Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 515.145

ОЦЕНКИ ЧИСЕЛ БЕТТИ РАЦИОНАЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А. В. Павлов

Аннотация: Указаны верхние оценки на числа Бетти рационально эллиптических пространств.

Ключевые слова: рационально эллиптические пространства, числа Бетти

Введение. В теории рационального гомотопического типа удобным аппаратом является минимальная модель топологического пространства, введенная Д. Сулливаном [1].

Ограничимся нильпотентными пространствами, т. е. такими, фундаментальная группа которых нильпотентна (например, равна нулю) и при этом нильпотентно действует на высших гомотопических группах. Минимальная модель такого пространства — коммутативная дифференциальная градуированная алгебра над $\mathbb{Q}$, когомологии которой совпадают с когомологиями пространства, и которая в односвязном случае порождена образующими из группы $\operatorname{Hom}(\pi_*(X), \mathbb{Q})$. Если число образующих конечно, то пространство называется *рационально эллиптическим*. В противном случае говорят, что оно *рационально гиперболично*.

С. Гальперин и Дж. Фридландер [2] показали, что рациональная эллиптичность пространства эквивалентна некоторому чисто арифметическому условию на степени образующих его минимальной модели. Как следствие было доказано, что сумма чисел Бетти n-мерного рационально эллиптического пространства не превосходит 2^n.

В данной работе мы укажем верхние оценки на каждое из чисел Бетти таких пространств.

Теорема 1. *Пусть X — рационально эллиптическое пространство когомологической размерности n и $(2b_1 - 1, \dots, 2b_q - 1)$ и $(2a_1, \dots, 2a_r)$ — последовательности соответственно четных и нечетных размерностей образующих группы $\operatorname{Hom}(\pi_*(X), \mathbb{Q})$. Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$\dim H^m(X; \mathbb{Q}) \le \binom{n}{m}, \tag{1}$$

$$\dim H^m(X; \mathbb{Q}) \le \sum_{k+2l=m} \binom{q-r}{k} \binom{p}{l}, \tag{2}$$

где $p = \sum b_j - \sum a_i - (q - r)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00–01–00915, 00–15–99252).

Следствие. *Если в условиях теоремы пространство X односвязно, то*

$$\dim H^m(X;\mathbb{Q}) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{m}$$

при $m \neq 0, n$.

Оценка (1) достигается для тора, а в односвязном случае при четном $n = 2s$ оценка (2) достигается для прямого произведения s экземпляров двумерной сферы.

Отметим, что утверждение о том, что топология тора «аппроксимирует сверху» топологию рационально эллиптического многообразия, связано с гипотезой о рациональной эллиптичности многообразий неотрицательной секционной кривизны (гипотеза Ботта). Гипотеза о том, что для многообразий с интегрируемым геодезическим потоком верна оценка (1) вне связи с рациональной эллиптичностью, была выдвинута И. А. Таймановым в [3] (см. также [4]). Г. П. Патернайн [5] доказал, что многообразие с римановой метрикой класса C^∞, геодезический поток которой имеет нулевую топологическую энтропию, рационально эллиптично.

Автор благодарит И. А. Тайманова за постановку задачи и полезные обсуждения и замечания и И. К. Бабенко за полезные замечания.

1. Минимальные модели. *Дифференциальной градуированной алгеброй* (д.г.а.) над $\mathbb{Q}$ называется пара (A, d), где $A = \bigoplus\limits_{p\geq 0} A^p$ — векторное пространство над $\mathbb{Q}$, а $d : A \to A$ — линейное отображение, называемое *дифференциалом*, такие, что

1) $d(A^p) \subset A^{p+1}$ и $dd = 0$;

2) в A имеется билинейное ассоциативное умножение такое, что $A^p \cdot A^q \subset A^{p+q}$ для всех p, q;

3) $d(ab) = da \cdot b + (-1)^p a \cdot db$ для любых $a \in A^p$, $b \in A^q$.

Элементы из A^p называются *однородными степени* p.

Градуированная алгебра A называется *коммутативной*, если $ab = (-1)^{pq} ba$ для любых $a \in A^p, b \in A^q$, и *связной*, если $A^0 = \mathbb{Q}$.

Обозначим через d^p сужение $d|_{A^p}$. Группа $H^p(A) = \ker d^p / \operatorname{im} d^{p-1}$ называется *p-й группой когомологий* д.г.а. (A, d). Когомологии коммутативной д.г.а. (A, d) образуют коммутативную градуированную алгебру $H^*(A) = \bigoplus\limits_{p\geq 0} H^p(A)$.

