamma\,\bigl(\mathrm{Hyp}(n-1,\delta)\,\&\,\forall\bar{x}\in V_\delta \mathop{\&}_{\varphi_i\in\Delta}\bigl(\varphi_i(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi_i^{V_\delta}(\bar{x})\bigr)\bigr)$$

для произвольного списка Δ ZF-*формул.*

(б) *Если* ZF-*формула* ψ *выводима в* $S_0 + \mathrm{Hyp}(n-1,\alpha_0)$, *то она выводима в* $\mathrm{ZF} + (3_n)$.

(в) *Формула* $\mathrm{Hyp}(n,\alpha_0)$ *невыводима в* $S_0 + (3_n)$.

Доказательство. Ограничимся случаем $n = 1$; другие случаи рассматриваются аналогично.

Доказательство (а) представляет собой незначительную модификацию доказательства утверждения 3 (и последующего примечания). Рассуждение следует проводить внутри V_λ (в предположении $\mathrm{Hyp}(1,\lambda)$), а на заключительном шаге вместо схемы (3) надо воспользоваться схемой (3_1).

Докажем (б). Пусть Δ — список формул, к которым применяется (1) при выведении ψ в $S_0 + \mathrm{Mahlo}(\alpha_0)$. В силу доказательства (а) в $\mathrm{ZF} + (3_1)$ доказуемо существование δ такого, что $\mathrm{Mahlo}(\delta)$ и

$$\forall\bar{x}\in V_\delta \mathop{\&}_{\varphi_i\in\Delta}\bigl(\varphi_i(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi_i^{V_\delta}(\bar{x})\bigr).$$

Присоединив к $\mathrm{ZF} + (3_1)$ константу M со спецификацией $M = V_\delta$, получаем искомый результат.

(в) Следуя доказательству утверждения 3 (в рамках теории $S_0 + (3_1)$), нетрудно убедиться в существовании наименьшего регулярного кардинала β_0 такого, что

$$\forall\bar{x}\in V_{\beta_0} \mathop{\&}_{\varphi_i\in\Delta}\bigl(\varphi_i(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi_i^{V_{\beta_0}}(\bar{x})\bigr),$$

где Δ — список формул, к которым применяется схема рефлексии в предполагаемом (от противного) выводе $\mathrm{Mahlo}(\alpha_0)$. Все аксиомы $S_{0,\Delta} + (3_1)$ превращаются в результате замены M на V_{β_0} в формулы, выводимые в $S_0 + (3_1)$, так что $\mathrm{Mahlo}(\beta_0)$ тоже доказуемо в этой теории. Снова в силу утверждения 3 имеем:

$$\exists\delta < \beta_0 \bigl(\mathrm{Reg}(\delta) \,\&\, \forall\bar{x} \in V_\delta \mathop{\&}_{\varphi_i \in \Delta} \bigl(\varphi_i^{V_\delta}(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi_i^{V_{\beta_0}}(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi_i(\bar{x})\bigr)\bigr),$$

что противоречит определению β_0.

Вышеприведенные результаты едва ли могут претендовать на новизну. Установленные в них факты можно найти, например, в [3], однако там (и в другой доступной нам литературе) они устанавливаются в контексте ZFC (поскольку в ZF нельзя доказать существование регулярных кардиналов). Поэтому мы посчитали необходимым явно продемонстрировать, что означенные факты (при $n = 0$) выводятся на самом деле только из $\mathrm{Reg}(\alpha_0)$, а точнее из предположения, что для некоторого списка Δ ZF-формул теорема Леви может доставить нам регулярное α, «отражающее» все формулы из Δ. Аналогичные допущения достаточны при $n \geqslant 1$.

Посмотрим теперь, что получится, если расширить S_0 до теории S_0^* за счет введения классовых переменных: $X, Y, \dots$. Подразумевается, что классы суть какие-то совокупности (или свойства) множеств, допускаемые в качестве значений указанных переменных. Расширение это заключается прежде всего в том, что схемы выделения и подстановки распространяются на любые S_0^*-формулы. Далее, к числу аксиом S_0^* присоединяется схема (3), тоже расширенная на все S_0^*-формулы, т. е. схема:

$$\forall\overline{Y}\,\forall\bar{x}\,(\forall\alpha\,\exists!\beta\,\varphi(\alpha,\beta,\bar{x},\overline{Y}) \\ \to \forall\gamma\,\exists\delta > \gamma\,(\mathrm{Inac}(\delta) \,\&\, \forall\alpha\,\beta\,(\alpha < \delta \,\&\, \varphi(\alpha,\beta,\bar{x},\overline{Y}) \to \beta < \delta))). \qquad (3^*)$$

Наконец, схему (1) примем для всех «чистых» формул (т. е. не содержащих M и классовых кванторов). Для этого надо определить релятивизацию к M произвольной чистой формулы $\varphi(\bar{x}, \overline{Y})$, где $\overline{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ — полный список классовых параметров φ. Формулу φ^M определяем как результат ограничения множественных кванторов φ константой M и замены Y_i на $Y_i \cap M$. (Аналогично определяется релятивизация φ к любому V_α.) На расширенную указанным образом схему рефлексии мы будем ссылаться как на схему (1^*).

