Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 512.554

ЙОРДАНОВЫ (СУПЕР)КОАЛГЕБРЫ И (СУПЕР)КОАЛГЕБРЫ ЛИ

В. Н. Желябин

Аннотация: Исследуется вопрос локальной конечномерности йордановых суперкоалгебр. Установлена связь между йордановыми и лиевыми суперкоалгебрами, являющаяся аналогом конструкции Ксхера — Титса — Кантора для обычных йордановых супералгебр. Построен пример йордановой суперкоалгебры, которая не является локально конечномерной. Показано, что для йордановой суперкоалгебры (J, Δ) с дуальной алгеброй J^* существует такая суперкоалгебра Ли $(L^c(J), \Delta_L)$, дуальная алгебра $(L^c(J))^*$ которой является КТК-супералгеброй Ли для йордановой супералгебры J^*. Известно, что по произвольной йордановой алгебре J можно построить йорданову коалгебру J^0. Найдены необходимые и достаточные условия, когда коалгебра $(L^c(J^0), \Delta_L)$ изоморфна коалгебре $(\mathrm{Loc}(L_{\mathrm{in}}(J)^0), \Delta_L^0)$, где $L_{\mathrm{in}}(J)$ — присоединенная КТК-алгебра Ли для йордановой алгебры J.

Ключевые слова: йорданова супералгебра, супералгебра Ли, конструкция Кохера — Титса — Кантора, йорданова коалгебра, коалгебра Ли

Дуальным понятием алгебры над полем является понятие коалгебры. Теория коалгебр долгое время развивалась в рамках теории ассоциативных алгебр, а именно в рамках теории алгебр Хопфа. Лиевы и йордановы коалгебры были определены соответственно в работах [1, 2]. В [3] установлена связь между йордановыми и лиевыми коалгебрами, являющаяся аналогом известной конструкции Кохера — Титса — Кантора (КТК-конструкции) для обычных алгебр. Предложенное в [3] доказательство существенным образом использовало результат локальной конечномерности йордановых коалгебр, доказанный в [2].

В данной работе исследуется вопрос локальной конечномерности йордановых суперкоалгебр и изучается связь йордановых суперкоалгебр с суперкоалгебрами Ли. Как оказалась, существуют йордановы суперкоалгебры, которые не являются локально конечномерными. Построена КТК-конструкция для йордановых суперкоалгебр. А именно, показано, что для йордановой суперкоалгебры (J, Δ) с дуальной алгеброй J^* существует такая суперкоалгебра Ли $(L^c(J), \Delta_L)$, дуальная алгебра $(L^c(J))^*$ которой является КТК-супералгеброй Ли для йордановой супералгебры J^*. Центральным понятием при построение ККТ-конструкции для йордановых суперкоалгебр является понятие слабо внутреннего дифференцирования. Показано, что пространство слабо внутренних дифференцирований йордановой супералгебры J^* является дуальной супералгеброй некоторой суперкоалгебры Ли.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00630).

Известно, что по произвольной йордановой алгебре J можно построить йорданову коалгебру J^0. В работе найдены необходимые и достаточные условия, когда коалгебра $(L^c(J^0), \Delta_L)$ изоморфна коалгебре $\big(\mathrm{Loc}(L_{\mathrm{in}}(J)^0), \Delta_L^0\big)$, где $L_{\mathrm{in}}(J)$ — присоединенная КТК-алгебра Ли для йордановой алгебры J.

§ 1. Определения и предварительные результаты

Пусть F — поле. Для линейных пространств V и U над полем F через $V \otimes U$ обозначим их тензорное произведение над F. Через V^* будем обозначать дуальное пространство, т. е. пространство всех линейных функционалов, заданных на пространстве V. Пусть X и Y — подмножества из V и V^* соответственно. Через $Y(X)$ обозначим подмножество элементов поля F вида $y(x)$, где $x \in X$, $y \in Y$.

Как известно, отображение $\rho : V^* \otimes V^* \mapsto (V \otimes V)^*$, определенное следующим правилом:

$$\rho(f \otimes g)\Big(\sum_i v_i \otimes u_i\Big) = \sum_i f(v_i)g(u_i),$$

является инъективным вложением. Если $\phi : V \mapsto U$ — линейное отображение, то сопряженное к нему линейное отображение $\phi^* : U^* \mapsto V^*$ задается правилом $(\phi^*(u^*))(v) = u^*(\phi(v))$, здесь $v \in V$, $u^* \in U^*$.

