Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 517.9

ОТСУТСТВИЕ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Г. Г. Лаптев

Аннотация: Получены достаточные условия отсутствия глобальных решений полулинейных эволюционных дифференциальных уравнений и неравенств высокого порядка (по временной переменной). Установленные результаты обобщают известные утверждения для параболических и гиперболических уравнений. Доказательства основаны на методе пробных функций, разработанном Л. Вероном, Э. Митидиери, С. И. Похожаевым, А. Тесеем.

Ключевые слова: глобальные решения, дифференциальные неравенства, отсутствие решений

Введение

В работе исследуется отсутствие глобальных решений полулинейных эволюционных дифференциальных неравенств второго порядка по пространственной переменной x и высокого порядка по «времени» t. По переменной x мы предполагаем, что задачи ставятся во внешности шара $|x| > R$, $R > 0$.

В качестве примера рассмотрим параболическую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^q \text{ в } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \quad u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0 \text{ в } \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

Классический результат Фужиты — Хаякавы утверждает, что эта задача не имеет глобального неотрицательного решения для любых (ненулевых неотрицательных) начальных данных, если

$$1 < q \leq q^* = 1 + \frac{2}{N}.$$

Полученное значение q^*, называемое критическим показателем Фужиты, является неулучшаемым, т. е. для $q > q^*$ при дополнительных условиях на u_0 задача имеет глобальное неотрицательное решение.

В дальнейшем теория отсутствия решений эволюционных уравнений получила большое развитие. Из множества литературы по параболическим задачам упомянем книгу [1] и обзоры [2, 3], по гиперболическим — книги [4–6] и статьи [7, 8]. К настоящему времени стала очевидной необходимость выделить некоторые общие свойства, влияющие на отсутствие решения эволюционных уравнений и неравенств, чтобы в рамках единого подхода охватить задачи

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (код проекта 01–0136), программы «Университеты России» (код проекта УР.04.01.028) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00884).

как параболические и гиперболические, так и «эволюционные высокого порядка» [9]. В настоящей статье делается попытка провести такое исследование на базе метода пробных функций [10–12], систематически используемого, в частности, в книге [6]. Заметим, что все другие известные подходы неприменимы в данном случае из-за отсутствия линейной теории рассматриваемых задач.

Пусть $N \geq 3$, Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}^{N+1}$ с кусочно-гладкой границей. Далее используются пространства С. Л. Соболева $W_q^2(\Omega)$, а также локальное пространство $L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, элементы которого лежат в $L_q(\Omega')$ для любого компактного подмножества Ω': $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Через $C(\overline{\Omega})$ обозначается пространство непрерывных функций, через $C^m(\overline{\Omega})$ — пространство гладких функций на замкнутой области $\overline{\Omega}$. Анизотропные (по переменным x и t) варианты таких пространств, обозначаемые через $W_q^{2,k}(\Omega)$ и $C^{2,k}(\overline{\Omega})$, будут активно применяться при введении пробных функций. Детальные описания этих классов имеются в [13].

Символ Δ обозначает оператор Лапласа по пространственным переменным $(x_1, \ldots, x_N)$, вектор из частных производных обозначаем через $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_i})$. Для двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $\varphi(x)$ полагаем

$$DuD\varphi = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Выражение $\frac{\partial u}{\partial n}$ обозначает производную функции u по направлению внешней нормали n к рассматриваемой области. В основном такой областью будет внешность шара B_R радиуса $R > 0$ с центром в начале координат. Через c и C с индексами будем обозначать постоянные, точные значения которых нас не интересуют.

1. Предварительные оценки

В этом разделе устанавливаются вспомогательные оценки некоторых интегралов от пробных функций в зависимости от параметра ρ, $\rho \to \infty$, составляющие основу используемого метода.

Рассмотрим «стандартную срезающую функцию» [13] $\zeta(y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ со следующими свойствами:

$$0 \leq \zeta(y) \leq 1, \quad \zeta(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{если } y \geq 2. \end{cases}$$

Введем функцию

$$\eta(y) = (\zeta(y))^{kp_0}$$

с некоторыми положительными параметрами p_0 и k, где k натуральное. Для первой и второй производных (для $1 < p \leq p_0$) устанавливаются оценки

$$|\eta'(y)|^p = (kp_0)^p \zeta^{kp_0(p-1)} \zeta^{kp_0 - p} |\zeta'|^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y),$$

$$|\eta''(y)|^p \leq (kp_0)^p \zeta^{kp_0(p-1)} \zeta^{kp_0-2p}((kp_0-1)|\zeta'|^2 + \zeta|\zeta''|)^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y)$$

с некоторой постоянной c_η. Действуя аналогично, легко проверить выполнение такого рода оценки для производной до порядка k включительно, т. е.

$$|\eta^{(k)}(y)|^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y).$$

Вводя замену переменной $y = t/\rho^\theta$, где $\theta > 0$, $\rho > 2R$, t — новая переменная, для функции $\eta(t/\rho^\theta)$, у которой

$$\operatorname{supp}|\eta(t/\rho^\theta)| = \{t < 2\rho^\theta\}, \quad \operatorname{supp}\left|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}\right| = \{\rho^\theta < t < 2\rho^\theta\},$$

легко установить неравенство

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\left|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}\right|} \frac{\left|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}\right|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)}\,dt \le c_\eta \rho^{-\theta(kp-1)}. \tag{1.1}$$

Параметр θ в дальнейшем будет подбираться в зависимости от оператора.

Для пространственной переменной x, $|x| = r$, вводим функции $\eta(r/\rho)$,

$$\xi(x) \equiv \xi(r) = \frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s}, \tag{1.2}$$

и произведение

$$\psi_\rho(x) \equiv \psi_\rho(r) = \left(\frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s}\right)\eta\left(\frac{r}{\rho}\right), \tag{1.3}$$

где в дальнейшем положим $s = N - 2$. При $r \gg R$ первый сомножитель в определении ψ_ρ ведет себя как $1/R^s$ и $0 \le \psi_\rho(x) \le 1/R^s$. Отметим некоторые свойства функции ψ_ρ: $\psi_\rho = 0$ и $\frac{\partial\psi_\rho}{\partial r} \ge 0$ для $r = R$.