Описание системы S_0^* на этом закончено. На самом деле, как мы сейчас увидим, можно обойтись следующим перечнем аксиом.

1^*. Аксиомы экстенсиональности и регулярности для множеств, транзитивность M и предложение 2.

2^*. Схема выделения для S_0^*-формул и схема (3^*).

3^*. Схема (1^*).

Утверждение 5. *Аксиомы пары, суммы, степени и бесконечности выводимы из* 1^*–3^* (*без схемы* (3^*)).

Доказательство. Для любых $x, y \in M$ существование множества $\{x, y\}$ обеспечивается схемой выделения. Затем в силу транзитивности M и схемы рефлексии без труда устанавливается принадлежность этого множества к M, после чего снова с помощью рефлексии доказывается существование неупорядоченной пары произвольных множеств. Аналогично выводится аксиома суммы. Поскольку таким образом множество M оказывается замкнутым относительно операций пары и суммы, оно удовлетворяет аксиоме бесконечности. Наконец, из аксиомы (2) (при участии схемы выделения) нетрудно вывести, что $y \subseteq x \in M$ влечет $y \in M$, откуда получаем существование множества-степени $\mathscr{P}(x)$ сначала для $x \in M$, а затем по рефлексии для любого x.

Утверждение 6. *Из* 1^*–3^* *следует схема подстановки для всех* S_0^**-формул.*

Доказательство. Для ZF-формул эта схема легко выводится из аксиомы (2) с использованием схем выделения и рефлексии, так что (с учетом утверждения 5) все аксиомы ZF, записанные в языке ZF, выводимы из 1^*–3^*. Стало быть, выводимо и существование мощности любого вполне упорядоченного множества. Пусть теперь множество u и S_0^*-формула $\varphi(x, y)$ произвольного вида (возможно, с параметрами) таковы, что $\forall x \in u\, \exists! y\, \varphi(x, y)$, но соответствующий случай схемы подстановки не имеет места. Для $x \in u$ пусть β_x есть ранг того единственного y, для которого верно $\varphi(x, y)$. При сделанном допущении совокупность этих β_x не ограничена и к ней можно применить схему (3^*). Пусть δ — сильно недостижимый кардинал, являющийся неподвижной точкой этой совокупности и превосходящий мощность множества $v = u/\sim$, где $x_1 \sim x_2 \leftrightarrow \beta_{x_1} = \beta_{x_2}$. Эта мощность заведомо существует, так как, очевидно, v вполне упорядочено. В силу $\mathrm{Reg}(\delta)$ множество ординалов β_x, меньших δ, будучи конфинальным δ, должно иметь порядковый тип δ, что невозможно, поскольку это множество равномощно некоторому $v' \subseteq v$. Следовательно, совокупность $\{\beta_x : x \in u\}$ ограничена некоторым γ, а значит, совокупность $\{y : \exists x \in u\, \varphi(x, y)\}$, будучи частью V_γ, является множеством.

Непротиворечивость S_0^* (относительно S_0) устанавливается тривиально. Дело в том, что в ее аксиомах, как это непосредственно видно из 1^*–3^*, содержится слишком мало информации о классах. В частности, ничто не мешает нам предположить, что имеется один-единственный класс, равный пустому множеству. Стало быть, S_0^* — консервативное расширение S_0.

Можно, правда, не опасаясь противоречия, усилить S_0^* дальнейшими аксиомами, которые, будучи (на эвристическом уровне) сопоставимы с аксиомами S_0^*, обеспечивали бы заведомую невырожденность подразумеваемой «классовой надстройки». В то же время необходимо считаться с тем, что из-за принятого в S_0^* обобщенного принципа рефлексии запас классов в любом случае не может быть обширным.

Утверждение 7. *В* S_0^* *выводимо:*

$$\exists z\, \forall y \subseteq z\, (\exists Y\, (y = Y \cap z) \rightarrow \exists! Y\, (y = Y \cap z)). \tag{6}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что согласно схеме (1^*) $X \cap M = Y \cap M \leftrightarrow X = Y$.