Определение. Пара (A, Δ), где A — линейное пространство, а $\Delta : A \mapsto A \otimes A$ — линейное отображение, называется *коалгеброй*. Отображение Δ называется *коумножением*. Для элемента a коалгебры (A, Δ) если $\Delta(a) = \sum\limits_i a_{1i} \otimes a_{2i}$, то, следуя [4], будем писать $\Delta(a) = \sum\limits_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

Коединицей коалгебры (A, Δ) называется такой функционал ε из A^*, что

$$a = \sum_a \varepsilon(a_{(1)})a_{(2)} = \sum_a \varepsilon(a_{(2)})a_{(1)}$$

для произвольного элемента a из A, здесь $\Delta(a) = \sum\limits_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

Пусть (A, Δ) — коалгебра. Рассмотрим дуальное пространство A^*. Пусть $\Delta^* : (A \otimes A)^* \mapsto A^*$ — сопряженное отображение для коумножения Δ. Тогда на пространстве A^* можно задать операцию умножения, положив $fg = \Delta^*\rho(f \otimes g)$, где f, g — функционалы из A^*. Пространство A^* с заданным умножением является обычной алгеброй над полем F, которая называется *дуальной алгеброй* коалгебры (A, Δ). Легко видеть, что для любых f, g из A^* и любого a из A справедливо равенство

$$(fg)(a) = \rho(f \otimes g)(\Delta(a)) = \sum_a f(a_{(1)})g(a_{(2)}).$$

Коединица ε коалгебры (A, Δ) является единицей для дуальной алгебры A^*.

Определение. Пусть пара (A, Δ) — коалгебра. Линейное отображение $\mathrm{d} : A \mapsto A$ называется *кодифференцированием*, если для любого элемента $a \in A$ справедливо равенство

$$\Delta(a^{\mathrm{d}}) = \sum_a \big(a_{(1)}^{\mathrm{d}} \otimes a_{(2)} + a_{(1)} \otimes a_{(2)}^{\mathrm{d}}\big).$$

Если d — кодифференцирование коалгебры (A, Δ), то сопряженное к d отображение d^* является дифференцированием дуальной алгебры A^*. Действительно, пусть f, g — произвольные элементы из A^*. Тогда для любого $a \in A$ имеем

$$(fg)^{\mathrm{d}^*}(a) = (fg)(a^{\mathrm{d}}) = \sum_a \bigl(f\bigl(a^{\mathrm{d}}_{(1)}\bigr)g(a_{(2)}) + f(a_{(1)})g\bigl(a^{\mathrm{d}}_{(2)}\bigr)\bigr) = (f^{\mathrm{d}^*}g + fg^{\mathrm{d}^*})(a).$$

Следовательно, $(fg)^{\mathrm{d}^*} = f^{\mathrm{d}^*}g + fg^{\mathrm{d}^*}$.

Дуальная алгебра A^* коалгебры (A, Δ) задает бимодульное действие $(\cdot)$ на пространстве A, которое определяется следующим образом:

$$f \cdot a = \sum_a a_{(1)} f(a_{(2)}), \quad a \cdot f = \sum_a f(a_{(1)}) a_{(2)},$$

где $f \in A^*$ и $a \in A$. Поэтому мы можем рассмотреть нулевое расширение $\mathrm{D}(A) = A^* \oplus A$ алгебры A^* с помощью бимодуля A, т. е. $\mathrm{D}(A)$ — алгебра, умножение в которой задается так:

$$(f + a)(g + b) = fg + f \cdot b + a \cdot g,$$

здесь $f, g \in A^*$ и $a, b \in A$. Определим на алгебре $\mathrm{D}(A)$ билинейную симметрическую форму Q, полагая $Q(f + a, g + b) = f(b) + g(a)$. Очевидно, форма Q невырожденная. Проверим, что Q является ассоциативной формой на алгебре $\mathrm{D}(A)$, т. е. $Q(xy, z) = Q(x, yz)$ для любых элементов $x, y, z \in \mathrm{D}(A)$.