Получим оценки для первой и второй производных функции $\psi_\rho(r)$ (с учетом предположения $r > 2R$):

$$\left|\frac{\partial\psi_\rho}{\partial r}\right|^p \le \left|\frac{s}{r^{s+1}}\eta\left(\frac{r}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s}\right)\eta'\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{1}{\rho}\right|^p \le c\eta^{p-1}\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{1}{R^{ps}r^p}\left(1 + \frac{r^p}{\rho^p}\right),$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2\psi_\rho}{\partial r^2}\right|^p &\le \left|-\frac{s(s+1)}{r^{s+2}}\eta\left(\frac{r}{\rho}\right) + \frac{2s}{r^{s+1}\rho}\eta'\left(\frac{r}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s}\right)\frac{1}{\rho^2}\eta''\left(\frac{r}{\rho}\right)\right|^p \\ &\le c\eta^{p-1}\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{1}{R^{sp}r^{2p}}\left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}}\right),\end{aligned}$$

где константа c не зависит от r и ρ. Объединяя эти неравенства, приходим к оценке для оператора Лапласа

$$\begin{aligned}|\Delta\psi_\rho(x)|^p &= \left|\frac{\partial^2\psi_\rho}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\partial\psi_\rho}{\partial r}\right|^p \le c\left|\frac{\partial^2\psi_\rho}{\partial r^2}\right|^p + c\frac{1}{r^p}\left|\frac{\partial\psi_\rho}{\partial r}\right|^p \\ &\le c\eta^{p-1}\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{1}{R^{sp}r^{2p}}\left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}}\right) \le c\psi_\rho^{p-1}(x)\frac{1}{r^{2p}}\left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}}\right).\end{aligned} \tag{1.4}$$

На последнем этапе мы использовали очевидное при $r > 2R$ соотношение

$$\frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s} \ge \frac{1}{R^s} - \frac{1}{2^s R^s} \ge \frac{c}{R^s}.$$

Теперь положим $s = N - 2$. Напомним, что $\Delta(1/r^{N-2}) = 0$ для $r \ne 0$. Поэтому $\Delta\psi_\rho = 0$ для $r < \rho$ и $\operatorname{supp}|\Delta\psi_\rho| = \{\rho < r < 2\rho\}$. На множестве $\operatorname{supp}|\Delta\psi_\rho|$ справедлива оценка

$$1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}} \le c,$$

где постоянная c не зависит от r и ρ. Следовательно, из (1.4) получим для $\rho < r < 2\rho$

$$|\Delta\psi_\rho(x)|^p \le c\psi_\rho^{p-1}(x)\frac{1}{\rho^{2p}},$$

откуда для любого параметра $\sigma \in \mathbb{R}$ вытекает оценка

$$\int\limits_{\operatorname{supp}|\Delta\psi_\rho|} \frac{|\Delta\psi_\rho(x)|^p}{\psi_\rho^{p-1}(x)|x|^{\sigma(p-1)}}\,dx \le c\int\limits_\rho^{2\rho} \frac{\psi_\rho^{p-1}(x)}{\psi_\rho^{p-1}(x)}\frac{r^{N-1}}{\rho^{2p+\sigma(p-1)}}\,dr \le c_\psi \rho^{-p(\sigma+2)+N+\sigma}. \tag{1.5}$$

Таким образом, для общей пробной функции вида

$$\varphi_\rho(x,t) = \eta\left(\frac{t}{\rho^\theta}\right)\psi_\rho(x) \tag{1.6}$$

с учетом интегрирования по переменной t получим

$$\iint\limits_{\operatorname{supp}|\Delta\varphi_\rho|} \frac{|\Delta\varphi_\rho(x,t)|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x,t)|x|^{\sigma(p-1)}}\,dxdt \le \int\limits_0^{2\rho^\theta} \eta(t/\rho^\theta)\,dt \int\limits_{\operatorname{supp}|\Delta\psi_\rho|} \frac{|\Delta\psi_\rho|^p}{\psi_\rho^{p-1}|x|^{\sigma(p-1)}}\,dx \le c_\varphi \rho^{\theta-p(\sigma+2)+N+\sigma}. \tag{1.7}$$

Теперь оценим (с учетом (1.1)) аналогичный интеграл для производной порядка k по переменной t:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}\right|} \frac{\left|\frac{\partial^k\varphi_\rho(x,t)}{\partial t^k}\right|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x,t)|x|^{\sigma(p-1)}}\,dxdt \\
&\le \int\limits_{\operatorname{supp}\left|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}\right|} \frac{\left|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}\right|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)}\,dt \int\limits_{R<|x|<2\rho} \frac{\psi_\rho(x)}{|x|^{\sigma(p-1)}}\,dx \le c_\eta\rho^{-\theta(kp-1)}c\int\limits_R^{2\rho}\frac{r^{N-1}}{r^{\sigma(p-1)}}\,dr \\
&\le c_\varphi \begin{cases} \rho^{N-\sigma(p-1)-\theta(kp-1)}, & \text{если } N-\sigma(p-1)>0, \\ \rho^{-\theta(kp-1)}\ln\rho, & \text{если } N-\sigma(p-1)=0, \\ \rho^{-\theta(kp-1)}R^{N-\sigma(p-1)}, & \text{если } N-\sigma(p-1)<0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

При $\theta = 2/k$ первый показатель степени ρ в этой оценке совпадает с показателем из (1.7):

$$N-\sigma(p-1)-\theta(kp-1) = \theta - p(\sigma+2)+N+\sigma \equiv -p(\sigma+2)+N+\sigma+2/k.$$

Поскольку далее в модельной задаче мы считаем $\sigma = 0$, выделим этот случай отдельно. Тогда из правой части неравенства (1.8) остается первый вариант, и общая оценка (при $\theta = 2/k$) принимает вид

$$\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}-\Delta\varphi_\rho\right|} \frac{\left|(-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}-\Delta\varphi_\rho\right|^p}{\varphi_\rho^{p-1}}\,dxdt \le c_0\rho^{-2p+N+2/k}. \tag{1.9}$$