Для данного градуированного векторного пространства $V = \bigoplus\limits_{p\geq 1} V^p$ через ΛV обозначим тензорное произведение $\mathbb{Q}[V^{\mathrm{even}}] \otimes \wedge(V^{\mathrm{odd}})$ полиномиальной алгебры $\mathbb{Q}[V^{\mathrm{even}}]$ над четномерными образующими и внешней алгебры $\wedge(V^{\mathrm{odd}})$ над нечетномерными образующими. Д.г.а. вида $(\Lambda V, d)$ называется *минимальной*, если базис $\{v_i\}$ пространства V можно выбрать упорядоченным согласованно со степенью так, что для любого v_i дифференциал разложим: $dv_i \in \Lambda V_{<i}$, где $V_{<i}$ — подпространство, натянутое на образующие $v_1, \dots, v_{i-1}$.

Минимальная алгебра $(\Lambda V, d)$ называется *минимальной моделью* д.г.а. (A, d_A), если существует гомоморфизм д.г. алгебр $\mu : \Lambda V \to A$, индуцирующий изоморфизм $\mu^* : H^*(\Lambda V) \underset{\cong}{\to} H^*(A)$ в когомологиях.

Д. Сулливан построил функтор, сопоставляющий симплициальному комплексу X коммутативную д.г.а. $(A_{\mathrm{PL}}(X), d)$ кусочно-полиномиальных дифференциальных форм на нем, и доказал, что отображение интегрирования ρ : $A_{\mathrm{PL}}(X) \to C^*(X;\mathbb{Q})$ индуцирует изоморфизм в когомологиях [1].

Минимальная модель алгебры $(A_{\mathrm{PL}}(X), d)$ называется *минимальной моделью пространства* X.

Нильпотентные CW-комплексы рационально гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны их минимальные модели.

Если $\dim H^p(X;\mathbb{Q}) < \infty$ для любого p, то $V^p \cong \mathrm{Hom}(\pi_p(X);\mathbb{Q})$, где V^p — пространство p-мерных образующих минимальной модели X.

2. Рационально эллиптические пространства. Результаты Гальперина и Фридландера. Все односвязные многообразия делятся на два класса в зависимости от конечности либо бесконечности ранга своих рациональных гомотопий.

Пусть X — CW-комплекс такой, что $\dim H^*(X) < \infty$, $(\Lambda V, d)$ — его минимальная модель. Пространство X называется *рационально эллиптическим*, если $\dim V < \infty$, и *рационально гиперболическим* в противном случае. (Более точно, пространство называется рационально гиперболическим, если найдется последовательность $\{k_n\}$ такая, что $\dim \pi_{k_n}(X) \otimes \mathbb{Q}$ растет экспоненциально по n. Всякий конечный односвязный CW-комплекс является либо рационально эллиптическим, либо рационально гиперболическим [6, 7].)

Примерами рационально эллиптических пространств являются однородные пространства G/H компактных групп Ли.

С. Гальперин и Дж. Фридландер установили в [2] эквивалентность рациональной эллиптичности следующему арифметическому условию на степени образующих минимальной модели пространства.

Пусть X — линейно связное пространство, $(\Lambda V, d)$ — его минимальная модель. Выберем однородный базис пространства V. Пусть $B' = (2b_1-1, \dots, 2b_q-1)$ и $A' = (2a_1, \dots, 2a_r)$ — последовательности соответственно нечетных и четных степеней элементов этого базиса. С точностью до перестановки членов они не зависят от выбора базиса в V. Рассмотрим последовательности $B = (b_1, \dots, b_q)$ и $A = (a_1, \dots, a_r)$. Будем называть эти последовательности соответственно *b- и a-последовательностями пространства X*. Будем говорить, что пара (B, A) удовлетворяет *арифметическому условию Гальперина — Фридландера* (ГФ), если для любого s, $1 \le s \le r$, и для любых s различных членов $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$ последовательности A существует не менее s различных членов $b_{i_1}, \dots, b_{i_s}$ последовательности B, являющихся их линейными комбинациями с неотрицательными целыми коэффициентами, причем сумма коэффициентов не меньше двух:

$$b_{i_k} = \sum_{j=1}^{s} \gamma_{kj} a_{i_j}, \quad \sum_j \gamma_{kj} \ge 2,\ 1 \le k \le s.$$

Из условия ГФ для случая $s = r$ сразу следует, что $q \ge r$.