Действительно, пусть $f, g, h \in A^*$ и $a, b, c \in A$. Тогда

$$Q((f + a)(g + b), h + c) = Q(fg + f \cdot b + a \cdot g, h + c) = (fg)(c) + h(f \cdot b) + h(a \cdot g)$$
$$= \sum_c f(c_{(1)})g(c_{(2)}) + \sum_b h(b_{(1)})f(b_{(2)}) + \sum_a h(a_{(2)})g(a_{(1)})$$
$$= f(g \cdot c) + f(b \cdot h) + (gh)(a) = Q(f + a, gh + b \cdot h + g \cdot c) = Q(f + a, (g + b)(h + c)).$$

Пусть X — подмножество в A (A^*). Тогда, как обычно, $X^\perp = \{f \in A^* \mid Q(f, X) = 0\}$ ($X^\perp = \{a \in A \mid Q(a, X) = 0\}$) — ортогональное дополнение к X в A^* (A).

Определение. Линейное подпространство B коалгебры (A, Δ) называется *подкоалгеброй* (*коидеалом*), если $\Delta(B) \subseteq B \otimes B$ ($\Delta(B) \subseteq A \otimes B + B \otimes A$).

Хорошо известно, что B является подкоалгеброй (коидеалом) тогда и только тогда, когда пространство $B^\perp$ — идеал (подалгебра) в A^*. Нетрудно показать, что B — подкоалгебра в том и только в том случае, когда пространство B — A^*-подбимодуль.

Выше было показано, что каждой коалгебре (A, Δ) можно поставить в соответствие ее дуальную алгебру A^*. Теперь мы покажем, как алгебре A можно поставить в соответствие коалгебру (A^0, Δ^0).

Пусть A — алгебра над полем F с умножением $m : A \otimes A \mapsto A$. Тогда имеем сопряженное к m линейное отображение $m^* : A^* \mapsto (A \otimes A)^*$. Подпространство V из A^* называется *хорошим*, если $m^*(V) \subseteq \rho(V \otimes V)$. На пространстве V зададим коумножение $\Delta_V : V \mapsto V \otimes V$, полагая $\Delta_V(v) = \sum_i v_{(1)} \otimes v_{(2)}$, если $m^*(v) = \sum_i \rho(v_{(1)} \otimes v_{(2)})$. Поскольку вложение ρ инъективно, коумножение Δ_V определенно корректно. Пусть теперь A^0 — сумма всех хороших подпространств из A^*. Тогда A^0 — наибольшее хорошее подпространство и поэтому

A^0 — коалгебра с коумножением $\Delta^0 = \Delta_{A_0}$ (см. [1, 2]). Коалгебра (A^0, Δ^0) называется *дуальной коалгеброй для алгебры* A. Для любых $a, b \in A$ и любого $f \in A^0$ имеет место равенство $m(a \otimes b)(f) = \sum\limits_f f_{(1)}(a) f_{(2)}(b)$, где $\Delta_0(f) = \sum\limits_f f_{(1)} \otimes f_{(2)}$.

Коалгебра (A, Δ) называется *локально конечномерной*, если всякая конечнопорожденная подкоалгебра конечномерна. Как показано в [2], подкоалгебра из A, порожденная подмножеством S, совпадает с A^*-подбимодулем, порожденным S. Следовательно, коалгебра (A, Δ) локально конечномерна тогда и только тогда, когда A является локально конечномерным A^*-бимодулем. Сумму всех конечномерных подкоалгебр из A обозначим через $\mathrm{Loc}(A)$. Справедлива следующая

Теорема (АСМ) 1 (см. [2]). *Пусть A — произвольная алгебра над полем F. Тогда $\mathrm{Loc}(A^0) = \{f \in A^* \mid$ в A существует такой идеал I конечной коразмерности, что $f(I) = 0\}$.*

В ассоциативном и лиевом случаях этот результат получен соответственно в [1] и [4].

В работе [2] дано следующее определение коалгебры, связанное с некоторым многообразием алгебр.

Определение. Пусть $\mathscr{M}$ — произвольное многообразие алгебр. Тогда пара (A, Δ) называется *$\mathscr{M}$-коалгеброй*, если дуальная алгебра A^* принадлежит многообразию $\mathscr{M}$.

Данное определение $\mathscr{M}$-коалгебры в случае, когда $\mathscr{M}$ — многообразие ассоциативных (лиевых) алгебр, согласовано с определением ассоциативной (лиевой) коалгебры [1, 4].