Пусть теперь $T > 0$ фиксировано. Нам понадобятся аналогичные (1.1), (1.7) и (1.8) оценки в области $t > T$:

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\left|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}\right|} \frac{\left|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}\right|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)t^{\gamma(p-1)}}\,dt \le c_\eta \rho^{-\theta(p(k+\gamma)-1-\gamma)}; \tag{1.10}$$

$$\iint\limits_{\operatorname{supp}|\Delta\varphi_\rho|} \frac{|\Delta\varphi_\rho(x,t)|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x,t)t^{\gamma(p-1)}}\,dxdt \le \int\limits_T^{2\rho^\theta} \frac{\eta(t/\rho^\theta)}{t^{\gamma(p-1)}}\,dt \int\limits_{\operatorname{supp}|\Delta\psi_\rho|} \frac{|\Delta\psi_\rho|^p}{\psi_\rho^{p-1}}\,dx$$

$$\le c_\varphi \begin{cases} \rho^{-\gamma\theta(p-1)+\theta-2p+N}, & \text{если } 1-\gamma(p-1) > 0, \\ \rho^{-2p+N}\ln\rho, & \text{если } 1-\gamma(p-1) = 0, \\ \rho^{-2p+N}T^{1-\gamma(p-1)}, & \text{если } 1-\gamma(p-1) < 0; \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}\right|} \frac{\left|\frac{\partial^k\varphi_\rho(x,t)}{\partial t^k}\right|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x,t)t^{\gamma(p-1)}}\,dxdt$$

$$\le \int\limits_{\operatorname{supp}\left|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}\right|} \frac{\left|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}\right|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)t^{\gamma(p-1)}}\,dt \int\limits_{R<|x|<2\rho} \psi_\rho(x)\,dx \le c_\varphi \rho^{-\theta(p(k+\gamma)-1-\gamma)+N}. \tag{1.12}$$

При $\theta = 2/k$

$$-\gamma\theta(p-1)+\theta-2p+N = -\theta(p(k+\gamma)-1-\gamma)+N = -2\gamma(p-1)/k-2p+N+2/k.$$

2. Модельная задача: отсутствие глобального решения

Пусть $R > 0$. Введем область $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus B_R$ (т. е. внешность шара B_R) и рассмотрим проблему отсутствия глобального нетривиального решения задачи для некоторого натурального числа k:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \ge |u|^q \quad \text{в } \Omega\times(0,\infty), \\ u|_{\partial B_R\times(0,\infty)} \ge 0, \quad \left.\frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}\right|_{t=0} \ge 0,\ u \not\equiv 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Далее слабое решение будет пониматься в следующем смысле.

Определение 2.1. Пусть $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$ и определены локально суммируемые следы $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $i = 1,\dots,k-1$, при $t = 0$. Функция $u(x,t)$ называется *слабым решением задачи* (2.1), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x,t) \in W_\infty^{2,k}(\Omega\times(0,\infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial B_R\times(0,\infty)} = 0$, и финитной по переменным $r = |x|$ и t, выполнено интегральное неравенство

$$-\int\limits_0^\infty \int\limits_{\partial B_R} u\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dxdt + \int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega u\left((-1)^k\frac{\partial^k\varphi}{\partial t^k} - \Delta\varphi\right)dxdt$$

$$\ge \int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega |u|^q\varphi\,dxdt + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1-i}u}{\partial t^{k-1-i}}(x,0)\frac{\partial^i\varphi}{\partial t^i}(x,0)\,dx$$

$$+\int\limits_{\Omega}\frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi(x,0)\,dx.$$

Замечание 2.1. В приведенном определении не ставилось целью получить предельные условия на гладкость или суммируемость решения $u(x,t)$. Возможны обобщения на решения из L_q при дополнительных предположениях о суммируемости следов на границе шара. Чтобы не затруднять изложение, ограничимся непрерывными решениями на замыкании Ω, которые имеют непрерывный след на границе шара ∂B_R.

Теорема 2.1. *При*

$$1<q\le q_k^*=\frac{N+2/k}{N-2+2/k}$$

задача (2.1) *не имеет нетривиального глобального решения.*

Эта теорема включает в себя как частные случаи несколько классических результатов для параболических и гиперболических задач. Заметим, что, хотя мы и не исследуем вопрос о неулучшаемости q_k^*, в приводимых ниже примерах q_k^* совпадает с уже известными точными показателями.

При $k=1$ получаем упомянутый во введении критический показатель Фужиты — Хаякавы

$$q_1^*=1+\frac{2}{N}.$$

При $k=2$ имеем

$$q_2^*=\frac{N+1}{N-1}$$

— критический показатель Като для гиперболических уравнений. Однако при использовании доказательства Като (через сведение к обыкновенному дифференциальному неравенству) возможно рассматривать лишь задачи с компактным носителем начальных данных и с конечной скоростью распространения возмущений [7], для которых этот показатель не точен. В то же время без этих предположений показатель Като является в некотором смысле неулучшаемым [14].

Наконец, интересно отметить, что при $k\to\infty$ в пределе приходим к точному критическому показателю для эллиптических неравенств (см. [6, 15] и ссылки там):

$$q_\infty^*=\frac{N}{N-2}.$$

Необходимо также упомянуть, что в отличие от многих работ здесь рассматриваются решения без предположения об их положительности. Вместо этого требуется положительность (неотрицательность) на границе. Для эволюционного неравенства высокого порядка принцип максимума в общем случае не имеет места, поэтому из положительности граничных значений не следует положительность решения в области.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $u(x,t)$ — нетривиальное глобальное решение задачи (2.1). Согласно определению 2.1 с пробной функцией $\varphi(x,t)$ $=\varphi_\rho(x,t)$, введенной по формуле (1.6) с $p=q'>1$ и $\theta=2/k$, с учетом очевидных равенств

$$\frac{\partial^i\varphi_\rho}{\partial t^i}(x,0)\equiv 0\quad \text{для } i=1,\dots,k-1$$

это означает, что

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\,dx + \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega |u|^q \varphi_\rho\,dxdt$$
$$\le -\int\limits_0^\infty \int\limits_{\partial B_R} u\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial r}\,dxdt + \iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right|} u\left((-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right) dxdt. \quad (2.2)$$

Как уже отмечалось ранее, производная $\frac{\partial \psi_\rho}{\partial r}$ при $r = R$ неотрицательна, а следовательно, и $\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial r}|_{r=R} \ge 0$, поэтому первый интеграл в правой части будет неположительным благодаря условию $u|_{\partial B_R \times (0,\infty)} \ge 0$.