Главным результатом работы [2] является следующая

Теорема А. *Пара (B, A) удовлетворяет условию ГФ тогда и только тогда, когда существует рационально эллиптическое пространство X, b- и a-последовательностями которого являются соответственно B и A. Если $b_j \ge 2$, $1 \le j \le q$, то X может быть выбрано односвязным; если вдобавок $q > r$, то в качестве X можно выбрать замкнутое многообразие.*

Теорема B (Гальперин — Фридландер [2, 8]). *Пусть B, A соответственно b- и a-последовательности минимальной модели рационально эллиптического пространства X. Выражение*

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{q}(1-t^{2b_j})}{(1-t)^{q-r}\prod\limits_{i=1}^{r}(1-t^{2a_i})},$$

где $n = n(X)$ — когомологическая размерность X, является многочленом $\Phi(t) = \sum\limits_{m=0}^{n} c_m t^m$ с неотрицательными целыми коэффициентами. Для $0 \leq m \leq n$ справедливо неравенство

$$\dim H^m(X;\mathbb{Q}) \leq c_m,$$

которое в случае $q = r$ превращается в равенство.

3. Доказательство теоремы. Пусть X — рационально эллиптическое пространство, n — его когомологическая размерность. Рассмотрим выражение

$$\Phi(t) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{q}(1-t^{2b_j})}{(1-t)^{q-r}\prod\limits_{i=1}^{r}(1-t^{2a_i})}.$$

Согласно теореме B выражение $\Phi(t)$ есть многочлен степени n, $\Phi(t) = \sum\limits_{0}^{n} c_m t^m$. Его корнями, как видно, являются корни из единицы. По теореме Виета c_m с точностью до знака является значением симметрического многочлена σ_{n-m} от корней многочлена $\Phi(t)$. Многочлен σ_k от n переменных — сумма всевозможных произведений по k переменных. Всего таких произведений $\binom{n}{k}$, и в нашем случае каждое из них равно по модулю единице. Применяя теорему B, получаем оценку (1):

$$\dim H^m(X;\mathbb{Q}) \leq c_m = |\sigma_{n-m}(\xi_1, \dots, \xi_n)| \leq \binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}.$$

Докажем теперь справедливость оценки (2). Перепишем многочлен $\Phi(t)$ в другой форме. Раскладывая произведения, стоящие в числителе и знаменателе, на элементарные множители относительно t^2 и собирая отдельно множители вида $(1-t^2)$, можем записать

$$\prod_{j=1}^{q}(1-t^{2b_j}) = (1-t^2)^q \prod_{j=1}^{\sum b_j - q}(t^2-\xi_j^2),$$

$$\prod_{i=1}^{r}(1-t^{2a_i}) = (1-t^2)^r \prod_{i=1}^{\sum a_i - r}(t^2-\eta_i^2),$$

и, при подходящей нумерации корней ξ_j, —

$$\Phi(t) = \frac{\prod\limits_{j}(1-t^{2b_j})}{(1-t)^{q-r}\prod\limits_{i}(1-t^{2a_i})} = (1+t)^{q-r}\prod_{j=1}^{p}(t^2-\xi_j^2),$$

где $p = \sum b_j - \sum a_i - (q-r)$.

Представим теперь многочлен $\Phi(t)$ как произведение двух многочленов и оценим его коэффициенты через корни этих последних. Введем обозначения

$$Q(t) = (t+1)^{q-r} = \sum_{k=0}^{q-r} \alpha_k t^k, \quad R(t) = \prod_{j=1}^{p} (t^2 - \xi_j^2) = \sum_{k=0}^{2p} \beta_k t^k.$$

Тогда $\Phi(t) = Q(t)R(t)$ и коэффициенты многочленов Q, R имеют, очевидно, следующий вид:

$$\alpha_k = \binom{q-r}{k}, \quad \beta_{2k+1} = 0, \quad \beta_{2k} = \sum_{j_1 < \ldots < j_{p-k}} \xi_{i_1}^2 \cdot \ldots \cdot \xi_{j_{p-k}}^2.$$

Получаем необходимую оценку на коэффициенты c_m многочлена $\Phi(t)$, а значит, по теореме В и на числа Бетти пространства X

$$\dim H^m(X, \mathbb{Q}) \le c_m = \Big| \sum_{k+l=m} \alpha_k \beta_l \Big| \le \sum_{k+l=m} |\alpha_k|\,|\beta_l| \le \sum_{k+2l=m} \binom{q-r}{k}\binom{p}{l}.$$

Теорема доказана.

Для пространства X такого, что $q = r$, из доказанной оценки следует, в частности, известный факт тривиальности нечетномерных когомологий, $\dim H^{2k-1} = 0$, $\dim H^{2k} = \binom{\frac{n}{2}}{k}$.