Следовательно, подразумеваемую совокупность всех классов можно взаимно однозначно заиндексировать элементами некоторого множества, а именно множества

$$w_z = \{y \subseteq z : \exists Y\, (y = Y \cap z)\}$$

(при подходящем выборе z). Функцию $c(z, y)$ определим следующим образом. Если $y \subseteq z$ и существует единственный класс Y такой, что $y = Y \cap z$, то $c(z, y) = Y$. В противном случае $c(z, y) = \{z\}$. Очевидно, если z обладает свойством, указанным в (6), то $\{z\}$ не является классом.

Предложение (6) дает возможность воспроизвести в языке множеств и классов результаты о рефлексии, установленные выше применительно к «односортному» языку теории множеств. (Это делается в рамках системы S_0^* и некоторых ее подсистем.)

Введем в рассмотрение вспомогательную теорию $\overline{S}_0$, в языке которой имеются множественные и классовые переменные, но нет константы M (а значит, нет схемы (1*)). Аксиомами этой теории являются: аксиомы ZF, включая схемы выделения и подстановки, распространенные на все $\overline{S}_0$-формулы, и предложение (6). В связи с принятием (6) в качестве аксиомы целесообразно зафиксировать константу z_0, выполняющую эту аксиому, а также константу w_0 для обозначения множества w_{z_0}. Эти константы, равно как и функциональный символ c, мы не включаем в сигнатуру $\overline{S}_0$ (и других рассматриваемых далее теорий), но будем использовать их в случае надобности. В частности, говоря о чистых формулах, мы, конечно, будем подразумевать, что эти формулы не содержат символов c, z_0 и w_0.

Мы уже дали понять, что присутствие аксиомы (6) порождает не совсем обычную теоретико-множественную ситуацию. В первом приближении эта ситуация была исследована в [4]; теперь займемся ею более обстоятельно.

Утверждение 8. *Пусть Δ — список чистых формул вида $\exists y\, \psi_i(y, \bar{x}, \overline{Y})$, $i = 1, \dots, r$. Тогда формула*

$$\forall\sigma\, \exists\beta\, \forall\overline{Y}\, \forall\bar{x} \in V_\sigma \mathop{\&}_{i=1}^{r} (\exists y\, \psi_i(y, \bar{x}, \overline{Y}) \leftrightarrow \exists y \in V_\beta\, \psi_i(y, \bar{x}, \overline{Y}))$$

выводима в $\overline{S}_0$.

Доказательство. Для произвольно фиксированных $\bar{x}$, $\overline{Y}$ существует, очевидно, минимальный ординал $\beta_{\Delta,\bar{x},\overline{Y}}$ такой, что

$$\mathop{\&}_{i=1}^{r} (\exists y\, \psi_i(y, \bar{x}, \overline{Y}) \leftrightarrow \exists y \in V_{\beta_{\Delta,\bar{x},\overline{Y}}} \psi_i(y, \bar{x}, \overline{Y})).$$

Для каждого σ искомое $\beta = \beta_{\Delta,\sigma}$ определим как супремум множества

$$\{\beta_{\Delta,\bar{x},\overline{Y}} : \bar{x} \in V_\sigma \,\&\, \exists\bar{y} \subseteq z_0\, (\overline{Y} = c(z_0, \bar{y}))\} \cup \{\beta_{\Delta,\zeta} : \zeta < \sigma\},$$

где для $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$ запись $c(z_0, \bar{y})$ означает $(c(z_0, y_1), \dots, c(z_0, y_m))$ и аналогичный смысл имеет сокращение $\bar{y} \subseteq z_0$. Существование указанного множества обеспечивается схемой подстановки.

Утверждение 9. *Для произвольного списка Δ чистых формул в $\overline{S}_0$ доказуемо:*

$$\forall\gamma\, \exists\rho > \gamma\, (\mathrm{card}(\rho)\, \&\, \forall\bar{x} \in V_\rho \forall\overline{Y} \mathop{\&}_{\varphi_i \in \Delta} (\varphi_i(\bar{x}, \overline{Y}) \leftrightarrow \varphi_i^{V_\rho}(\bar{x}, \overline{Y} \cap V_\rho))), \tag{7}$$

где $\overline{Y} \cap V_\rho = (Y_1 \cap V_\rho, \dots, Y_m \cap V_\rho)$.

Доказательство. Очевидно, достаточно ограничиться такими Δ, для которых выполнены следующие условия.

А. Всякая φ_i из Δ либо бескванторная, либо находится в предваренной форме и начинается квантором существования.

Б. Если ψ — подформула одной из φ_i, то либо сама ψ, либо двойственная ей формула входит в Δ.