Для оценки последнего интеграла в (2.2) применим неравенство Гёльдера. Получим

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\,dx + \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega |u|^q \varphi_\rho\,dxdt$$
$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\,dx + \iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right|} |u|^q \varphi_\rho\,dxdt + \iint\limits_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} |u|^q \xi(x)\,dxdt$$
$$\le \iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right|} |u| \left|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right| dxdt$$
$$\le \Bigg(\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right|} |u|^q \varphi_\rho\,dxdt \Bigg)^{1/q}$$
$$\times \Bigg(\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right|} \frac{|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}}\,dxdt \Bigg)^{1/q'}, \quad (2.3)$$

откуда, отбрасывая неотрицательные начальные условия и с учетом оценки (1.9) (при $p = q'$) для последнего интеграла справа, будем иметь

$$\iint\limits_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} |u|^q \xi(x)\,dxdt \le \iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right|} \frac{\left|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right|^{q'}}{\varphi^{q'-1}}\,dxdt$$
$$\le c_0 \rho^{-2q'+N+2/k}. \quad (2.4)$$

Так как подынтегральное выражение в левой части не зависит от ρ, можем перейти к пределу по $\rho \to \infty$. В случае

$$-2q' + N + 2/k \le 0$$

это приводит к соотношению

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega |u|^q \xi\,dxdt \le c_0.$$

Тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега по мере и оценки $\varphi_\rho \le \xi$ имеем

$$\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right|} |u|^q \varphi_\rho \, dxdt \le \iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right|} |u|^q \xi \, dxdt = \varepsilon(\rho) \to 0$$

при $\rho \to \infty$. Возвращаясь теперь к неравенству (2.3), получим

$$\iint\limits_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} |u|^q \xi \, dxdt \le \varepsilon^{1/q}(\rho) c_0^{1/q'} \to 0$$

при $\rho \to \infty$, т. е. в пределе

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega |u|^q \xi \, dxdt = 0.$$

Так как $\xi > 0$ в Ω, то $u \equiv 0$, что противоречит предположению о существовании ненулевого решения.

Из неравенства

$$-2q' + N + 2/k \le 0$$

получаем условие отсутствия нетривиального решения из формулировки теоремы $1 < q \le q_k^*$.

3. Неоднородная задача

По аналогии с (2.1) рассмотрим неравенство с дополнительным слагаемым $w(x) \ge 0$, $w(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, т. е. задачу

$$\begin{gathered} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \ge |u|^q + w(x) \text{ в } \Omega \times (0,\infty), \quad w(x) \not\equiv 0, \\ u|_{\partial B_R \times (0,\infty)} \ge 0, \quad \left.\frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}\right|_{t=0} \ge 0, \quad u \not\equiv 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Определение 3.1. Пусть $u(x,t) \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ и определены локально суммируемые следы $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $i = 1, \dots, k-1$, при $t = 0$. Функция $u(x,t)$ называется *слабым решением задачи* (3.1), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x,t) \in W_\infty^{2,k}(\Omega \times (0,\infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial B_R \times (0,\infty)} = 0$, и финитной по переменным $r = |x|$ и t, выполнено интегральное неравенство

$$\begin{aligned} -\int\limits_0^\infty \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial r} \, dxdt + \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega u \left((-1)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} - \Delta\varphi \right) dxdt \\ \ge \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega |u|^q \varphi \, dxdt + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1-i} u}{\partial t^{k-1-i}}(x,0) \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i}(x,0) \, dx \\ + \int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x,0) \varphi(x,0) \, dx + \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega w(x) \varphi \, dxdt. \end{aligned}$$

Теорема 3.1. *При*

$$1 < q < q^* = \frac{N}{N-2}$$

задача (3.1) *не имеет нетривиального глобального решения, каким бы малым ни было* $w(x) \geq 0$, $w(x) \not\equiv 0$.

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 2.1, получаем «априорную оценку»

$$\int_0^{\rho^{2/k}} \int_{R<|x|<\rho} w(x)\xi\,dxdt + \int_{R<|x|<\rho} \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\xi(x)\,dx + \iint_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} |u|^q \xi\,dxdt \leq c_1 \rho^{-2q'+N+2/k},$$

откуда

$$c_1 \rho^{-2q'+N+2/k} \geq \int_0^{\rho^{2/k}} \int_{R<|x|<\rho} w(x)\xi(x)\,dxdt \geq \rho^{2/k} c_w \tag{3.2}$$

при ρ таких, что

$$\int_{R<|x|<\rho} w(x)\xi(x)\,dx \geq c_w \equiv \mathrm{const} > 0.$$

Для получения противоречия при $\rho \to \infty$ достаточно предполагать, что $-2q' + N < 0$, т. е. $q < N/(N-2)$. Теорема доказана.

Такого рода результаты для параболических задач получены в работе [16]. Там же на основе теоремы сравнения доказано, что и в критическом случае $q = q^*$ задача не имеет решения, однако для гиперболического и общего эволюционного неравенств вопрос остается открытым. Как видно из теоремы 3.1, критический показатель для неоднородной задачи совпадает с эллиптическим независимо от порядка уравнения k.

Возможно изучить и зависимость критического показателя от роста неоднородности.