Оценка (1) достигается для n-мерных торов T^n: $\dim H^m(T^n, \mathbb{Q}) = \binom{n}{m}$. Действительно, формула Кюннета для $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ дает $H^k(T^n; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^{\binom{n}{k}}$.

Оценка (2) достигается на произведениях двумерных сфер $M_{2n} = S^2 \times \ldots \times S^2$ (n раз). По формуле Кюннета $H^{2m+1}(M_{2n}; \mathbb{Q}) = 0$, $H^{2m}(M_{2n}; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^{\binom{n}{m}}$.

Если пространство X односвязно, то $b_j \ge 2$, $j = 1, \ldots, q$. Справедливо следующее утверждение [2]: если упорядочить b- и a-последовательности по убыванию, $b_1 \ge \ldots \ge b_q$, $a_1 \ge \ldots \ge a_r$, то $b_i \ge 2a_i$ для $i = 1, \ldots, r$. Поэтому

$$p = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{r} a_i - (q-r) \ge \sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{j=r+1}^{q} (b_j - 1) \ge q - r.$$

Следующий факт доказывает следствие из теоремы 1.

Предложение 1. *Если* $0 < c \le d$, *то*

$$\sum_{k+2l=m} \binom{c}{k}\binom{d}{l} \le \frac{1}{2}\binom{c+2d}{m}, \quad m = 1, \ldots, c+2d-1.$$

Доказательство проведем индукцией по m. Для $m = 1$ утверждение верно: так как $c \le d$, то

$$\sum_{k+2l=1} \binom{c}{k}\binom{d}{l} = \binom{c}{1}\binom{d}{0} = c \le \frac{1}{2}\binom{c+2d}{1}.$$

Предположим, что утверждение имеет место для $1, \ldots, m-1$. Докажем его для m индукцией по c. Пусть $c = 1$. Тогда

$$\sum_{k+2l=m} \binom{1}{k}\binom{d}{l} = \binom{d}{[\frac{m}{2}]} \le \frac{1}{2}\binom{1+2d}{m},$$

это комбинаторно очевидно. Докажем переход от $c-1$ к c:

$$\sum_{k+2l=m}\binom{c}{k}\binom{d}{l} = \sum_{k+2l=m}\left(\binom{c-1}{k-1}+\binom{c-1}{k}\right)\binom{d}{l}$$
$$= \sum_{k+2l=m}\binom{c-1}{k-1}\binom{d}{l} + \sum_{k+2l=m}\binom{c-1}{k}\binom{d}{l}$$
$$\le \frac{1}{2}\binom{c-1+2d}{m-1} + \frac{1}{2}\binom{c-1+2d}{m} = \frac{1}{2}\binom{c+2d}{m}.$$

Предложение доказано.

4. Рационально эллиптические многообразия малых размерностей. Рассмотрим примеры рационально эллиптических пространств в размерностях 4, 5, 6. Согласно теореме A условие ГФ для последовательностей $B=(b_1,\dots,b_q)$, $A=(a_1,\dots,a_r)$ эквивалентно существованию рационально эллиптического пространства X с минимальной моделью такой, что $B'=(2b_j-1)$, $A'=(2a_i)$ — последовательности соответственно четных и нечетных степеней ее базиса.

Обозначим через n когомологическую размерность X. Справедливо следующее равенство [2]:

$$n = 2\left(\sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{r} a_i\right) - (q-r). \tag{3}$$

Кроме того, последовательности B, A можно перенумеровать так, что $b_i \ge 2a_i$, $1 \le i \le r$ [2].

Предложение 2. *Для односвязных замкнутых ориентируемых рационально эллиптических многообразий M размерностей $4,5,6$ справедливы следующие оценки:*

$\dim M = 4$: $b_3 = 0, b_2 \le 2$;

$\dim M = 5$: $b_4 = 0, b_2 = b_3 \le 1$;

$\dim M = 6$: $b_5 = 0, b_3 \le 2, b_2 = b_4 \le 3$.

Доказательство следует из прямого перечисления последовательностей, доставляющих решение равенства (3) для $n(X)=4,5,6$.

В размерностях 4, 5 и в случаях 1–4 в размерности 6 дифференциалы на минимальной алгебре однозначно восстанавливаются по этим последовательностям из соображений размерности, наличия двойственности Пуанкаре и разложимости. Это означает, что существует единственный рациональный гомотопический тип с такими a- и b-последовательностями.

$n=4$.