Доказательство проведем метаматематической индукцией по максимуму длин префиксов φ_i. Если все φ_i бескванторные, то утверждение тривиально. Индукционный шаг осуществляется следующим образом. Удалим из Δ все формулы с максимальной длиной префикса. Для списка Δ' оставшихся формул условия А и Б остаются в силе. По предположению индукции существует неограниченная (формульно определимая) ординальная последовательность

$$\{\rho_{\Delta',\gamma} : \gamma \in \mathrm{On}\}, \tag{8}$$

члены которой (в качестве ρ для разных γ) удовлетворяют соотношению (7) применительно к списку Δ'. Нам надо построить такую последовательность для Δ.

Введем также в рассмотрение неограненную ординальную последовательность

$$\{\beta_{\Delta,\sigma} : \sigma \in \mathrm{On}\}, \tag{9}$$

доставляемую утверждением 8 применительно к Δ, притом что бескванторные формулы в расчет не принимаются.

Пусть δ — общая неподвижная точка обеих этих последовательностей. Очевидно, δ является также неподвижной точкой последовательности $\{\beta_{\Delta',\sigma} : \sigma \in \mathrm{On}\}$. В случае, когда Δ' состоит из бескванторных формул, полагаем $\beta_{\Delta',\sigma} = \sigma$.

Если φ_i лежит в Δ', то, еще раз применяя метаматематическую индукцию — по числу кванторов φ_i, нетрудно удостовериться, что для $\sigma < \delta$, $\bar{x} \in V_\sigma$, $\beta_{\Delta',\sigma} < \rho_{\Delta',\gamma} < \delta$ верно:

$$\varphi_i(\bar{x}, \overline{Y}) \leftrightarrow \varphi^{V_{\rho_{\Delta',\gamma}}}(\bar{x}, \overline{Y} \cap V_{\rho_{\Delta',\gamma}}) \leftrightarrow \varphi_i^{V_\delta}(\bar{x}, \overline{Y} \cap V_\delta). \tag{10}$$

Для бескванторной формулы это очевидно; в противном случае пусть φ_i есть $\exists y\, \psi_i(y, \bar{x}, \overline{Y})$. Так как ψ_i (или двойственная ей формула) принадлежит Δ', то по индукции для нее выполняется (10). Остается воспользоваться утверждением 8 (применительно к Δ') и индукционным предположением относительно последовательности (8).

В силу того же утверждения 8 (на сей раз применительно к Δ) соотношение (10) имеет место и для любой φ_i из Δ, не попавшей в Δ', коль скоро $\sigma < \delta$, $\bar{x} \in V_\sigma$, $\beta_{\Delta,\sigma} < \rho_{\Delta',\gamma} < \delta$. Отсюда получаем:

$$\forall \overline{Y}\, \forall \bar{x} \in V_\delta\, (\varphi_i(\bar{x}, Y) \leftrightarrow \varphi_i^{V_\delta}(\bar{x}, \overline{Y} \cap V_\delta)$$

для всякой φ_i из Δ, так как $V_\delta = \bigcup\limits_{\sigma<\delta} V_\sigma$.

Легко видеть, что последовательность общих неподвижных точек последовательностей (8) и (9), являющихся кардиналами, не ограничена и может быть взята в качестве искомой последовательности $\rho_{\Delta,\gamma}$ ($\gamma \in \mathrm{On}$).

Следствие 1. *В* $\overline{S}_0 + (3^*)$ *для списка* Δ *чистых формул выводимо:*

$$\forall \gamma\, \exists \rho > \gamma\, (\mathrm{Inac}(\rho)\, \&\, \forall \overline{Y} \forall \bar{x} \in V_\rho \mathop{\&}_{\varphi_i \in \Delta} (\varphi_i(\bar{x}, \overline{Y}) \leftrightarrow \varphi_i^{V_\rho}(\bar{x}, \overline{Y} \cap V_\rho))). \tag{7$'$}$$

Доказательство. Рассуждаем так же, как при доказательстве утверждения 9. На индукционном шаге будем по-прежнему исходить из последовательности (8), о которой на этот раз будем предполагать, что она удовлетворяет соотношению (7′). Искомую последовательность $\{\rho_{\Delta,\gamma} : \gamma \in \mathrm{On}\}$ получим, применяя схему (3^*) к последовательности общих неподвижных точек последовательностей (8) и (9).

Этот последний результат легко обобщается на любую теорию вида $\overline{S}_0 + (3_n^*)$, где (3_n^*) обозначает расширение схемы (3_n) на все S_0^*-формулы. За счет привлечения этих дополнительных схем можно очевидным образом добиться, чтобы искомые ρ были (сильно недостижимыми) кардиналами Мало, гипер-Мало и т. д.

Утверждение 9 и следствие 1 (вместе с его только что упомянутыми обобщениями) предоставляют широкие возможности моделирования конечных фрагментов схемы (1^*) в рамках различных традиционных расширений ZF. В простейшей ситуации такое моделирование выглядит следующим образом.