Теорема 3.2. *Пусть* $w(x) \geq c_\beta/|x|^\beta$, *где* $\beta > 2$. *Тогда задача* (3.1) *не имеет глобального нетривиального решения при* $1 < q < \beta/(\beta-2)$.

Доказательство. При условиях теоремы неравенство (3.2) принимает вид

$$c_1 \rho^{-2q'+N+2/k} \geq \rho^{2/k} \rho^{N-\beta} c_w,$$

откуда $c_1 \geq c_w \rho^{2q'-\beta}$. Неравенство невозможно, если $2q' - \beta > 0$, т. е. $q < \beta/(\beta-2)$.

4. Сингулярное неравенство

Пусть $R > 0$ и $-2 < \sigma < +\infty$. Рассмотрим проблему отсутствия слабых решений задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \geq |x|^\sigma |u|^q \quad \text{в } \Omega \times (0,\infty), \\ u|_{\partial B_R \times (0,\infty)} \geq 0, \quad \left.\frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}\right|_{t=0} \geq 0, \quad u \not\equiv 0. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Определение 4.1. Пусть $u(x,t) \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ и определены локально суммируемые следы $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $i = 1,\dots,k-1$, при $t=0$. Функция $u(x,t)$ называется *слабым решением задачи* (4.1), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x,t) \in W^{2,k}_\infty(\Omega \times (0,\infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial B_R \times (0,\infty)} = 0$, и финитной по переменным $r = |x|$ и t, выполнено интегральное неравенство

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_0^\infty \int\limits_{\partial B_R} u \frac{\partial \varphi}{\partial r}\,dxdt + \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega u \left((-1)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} - \Delta\varphi \right) dxdt \\
\geq \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega |x|^\sigma |u|^q \varphi\,dxdt + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1-i} u}{\partial t^{k-1-i}}(x,0) \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i}(x,0)\,dx \\
+ \int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi(x,0)\,dx. \quad (4.2)
\end{aligned}
$$

Теорема 4.1. *При $\sigma > -2$ и*

$$1 < q \leq q^* = \frac{N + 2/k + \sigma}{N - 2 + 2/k}$$

задача (4.1) *не имеет нетривиального глобального решения.*

Для параболических неравенств ($k=1$) аналогичный результат имеется в [17] (см. также ссылки на результаты для соответствующих уравнений в обзорах [2,3]).

Гиперболическая задача (4.1) (т. е. когда $k=2$) в случае компактных начальных данных и в предположении о конечной скорости распространения возмущений рассматривалась (через сведение к обыкновенному дифференциальному уравнению) в [18], при дополнительном ограничении $\sigma < N(q-1)$.

Не включенный в теорему 4.1 случай $\sigma \leq -2$, так называемые «критическая и суперкритическая сингулярности», вызвал большой интерес после появления работы [19], в которой исследуется аналогичная задача в ограниченной области. Дальнейшее развитие это направление получило в книге [6] и работе автора [9], где рассмотрены также некоторые эволюционные неравенства высокого порядка. Основной результат состоит в том, что задача в шаре B_R с критической или суперкритической сингулярностью (в точке $|x|=0$) не имеет глобального по времени t решения для всех $q > 1$. Более того, параболическая задача не имеет даже локального по t решения. Это явление получило название «полного и мгновенного разрушения» решения.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $u(x,t)$ — нетривиальное решение. Из (4.2) с пробной функцией $\varphi(x,t) = \varphi_\rho(x,t)$, определенной в (1.6), с $p = q' > 1$, $\theta = 2/k$ имеем

$$
\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\,dx + \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega |u|^q |x|^\sigma \varphi_\rho\,dxdt \\
\leq -\int\limits_0^\infty \int\limits_{\partial B_R} u \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial r}\,dxdt + (-1)^k \iint\limits_{\frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} = 0} u \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k}\,dxdt - \iint\limits_{\Delta\varphi_\rho = 0} u \Delta\varphi_\rho\,dxdt
\end{aligned}
$$

$$+ (-1)^k \iint\limits_{\frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} \neq 0} u \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k}\, dxdt - \iint\limits_{\Delta\varphi_\rho \neq 0} u \Delta\varphi_\rho\, dxdt. \quad (4.3)$$

Первый интеграл в правой части неположителен, второй и третий равны нулю. Применяя неравенство Гёльдера к оставшимся интегралам, получим

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\, dx + \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega |u|^q |x|^\sigma \varphi_\rho\, dxdt$$

$$= \int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\, dx + \iint\limits_{\varphi_\rho(x,t)\neq\xi(x)} |u|^q|x|^\sigma \varphi_\rho\, dxdt + \iint\limits_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} |u|^q|x|^\sigma \xi(x)\, dxdt$$

$$\leq \iint\limits_{\operatorname{supp}\left|\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}\right|} |u| \left|\frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k}\right| dxdt + \iint\limits_{\operatorname{supp}|\Delta\varphi_\rho|} |u||\Delta\varphi_\rho|\, dxdt$$

$$\leq \Bigg(\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}\right|} |u|^q|x|^\sigma\varphi_\rho\, dxdt\Bigg)^{1/q} \Bigg(\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}\right|} \frac{\left|\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}\right|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}|x|^{\sigma(q'-1)}}\, dxdt\Bigg)^{1/q'}$$

$$+ \Bigg(\iint\limits_{\operatorname{supp}|\Delta\varphi_\rho|} |u|^q|x|^\sigma\varphi_\rho\, dxdt\Bigg)^{1/q} \Bigg(\iint\limits_{\operatorname{supp}|\Delta\varphi_\rho|} \frac{|\Delta\varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}|x|^{\sigma(q'-1)}}\, dxdt\Bigg)^{1/q'}. \quad (4.4)$$

Наконец, используя неравенство Юнга с параметром, находим

$$\iint\limits_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} |u|^q|x|^\sigma\xi(x)\, dxdt \leq c \iint\limits_{\operatorname{supp}\left|\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}\right|} \frac{\left|\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}\right|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}|x|^{\sigma(q'-1)}}\, dxdt$$

$$+ c \iint\limits_{\operatorname{supp}|\Delta\varphi_\rho|} \frac{|\Delta\varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}|x|^{\sigma(q'-1)}}\, dxdt. \quad (4.5)$$

Последнее слагаемое в силу (1.7) (с $p = q'$ и $\theta = 2/k$) не превосходит

$$c\rho^{-q'(\sigma+2)+N+\sigma+2/k}.$$

Если

$$-q'(\sigma+2) + N + \sigma + 2/k \leq 0, \quad (4.6)$$

то последний интеграл в (4.5) ограничен при $\rho \to \infty$.