1. S^4: $\Lambda V = \Lambda(x,y)$, $|x|=4$, $|y|=7$, $dy=x^2$. Числа Бетти: $(1,0,0,0,1)$.

2. $\mathbb{C}P^2$: $\Lambda V = \Lambda(x,y)$, $|x|=2$, $|y|=5$, $dy=x^3$. Числа Бетти: $(1,0,1,0,1)$.

3. $\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2$. $\Lambda V = \Lambda(x_1,x_2,y_1,y_2)$, $|x_i|=2, |y_i|=3$, $dx_i=0$, $dy_1=x_1x_2$, $dy_2=x_1^2-x_2^2$. Числа Бетти: $(1,0,2,0,1)$.

4. $S^2\times S^2$. $\Lambda V = \Lambda(x_1,x_2,y_1,y_2)$, $|x_i|=2, |y_i|=3$, $dx_i=0$, $dy_i=x_i^2$. Числа Бетти: $(1,0,2,0,1)$.

$n=5$.

1. $S^2 \times S^3$: $\Lambda V = \Lambda(x, y_1, y_2)$, $|x| = 2$, $|y_j| = 3$, $dx = 0$, $dy_1 = 0$, $dy_2 = x^2$. Числа Бетти: $(1, 0, 1, 1, 0, 1)$.

2. S^5: $\Lambda V = \Lambda(y)$, $|y| = 5$, $dy = 0$. Числа Бетти: $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$.

$n = 6$.

1. $S^3 \times S^3$: $\Lambda V = \Lambda(y_1, y_2)$, $|y_i| = 3$, $dy_i = 0$. Числа Бетти: $(1, 0, 0, 2, 0, 0, 1)$.

2. $\mathbb{C}P^3$: $\Lambda V = \Lambda(x, y)$, $|x| = 2$, $|y| = 7$, $dx = 0, dy = x^4$. Числа Бетти: $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$.

3. S^6: $\Lambda V = \Lambda(x, y)$, $|x| = 6$, $|y| = 11$, $dy = x^2$. Числа Бетти: $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$.

4. $S^2 \times S^4$: $\Lambda V = \Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2)$, $|x_1| = 2$, $|x_2| = 4$, $|y_1| = 3$, $|y_2| = 7$, $dx_i = 0$, $dy_i = x_i^2$. Числа Бетти: $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$.

5. $\Lambda V = \Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2)$, $|x_i| = 2$, $|y_1| = 3$, $|y_2| = 5$. $dx_i = 0$, $dy_1 = F(x_1, x_2)$, $dy_2 = G(x_1, x_2)$, где F — квадратичная форма, G — кубическая форма. Примером такого пространства в случае $dy_1 = x_1^2, dy_2 = x_2^3$, является $S^2 \times CP^2$. Числа Бетти: $(1, 0, 2, 0, 2, 0, 1)$.

6. $\Lambda V = \Lambda(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$, $|x_i| = 2$, $|y_i| = 3$, $dx_i = 0$, $dy_i = F_i(x_1, x_2, x_3)$, где F_i — квадратичные формы. Примерами таких пространств являются: $S^2 \times S^2 \times S^2$ (при $dy_i = dx_i^2$) и $\mathbb{C}P^3 \# \mathbb{C}P^3$ (при $dy_1 = x_1^2 - x_2^2$, $dy_3 = x_3^2 - x_2^2$, $dy_2 = x_1 x_3$). Числа Бетти: $(1, 0, 3, 0, 3, 0, 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sullivan D.* Infinitesimal computations in topology // Publ. IHÉS. 1977. V. 47. P. 269–331.
2. *Friedlander J. B., Halperin S.* An arithmetic characterization of the rational homotopy groups of certain spaces // Invent. Math. 1979. V. 53. P. 117–133.
3. *Тайманов И. А.* Топология римановых многообразий с интегрируемыми геодезическими потоками // Тр. Мат. ин-та РАН. 1994. Т. 205. С. 150–163.
4. *Болсинов А. В., Тайманов И. А.* Интегрируемые геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов // Тр. Мат. ин-та РАН. 2000. Т. 231. С. 46–63.
5. *Paternain G. P.* On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows // Ergod. Theory Dynam. Syst. 1992. V. 12. P. 109–121.
6. *Félix Y., Halperin S., Thomas J.-C.* The homotopy Lie algebra for finite complexes // Publ. IHÉS. 1977. V. 47. P. 269–331.
7. *Félix Y., Halperin S., Thomas J.-C.* Rational homotopy theory. New York: Springer-Verl., 2001.
8. *Halperin S.* Finiteness in the minimal models of Sullivan // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 230. P. 173–199.

Статья поступила 3 декабря 2001 г.

Павлов Александр Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
saaska@yahoo.com