Через $\Theta(\lambda, z, w, k)$ обозначим формулу

$$z \in V_\lambda \,\&\, w \subseteq \mathscr{P}(z) \,\&\, (k\colon w \Rightarrow \mathscr{P}(V_\lambda)) \,\&\, \forall y \in w\, (k(y) \cap z = y).$$

Соотношение Θ задает интерпретацию языка $\overline{S}_0$, в которой V_λ — универсум множеств, z и w интерпретируют z_0 и w_0, а $\mathrm{rng}(k) = \{k(y) : y \in w\}$ представляет совокупность классов.

Утверждение 10. *Для произвольного списка* Δ *чистых формул в* $\mathrm{ZF} + \mathrm{Inac}(\lambda)$ *доказуемо:*

$$\Theta(\lambda, z, w, k) \to \exists \delta < \lambda \big(\mathrm{card}(\delta) \,\&\, z \in V_\delta \,\&\, \forall \bar{y} \in w \forall \bar{x} \in V_\delta \underset{\varphi_i \in \Delta}{\&} \big(\varphi_i^{V_\lambda}(\bar{x}, k(\bar{y})) \\ \leftrightarrow \varphi_i^{V_\delta}(\bar{x}, k(\bar{y}) \cap V_\delta)\big)\big). \quad (11)$$

Доказательство. Список параметров (z, w, k), связанных с λ соотношением Θ, обозначим через K. Каждой $\overline{S}_0$-формуле φ поставим в соответствие формулу $\varphi^{V_\lambda, K}$ (интерпретацию φ в (V_λ, K)), ограничив множественные кванторы φ множеством V_λ, а классовые — множеством $\mathrm{rng}(k)$. Ясно, что каждая $\overline{S}_0$-аксиома выполняется в этой интерпретации. Стало быть, доказательство утверждения 9 можно провести в V_λ. Но для чистых φ формулы $\varphi^{V_\lambda, K}$ и φ^{V_λ} совпадают, откуда непосредственно следует существование нужного δ.

Если мы дополнительно потребуем $\mathrm{Mahlo}(\lambda)$ или $\mathrm{Hyp}(1, \lambda)$ и т. д., то в (11) можно заменить $\mathrm{card}(\delta)$ на $\mathrm{Inac}(\delta)$, $\mathrm{Mahlo}(\delta)$ и т. д.

Следствие 2. *Пусть* $\{x_t\}_{t \in a}$ *— семейство попарно различных подмножеств* V_λ, $a \in V_\lambda$ *и* $\mathrm{Inac}(\lambda)$. *Тогда при подходящем выборе* K *это семейство будет представлять совокупность классов в интерпретации* (V_λ, K) *(удовлетворяющей условию* Θ*). Стало быть, для всякого* Δ *в* $(V_\lambda, \{x_t\}_{t \in a})$ *можно промоделировать схему* (1_Δ^*) *(т. е. схему* (1^*)*, ограниченную формулами списка* Δ*).*

Доказательство. Очевидно, $x_{t_1} \neq x_{t_2}$ влечет существование такого $\beta < \lambda$, что $x_{t_1} \cap V_\beta \neq x_{t_2} \cap V_\beta$. А поскольку в V_λ выполняется схема подстановки, то существует $\alpha < \lambda$ такое, что

$$\forall t_1\, t_2 \in a\, (x_{t_1} \neq x_{t_2} \leftrightarrow x_{t_1} \cap V_\alpha \neq x_{t_2} \cap V_\alpha).$$

Взяв V_α в качестве z_0, легко построить нужное K.

Теперь предположим, что семейство $\{x_t\}_{t \in a}$ выбрано таким образом, что оно включает само V_λ и замкнуто относительно так называемых геделевских операций: декартова произведения, разности, проекции и т. п. (Мы предполагаем, что полный список этих операций известен читателю.) Построение примеров таких семейств не составляет трудностей; аксиомы выбора для этого не требуется. В таком случае в соответствующей интерпретации (V_λ, K) выполняются все аксиомы группы B теории GB; конъюнкцию этих аксиом обозначим через $\mathscr{B}$. Тем самым показано, что наша теория S_0^* совместна с $\mathscr{B}$, равно как и ее расширения посредством схем (3_n^*). Однако, как будет установлено в дальнейшем, $S_0^* + \mathscr{B}$ уже не является консервативным расширением S_0.

Обозначим через Δ_0 список формул вида $Y_1 = F(Y_2, Y_3)$ или $Y_1 = F(Y_2)$ для каждой геделевской операции F. Обращаем внимание на то, что формулы из Δ_0 не содержат свободных множественных переменных.