Что касается первого интеграла в правой части (4.5), легко видеть, что в условиях (4.6) он также ограничен. Действительно, если $N - \sigma(q'-1) > 0$, то показатель роста в (1.8) совпадает с $-q'(\sigma+2) + N + \sigma + 2/k \leq 0$. Если же $N - \sigma(q'-1) \leq 0$, то множитель $\rho^{-\theta(kq'-1)}$ стремится к нулю при $\rho \to \infty$ и, следовательно, рассматриваемый интеграл ограничен.

Переходя к пределу при $\rho \to \infty$, в случае (4.6) приходим к оценке

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega |u|^q|x|^\sigma\xi\, dxdt \leq c_0,$$

откуда с помощью наших стандартных рассуждений получаем отсутствие нетривиального глобального решения при выполнении неравенства (4.6).

Введем теперь сингулярность по t. Пусть $T > 0$, $R > 0$ и $-k < \gamma \le 0$. Рассмотрим проблему отсутствия слабых решений задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \ge t^\gamma |u|^q \quad \text{в } \Omega \times (T, \infty), \\ u|_{\partial B_R \times (0,\infty)} \ge 0, \quad \left.\frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}\right|_{t=T} \ge 0, \quad u \not\equiv 0. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Определение 4.2. Пусть $u(x,t) \in C(\overline{\Omega} \times [T,\infty))$ и определены локально суммируемые следы $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $i = 1, \dots, k-1$, при $t = T$. Неотрицательная функция $u(x,t)$ называется *слабым решением задачи* (4.7), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x,t) \in W^{2,k}_\infty(\Omega \times (T,\infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial B_R \times (T,\infty)} = 0$, и финитной по переменным $r = |x|$ и t, выполнено интегральное неравенство

$$\begin{aligned} -\int_T^\infty \int_{\partial B_R} u \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, dxdt + \int_T^\infty \int_\Omega u \left((-1)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} - \Delta \varphi \right) dxdt \\ \ge \int_T^\infty \int_\Omega t^\gamma |u|^q \varphi\, dxdt + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \int_\Omega \frac{\partial^{k-1-i} u}{\partial t^{k-1-i}}(x,0) \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i}(x,0)\, dx \\ + \int_\Omega \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x,0) \varphi(x,0)\, dx. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Теорема 4.2. *При* $-k < \gamma \le 0$ *и*

$$1 < q \le q^* = \frac{N + 2/k + 2\gamma/k}{N - 2 + 2/k}$$

задача (4.7) *не имеет нетривиального глобального решения.*

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — нетривиальное решение. Действуя аналогично доказательству теоремы 4.1 (очевидно, мы можем брать ту же самую пробную функцию φ_ρ, в частности $\theta = 2/k$), получаем

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\varphi_\rho(x,t) = \xi(x)} |u|^q t^\gamma \xi(x)\, dxdt \le c \iint\limits_{\operatorname{supp} \left| \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} \right|} \frac{\left| \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} \right|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1} t^{\gamma(q'-1)}}\, dxdt \\ + c \iint\limits_{\operatorname{supp} |\Delta \varphi_\rho|} \frac{|\Delta \varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1} t^{\gamma(q'-1)}}\, dxdt. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Первое слагаемое в силу (1.12) (с $p = q'$) не превосходит

$$c\rho^{-2\gamma(q'-1)/k - 2q' + N + 2/k},$$

поэтому интеграл ограничен при

$$-2\gamma(q'-1)/k - 2q' + N + 2/k \le 0. \tag{4.10}$$

Так как по предположению $\gamma < 0$, справедливо неравенство $1-\gamma(q'-1) > 0$, тем самым второй интеграл (по оценке (1.11)) также ограничен при условии (4.10). Тогда, переходя к пределу при $\rho \to \infty$, приходим к оценке

$$\int_T^\infty \int_\Omega |u|^q t^\gamma \xi \, dxdt \le c_0,$$

откуда вытекает отсутствие нетривиального решения при выполнении условия (4.10). Теорема доказана.

Параболическому случаю ($k = 1$) задачи (4.7) уделяется много внимания, в частности, аналогичный результат, но для $\gamma \ge 0$ приводится в обзорах [2, 3]:

$$1 < q < q^* = \frac{N+2+2\gamma}{N}.$$

Насколько известно автору, соответствующее гиперболическое неравенство ранее не рассматривалось.

5. Система неравенств

Рассмотрим слабо связанную систему

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \ge |v|^{q_1} \text{ в } \Omega\times(0,\infty), \quad \frac{\partial^k v}{\partial t^k} - \Delta v \ge |u|^{q_2} \text{ в } \Omega\times(0,\infty), \\
u|_{\partial B_R\times(0,\infty)} \ge 0, \quad v|_{\partial B_R\times(0,\infty)} \ge 0, \\
\left.\frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}\right|_{t=0} \ge 0, \quad \left.\frac{\partial^{k-1} v}{\partial t^{k-1}}\right|_{t=0} \ge 0, \quad u \not\equiv 0, \ v \not\equiv 0.
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Определение 5.1. Пара функций $u, v \in C(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$, у которых определены локально суммируемые следы $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ и $\frac{\partial^i v}{\partial t^i}$, $i = 1, \dots, k-1$, при $t = 0$, называется *слабым решением задачи* (5.1), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x,t) \in W^{2,k}_\infty(\Omega\times(0,\infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial B_R\times(0,\infty)} = 0$, и финитной по переменным $r = |x|$ и t, выполнены интегральные неравенства