Утверждение 11. *В* $\overline{S}_0 + (1^*_{\Delta_0})\,\&\,\mathscr{B}$ *выводима схема* (1^*). *При этом для каждой чистой формулы* $\varphi(\bar{x}, \overline{Y})$ *и для любого набора классов* $\overline{Y}$ *совокупность* $\{\bar{x} : \varphi(\bar{x}, \overline{Y})\}$ *является классом.*

Доказательство. Как известно [2, с. 24], область истинности φ может быть представлена как значение некоторого терма $t(V, \overline{Y})$, построенного из геделевских операций, совокупности V всех множеств (которая согласно $\mathscr{B}$ является классом) и классов $\overline{Y}$. Метаматематической индукцией по глубине этого терма легко доказывается, что его значение есть класс и

$$X = t(V, \overline{Y}) \leftrightarrow X \cap M = t(M, \overline{Y} \cap M),$$

что и дает нам схему рефлексии в полном объеме.

Пусть $\mathrm{clos}(x)$ означает, что x замкнуто относительно геделевских операций. Как мы видели, такая замкнутость существенно задействована в доказательстве предыдущего утверждения. В отсутствие аксиомы $\mathscr{B}$ сама по себе схема $(1^*_{\Delta_0})$ особенного интереса не представляет. В то же время утверждение 11 дает повод специально заинтересоваться следующей ситуацией.

Пусть σ, η — два кардинала ($\sigma < \eta$), и пусть заданы $w \subseteq \mathscr{P}(V_\sigma)$ и $f\colon w \Rightarrow \mathscr{P}(V_\eta)$, удовлетворяющие условиям:

(а) $\forall x \in w\ (f(x) \cap V_\sigma = x)$,

(б) $\mathrm{clos}(w)\,\&\,V_\sigma \in w\,\&\,f(V_\sigma) = V_\eta$,

(в) функция f перестановочна с геделевскими операциями, т. е.

$$f(x - y) = f(x) - f(y)\,\&\,f(x \times y) = f(x) \times f(y)\,\&\,f(\mathrm{dom}(x)) = \mathrm{dom}(f(x))\,\&\,\ldots$$

(многоточие заменяет недостающие конъюнктивные члены, соответствующие остальным геделевским операциям).

Все это можно записать посредством единой ZF-формулы $\chi(\eta, \sigma, w, f)$. Предложение $\exists \eta\, \sigma\, w\, f\, \chi(\eta, \sigma, w, f)$ естественно называть принципом согласованного выбора, поскольку речь идет в нем о том, чтобы для каждого множества из некоторого семейства подмножеств V_σ выбрать подходящее расширение до подмножества V_η, сохраняя при этом «геделевские связи».

Если это предложение (обозначим его для краткости через CCh) присоединить к ZF в качестве аксиомы, то в этой расширенной системе можно построить модель (в языке множеств и классов), в которой будет выполняться схема (1^*). Накладывая на кардинал η дополнительные предположения типа $\mathrm{Reg}(\eta)$, $\mathrm{Mahlo}(\eta)$ и т. д., можно обеспечить, чтобы эта модель стала моделью $\overline{S}_0 + (1^*)$, S_0^* и т. д. Эти результаты легко получаются из следующего утверждения, в котором S_0^0 обозначает теорию, полученную из $\overline{S}_0$ удалением схемы подстановки.

Утверждение 12. *Теория* $S_0^0 + (1^*)$ *интерпретируема в* ZF + CCh.

Доказательство. Примем V_η в качестве предметной области для множественных переменных, а V_σ за интерпретацию константы M. Пусть классовые переменные пробегают $\mathrm{rng}(f)$. Очевидно, все S_0^0-аксиомы, а также $\mathscr{B}$ выполняются в V_η. Выполнение схемы (1^*) будем доказывать метаматематической индукцией по логической глубине чистых формул. Одновременно по ходу этой индукции установим, что для всякой чистой формулы $\varphi(\bar{x},\overline{Y})$ и для любого $\bar{y}\in w$ множество $\{\bar{x}\in V_\eta:\varphi(\bar{x},f(\bar{y}))\}$ принадлежит $\mathrm{rng}(f)$. Предварительно заметим, что для всякой геделевской операции F, за исключением $\mathrm{dom}(x)$ (проекции), верно:

$$\forall x\subseteq V_\eta\,(F(x\cap V_\sigma)=F(x)\cap V_\sigma)$$

(и аналогично для двухместных F). Нетрудно удостовериться, что если $\varphi(\bar{x},\overline{Y})$ имеет вид $x_i\in x_j$ или $x_i\in Y_j$, то в состав соответствующего терма t из доказательства утверждения 11 операция проекции не входит, и потому проверка базиса вышеупомянутой индукции осуществляется тривиально. На индукционном шаге единственный нетривиальный момент возникает, когда φ имеет вид $\exists u\,\psi(u,\bar{x},\overline{Y})$. Для $\bar{y}\in w$ пусть $B=\{u,\bar{x}\in V_\eta:\psi^{V_\eta}(u,\bar{x},f(\bar{y}))\}$, $b=\{u,\bar{x}\in V_\sigma:\psi^{V_\sigma}(u,\bar{x},\bar{y})\}$. Предположим по индукции, что $B\in\mathrm{rng}(f)$ и $B\cap V_\sigma=b\in w$, откуда (ввиду очевидной разнозначности f) следует $f(b)=B$. Нам надо доказать, что для $A=\{\bar{x}\in V_\eta:\varphi^{V_\eta}(\bar{x},f(\bar{y}))\}$, $a=\{\bar{x}\in V_\sigma:\varphi^{V_\sigma}(\bar{x},\bar{y})\}$ имеют место такие же соотношения. Поскольку $A=\mathrm{dom}(B)$, $a=\mathrm{dom}(b)$, то $a\in w$ и

$$f(a)=f(\mathrm{dom}(b))=\mathrm{dom}(f(b))=\mathrm{dom}(B)=A.$$

Отсюда в силу п. (a) определения χ получаем $a=A\cap V_\sigma$. Этим завершается индукционный шаг, а с ним и все доказательство.

Утверждение 13. *$S_0^*+\mathscr{B}$ — не консервативное расширение S_0.*

Доказательство. С помощью надлежащей модификации утверждения 9 в S_0^* доказуемо существование сильно недостижимого $\eta>\alpha_0$ такого, что

$$\forall\overline{Y}\mathop{\&}_{\varphi_i\in\Delta_0}\big(\varphi_i(\overline{Y})\leftrightarrow\varphi_i^{V_\eta}(\overline{Y}\cap V_\eta)\leftrightarrow\varphi^M(\overline{Y}\cap M)\big).$$

Далее, из аксиомы $\mathscr{B}$ и схемы (1^*) следует $\mathrm{clos}(w_M)\,\&\,M\in w_M$. Положим $f(y)=c(M,y)\cap V_\eta$ $(y\in w_M)$; тогда имеем:

$$\chi(\eta,\alpha_0,w_M,f).$$

Таким образом, в $S_0^*+\mathscr{B}$ выводимо:

$$\exists\eta\sigma wf\,(\mathrm{Reg}(\eta)\,\&\,\mathrm{Reg}(\sigma)\,\&\,\chi(\eta,\sigma,w,f)).$$

Если бы система $S_0^*+\mathscr{B}$ была консервативным расширением S_0, то эта формула была бы выводима в S_0. Однако предположение такой выводимости ведет к противоречию. Действительно, пусть η — наименьший регулярный кардинал, для которого найдутся нужные σ, w, f. В силу утверждение 12 и регулярности η, σ при этом предположении все аксиомы S_0 выполняются в модели $(V_\eta,\in\cap V_\eta^2,V_\sigma)$, так что мы имели бы:

$$\exists\eta_1<\eta\,(\exists\sigma wf\,(\mathrm{Reg}(\eta_1)\,\&\,\mathrm{Reg}(\sigma)\,\&\,\chi(\eta_1,\sigma,w,f)))^{V_\eta},$$

что ввиду абсолютности противоречит выбору η.

Принятый здесь вариант принципа рефлексии (и прежде всего сам способ релятивизации чистых формул к M) мотивирован интуитивными соображениями, которые естественно квалифицировать как «интенсиональные». Подразумевается, что все классы могут быть заданы посредством «текстов» некоего воображаемого языка (не подлежащего конкретизации). При этом все же предполагается, что эти тексты структурированы наподобие ZF-формул и что их, в частности, можно релятивизовать к M. Если мы распространим принцип рефлексии (в его обычном понимании) и на такие тексты, то «релятивизованный текст» X^M должен будет выделять из M то же подмножество, что и текст, соответствующий классу X. Отсюда и происходит замещение X на $X \cap M$ в нашем определении релятивизации.

Однако эти «интенсиональные» интуиции не содержат в себе какой-либо информации о том, насколько большой (в дозволенных утверждением 7 границах) может быть совокупность классов (или, что эквивалентно, множество w_M).