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\infty \int_{\partial B_R} u\frac{\partial\varphi}{\partial r}\, dxdt + \int_0^\infty\int_\Omega u\left((-1)^k\frac{\partial^k\varphi}{\partial t^k} - \Delta\varphi\right) dxdt \\
&\qquad \ge \int_0^\infty\int_\Omega |v|^{q_1}\varphi\, dxdt + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\int_\Omega \frac{\partial^{k-1-i}u}{\partial t^{k-1-i}}(x,0)\frac{\partial^i\varphi}{\partial t^i}(x,0)\, dx \\
&\qquad\qquad + \int_\Omega \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi(x,0)\, dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\infty \int_{\partial B_R} v\frac{\partial\varphi}{\partial r}\, dxdt + \int_0^\infty\int_\Omega v\left((-1)^k\frac{\partial^k\varphi}{\partial t^k} - \Delta\varphi\right) dxdt \\
&\qquad \ge \int_0^\infty\int_\Omega |u|^{q_2}\varphi\, dxdt + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\int_\Omega \frac{\partial^{k-1-i}v}{\partial t^{k-1-i}}(x,0)\frac{\partial^i\varphi}{\partial t^i}(x,0)\, dx \\
&\qquad\qquad + \int_\Omega \frac{\partial^{k-1}v}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi(x,0)\, dx.
\end{aligned}$$

Теорема 5.1. *Задача* (5.1) *не имеет глобального нетривиального решения, если*

$$\max\{\gamma_1,\gamma_2\} \geq \frac{N-2+2/k}{2}, \text{ где } \gamma_1 = \frac{q_1+1}{q_1q_2-1},\ \gamma_2 = \frac{q_2+1}{q_1q_2-1},\ q_1>1,\ q_2>1.$$

Доказательство. Пусть u, v — слабое решение задачи (5.1). Выберем пробную функцию, как в доказательстве теоремы 2.1, и будем использовать соответствующие обозначения. В частности, справедлива оценка (1.9).

Применяя в определении слабого решения неравенство Гёльдера, приходим к неравенствам

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\,dx + \int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega |v|^{q_1}\varphi_\rho\,dxdt$$

$$\leq \Bigg(\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}-\Delta\varphi_\rho\right|} |u|^{q_2}\varphi_\rho\,dxdt\Bigg)^{1/q_2}$$

$$\times\Bigg(\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}-\Delta\varphi_\rho\right|} \frac{\left|(-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}-\Delta\varphi_\rho\right|^{q_2'}}{\varphi_\rho^{q_2'-1}}\,dxdt\Bigg)^{1/q_2'}$$

$$\equiv \Bigg(\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}-\Delta\varphi_\rho\right|} |u|^{q_2}\varphi_\rho\,dxdt\Bigg)^{1/q_2} J_1^{1/q_2'}, \tag{5.2}$$

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1}v}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\,dx + \int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega |u|^{q_2}\varphi_\rho\,dxdt$$

$$\leq \Bigg(\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}-\Delta\varphi_\rho\right|} |v|^{q_1}\varphi_\rho\,dxdt\Bigg)^{1/q_1}$$

$$\times\Bigg(\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}-\Delta\varphi_\rho\right|} \frac{\left|(-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}-\Delta\varphi_\rho\right|^{q_1'}}{\varphi_\rho^{q_1'-1}}\,dxdt\Bigg)^{1/q_1'}$$

$$\equiv \Bigg(\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}-\Delta\varphi_\rho\right|} |v|^{q_1}\varphi_\rho\,dxdt\Bigg)^{1/q_1} J_2^{1/q_1'}, \tag{5.3}$$

причем согласно (1.9)

$$J_1 \leq c_0\rho^{-2q_2'+N+2/k}, \quad J_2 \leq c_0\rho^{-2q_1'+N+2/k}.$$

Подставим неравенство (5.3) в (5.2). Тогда

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\psi_\rho(x)\,dx + \int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega |v|^{q_1}\varphi_\rho\,dxdt$$

$$\leq \Bigg(\iint\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}-\Delta\varphi_\rho\right|} |v|^{q_1}\varphi_\rho\,dxdt\Bigg)^{1/(q_1q_2)} J_2^{1/(q_1'q_2)} J_1^{1/q_2'},$$

откуда после упрощения степеней получаем

$$\int_0^\infty \int_\Omega |v|^{q_1} \varphi_\rho \, dxdt \le \left(J_2^{q_1-1} J_1^{q_1(q_2-1)}\right)^{1/(q_1q_2-1)}$$
$$\le C\rho^{((N-2+2/k)(q_1q_2-1)-2(q_1+1))/(q_1q_2-1)} = C\rho^{N-2+2/k-2\gamma_1}. \quad (5.4)$$

Отсюда, рассуждая, как и раньше, выводим отсутствие нетривиального $v(x,t)$ в случае

$$N-2+2/k-2\gamma_1 \le 0.$$

Аналогично, подставляя (5.2) в (5.3), приходим к оценке

$$\int_0^\infty \int_\Omega |u|^{q_2} \varphi_\rho \, dxdt \le \left(J_1^{q_2-1} J_2^{q_2(q_1-1)}\right)^{1/(q_1q_2-1)}$$
$$\le C\rho^{((N-2+2/k)(q_1q_2-1)-2(q_2+1))/(q_1q_2-1)} = C\rho^{N-2+2/k-2\gamma_2}, \quad (5.5)$$

т. е. нетривиальное решение $u(x,t)$ отсутствует при

$$N-2+2/k-2\gamma_2 \le 0.$$

Очевидно, что если хотя бы одна из функций $u(x,t)$ или $v(x,t)$ тождественно равна нулю, то равна нулю и другая. Таким образом, условие отсутствия нетривиального решения принимает вид

$$\max\{\gamma_1, \gamma_2\} \ge \frac{N-2+2/k}{2},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 5.1. Возможна геометрическая интерпретация приведенных условий. Степени q_1 и q_2 входят в соотношение нелинейно, так что после упрощения получаем объединение областей над прямыми $q_1 = 1$, $q_2 = 1$ и под гиперболами:

$$1 < q_1 \le \frac{N+2/k}{(N-2+2/k)q_2 - 2}, \quad 1 < q_2 \le \frac{N+2/k}{(N-2+2/k)q_1 - 2}.$$

Точки пересечения гипербол и прямых (т. е. значения q_1^* при $q_2 = 1$ и q_2^* при $q_1 = 1$) даются формулами

$$q_1^* = \frac{N+2/k}{N-4+2/k}, \quad q_2^* = \frac{N+2/k}{N-4+2/k}.$$

Приведем частные случаи теоремы 5.1. При $k = 1$ (параболическая система) приходим к варианту результата Эскобедо — Херреро [3]: задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \ge |v|^{q_1} \text{ в } \Omega \times (0,\infty), \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v \ge |u|^{q_2} \text{ в } \Omega \times (0,\infty),$$
$$u|_{\partial B_R \times (0,\infty)} \ge 0, \quad v|_{\partial B_R \times (0,\infty)} \ge 0, \quad u(x,0) \ge 0, \quad v(x,0) \ge 0, \quad u \not\equiv 0, \quad v \not\equiv 0,$$

не имеет глобального нетривиального решения при

$$\max\left\{\frac{q_1+1}{q_1q_2-1}, \frac{q_2+1}{q_1q_2-1}\right\} \ge \frac{N}{2}.$$

Утверждение Эскобедо — Херреро, однако, является несколько более общим, поскольку доказано в предположении $q_1q_2 > 1$, тогда как мы считаем $q_1 > 1$, $q_2 > 1$.

При $k = 2$ для гиперболической системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \geq |v|^{q_1} \text{ в } \Omega \times (0,\infty), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v \geq |u|^{q_2} \text{ в } \Omega \times (0,\infty),$$

$$u|_{\partial B_R \times (0,\infty)} \geq 0, \quad v|_{\partial B_R \times (0,\infty)} \geq 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} \geq 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} \geq 0, \quad u \not\equiv 0, \quad v \not\equiv 0,$$

схожие утверждения об отсутствии решения при

$$\max\left\{\frac{q_1+1}{q_1q_2-1}, \frac{q_2+1}{q_1q_2-1}\right\} \geq \frac{N-1}{2}$$

имеются в работах [7] (при дополнительных предположениях) и [14] (общий случай). Отметим, однако, что в статьях [7, 14] исследованы задачи во всем пространстве $\mathbb{R}^N$, тогда как мы рассматриваем внешность шара $\mathbb{R}^N \setminus B_R$.

В пределе $k \to \infty$ приходим к известным условиям отсутствия для эллиптической системы (см. [6] и ссылки там):

$$\max\left\{\frac{q_1+1}{q_1q_2-1}, \frac{q_2+1}{q_1q_2-1}\right\} \geq \frac{N-2}{2}.$$

Используя предлагаемый подход, можно рассмотреть также системы неравенств с сингулярными коэффициентами и установить зависимость критического показателя от включенных в систему неоднородностей. Еще одним вариантом обобщения теоремы 5.1 являются утверждения об отсутствии решений систем смешанного типа, включающих в себя параболическое и гиперболическое неравенства, т. е. эволюционные неравенства разных порядков.

В заключение автор выражает благодарность С. И. Похожаеву за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
2. *Levine H. A.* The role of critical exponents in blow-up theorems // SIAM Rev. 1990. V. 32. P. 371–386.
3. *Deng K., Levine H. A.* The role of critical exponents in blow-up theorems: The sequel // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 243, N 1. P. 85–126.
4. *Alinhac S.* Blowup for nonlinear hyperbolic equations. Boston: Birkhäuser, 1995.
5. *John F.* Nonlinear wave equations, formation of singularities. Providence: Amer. Math. Soc., 1990. (University Lecture Ser.; v. 2).
6. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. М.: Наука, 2001. (Тр. МИ РАН; т. 234).
7. *Del Santo D., Georgiev V., Mitidieri E.* Global existence of the solutions and formation of singularities for a class of hyperbolic systems // Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Boston: Birkhäuser, 1997. V. 32. P. 117–140.
8. *Georgiev V., Lindblad H., Sogge C. D.* Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations // Amer. J. Math. 1997. V. 119, N 6. P. 1291–1319.
9. *Лаптев Г. Г.* Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств // Тр. МИ РАН. 2001. Т. 232. С. 223–235.
10. *Курта В. В.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. М.: МИ РАН, 1994.

11. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в $\mathbb{R}^N$ // Тр. МИ РАН. 1999. Т. 227. С. 192–222.
12. *Лаптев Г. Г.* Отсутствие глобальных положительных решений систем полулинейных эллиптических неравенств в конусах // Изв. РАН. Сер. мат. 2000. Т. 64, № 6. С. 107–124.
13. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
14. *Veron L., Pohozaev S. I.* Blow-up results for nonlinear hyperbolic inequalities // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 2000. V. 29, N 2. P. 393–420.
15. *Коньков А. А.* О неотрицательных решениях квазилинейных эллиптических неравенств // Изв. РАН. Сер. мат. 1999. Т. 63, № 2. С. 41–127.
16. *Zhang Q.* Blow-up results for nonlinear parabolic equations on manifolds // Duke Math. J. 1999. V. 97, N 3. P. 515–539.
17. *Pinsky R. G.* Existence and nonexistence of global solutions for $u_t = \Delta u + a(x)u^p$ in R^d // J. Differential Equations. 1997. V. 133. P. 152–177.
18. *Galaktionov V. A., Pohozaev S. I.* Blow-up, critical exponents and asymptotic spectra for nonlinear hyperbolic equations // Nonlinear Anal. TMA. (to appear).
19. *Brezis H., Cabré X.* Some simple nonlinear PDE's without solutions // Boll. Un. Mat. Ital. B(7). 1998. V. 8. P. 223–262.

Статья поступила 2 апреля 2001 г.

Лаптев Геннадий Геннадьевич
Тульский гос. университет, пр. Ленина, 92, Тула 300600
laptev@home.tula.net