Сама по себе идея формульной определимости всех множеств и классов не является чем-то экстраординарным. Достаточно взять минимальную модель ZF и обогатить ее определимыми классами (определимыми посредством ZF-формул без параметров, релятивизованных в этой модели). Но попытка проинтерпретировать (в этой же модели) константу M, чтобы одновременно выполнялись схема (1*) и предложение $w_M = \mathscr{P}(M)$, заведомо обречена на неуспех (потому что, как мы увидим ниже, в данной ситуации ранг M обязан быть «очень большим» кардиналом. Тем не менее интересно выяснить, что получится, если принять за аксиому предложение $w_M = \mathscr{P}(M)$, точнее говоря, формулу

$$\forall y \subseteq M \, \exists Y \, (y = Y \cap M). \tag{12}$$

Рассмотрим теорию S в языке множеств и классов (содержащем константу M) со следующим набором аксиом.

1°. Экстенсиональность и регулярность множеств; транзитивность M.

2°. Схемы выделения и подстановки для всех S-формул.

3°. Схема (1*).

4°. Аксиома интенсиональности (формула (12)).

Обозначим через S^- теорию, которая получается из S удалением схемы подстановки. В силу утверждения 5 в S^- выводимы аксиомы пары, суммы и бесконечности. Что же касается аксиомы степени (а также схемы подстановки для чистых формул), то они являются (в S^-) простыми следствиями предложения 2, которое, в свою очередь, легко доказывается с помощью аксиомы интенсиональности. В самом деле, пусть f есть функция-множество, $f \subseteq M$ и $\mathrm{dom}(f) = x \in M$. Пусть $F = c(M, f)$ (класс F существует в силу (12)). Согласно рефлексии F — функция-класс, являющаяся продолжением f, притом $\mathrm{dom}(F) = x$. Следовательно, $F = f$. Но тогда имеем $\exists x \, (F = x)$ и $\exists x \in M \, (F \cap M = x)$, а значит, $f \in M$. Столь же легко убедиться, что для всякой чистой формулы $\varphi(\bar{x}, \overline{Y})$ совокупность $\{\bar{x} : \varphi(\bar{x}, \overline{Y})\}$ является классом, так что $\mathscr{B}$ тоже выводимо в S^-.

Аналогичным образом в S^- можно вывести схемы (3_n) для всех чистых формул и предложения $\mathrm{Hyp}(n, \alpha_0)$ $(n = 1, 2, \dots)$. Более того, в S^- доказуемо, что α_0 — измеримый кардинал: нетрудно проверить, что множество $\{x \subseteq \alpha_0 : \alpha_0 \in c(M, x)\}$ является ультрафильтром нужного вида.

Пусть $\chi'(\eta, \sigma, f)$ означает $\chi(\eta, \sigma, \mathscr{P}(V_\sigma), f)$. В [5] было показано, что в $\mathrm{ZF} + \exists \eta \sigma f \, (\mathrm{Reg}(\eta) \,\&\, \chi'(\eta, \sigma, f))$ можно построить модель теории S, а в $\mathrm{ZF} + \exists \eta \sigma f \, \chi'(\eta, \sigma, f)$ — модель S^-. Эти факты являются следствиями утверждения 12; модель, построенная в его доказательстве, очевидно является также и моделью аксиомы интенсиональности, коль скоро $w = \mathscr{P}(V_\sigma)$. Регулярность η нужна для выполнения схемы подстановки.

Утверждение 14. *В S доказуемо* $\exists \eta\sigma f\, \chi'(\eta, \sigma, f)$.

Доказательство. Поскольку $\overline{S}_0 + \mathscr{B}$ является подсистемой S, то в S доказуемо существование кардинала $\eta > \alpha_0$, для которого верно:

$$\exists f\, \chi(\eta, \alpha_0, w_M, f)$$

(ср. с доказательством утверждения 13). Осталось заметить, что в силу (12) $w_M = \mathscr{P}(M)$.

Стало быть, S^- может быть промоделирована в S. Однако непротиворечивость обеих этих систем представляется нам весьма проблематичной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
2. *Vopenka P., Hajek P.* The theory of semisets. Amsterdam; London: North-Holland, 1972.
3. *Drake F.* Set theory. An introduction to large cardinals. Amsterdam; London: North-Holland, 1974.
4. *Белякин Н. В., Ганов В. А.* Принцип рефлексии и схема Мало // Модели когнитивных процессов. Новосибирск, 1997. (Вычислительные системы; 158). С. 3–8.
5. *Белякин Н. В., Ганов В. А.* Обобщенный принцип рефлексии // Измерение и модели когнитивных процессов. Новосибирск, 1998. (Вычислительные системы; 162). С. 3–13.

Статья поступила 13 марта 2000 г., окончательный вариант — 15 октября 2002 г.

Белякин Николай Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
belyakin@math.nsc.ru

Ганов Валерий Александрович
Московский гос. университет культуры, Барнаульский филиал,
пр. Ленина, 66, Барнаул 656037