Если теперь $\mathscr{M}$ — многообразие ассоциативных, альтернативных, лиевых или йордановых алгебр, то, как показано в [2], справедлива следующая

Теорема (АСМ) 2. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *пара (A, Δ) — $\mathscr{M}$-коалгебра,*

(ii) *нулевое расширение дуальной алгебры A^*, т. е. алгебра $\mathrm{D}(A)$, является алгеброй многообразия $\mathscr{M}$.*

Аналог этой теоремы для структуризуемых коалгебр доказан в [5].

Один из основных результатов теории ассоциативных коалгебр утверждает, что всякая ассоциативная коалгебра локально конечномерна [4]. В работах [2, 5] доказано, что всякая альтернативная, йорданова или структуризуемая коалгебра локально конечномерна. Поэтому если A ((A, Δ)) — ассоциативная альтернативная йорданова или структуризуемая алгебра (коалгебра), то $A^0 = \mathrm{Loc}(A^0)$ ($A = \mathrm{Loc}(A)$). В случае алгебр Ли эти результаты не имеют места [1, 6, 7]. Необходимые и достаточные условия локальной конечномерности коалгебры Ли найдены в работе [8].

Пусть $V = V_0 + V_1$ — Z_2-градуированное пространство над полем F. Пространство V_0 (V_1) называется *четной* (*нечетной*) *частью пространства* V. Элементы множества $V_0 \cup V_1$ называются *однородными.* Выражение $p(x)$, где $x \in V_0 \cup V_1$, означает индекс четности однородного элемента x: $p(x) = 0$, если $x \in V_0$ (x четный), и $p(x) = 1$, если $x \in V_1$ (x нечетный).

Пусть F — поле характеристики не 2 и $J = J_0 + J_1$ — Z_2-градуированная F-алгебра, т. е. J-градуированное пространство и $J_0^2 \subseteq J_0$, $J_1^2 \subseteq J_0$, $J_1 J_0 \subseteq J_0$. Для элемента x из J через R_x обозначим оператор правого умножения на элемент x. Пространство линейных отображений, порожденное операторами

R_x, обозначим через R_J. Алгебра J называется *йордановой супералгеброй*, если для однородных элементов выполняются следующие операторные тождества:

$$aR_b = (-1)^{p(a)p(b)} bR_a, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} R_aR_bR_c + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)+p(b)p(c)} R_cR_bR_a + (-1)^{p(b)p(c)} R_{(ac)b} \\ = R_{ab}R_c + (-1)^{p(b)p(c)} R_{ac}R_b + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)} R_{bc}R_a \\ = R_aR_{bc} + (-1)^{p(a)p(b)} R_bR_{ac} + (-1)^{p(b)p(c)+p(a)p(c)} R_cR_{ab}. \end{aligned} \tag{2}$$

Для йордановой супералгебры операторные тождества (2) эквивалентны следующим супертождествам:

$$(x,a,b)c + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)+p(b)p(c)}(x,c,b)a - (-1)^{p(b)p(c)}(x,ac,b) = 0, \tag{3}$$

$$(xa,b,c) + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)+p(b)p(c)}(xc,b,a) - (-1)^{p(a)p(b)}(x,b,ac) = 0, \tag{4}$$

которые, в свою очередь, эквивалентны супертождествам

$$a(b,c,x) + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)+p(b)p(c)}c(b,a,x) - (-1)^{p(a)p(b)}(b,ac,x) = 0, \tag{5}$$

$$(a,b,cx) + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)+p(b)p(c)}(c,b,ax) - (-1)^{p(b)p(c)}(ac,b,x) = 0. \tag{6}$$

Левые части тождеств (3), (4), (5) и (6) обозначим соответственно через $Riden_1(a,b,c,x)$, $Riden_2(a,b,c,x)$, $Liden_1(a,b,c,x)$ и $Liden_2(a,b,c,x)$.

Если J — йорданова супералгебра (суперкоалгебра), то ее четную часть мы будем обозначать через A, а нечетную — через M.

Пусть $L = L_0 + L_1$ — Z_2-градуированная F-алгебра. Тогда L является супералгеброй Ли, если в ней для однородных элементов выполняются следующие супертождества:

$$[x,y] = -(-1)^{p(x)p(y)}[y,x],$$

$$[[x,y],z] - [x,[y,z]] + (-1)^{p(x)p(y)}[y,[x,z]] = 0.$$

Пусть $V = V_0 + V_1$ — Z_2-градуированное пространство над полем F. Линейное отображение $\phi : V \mapsto V$ называется *четным*, если $\phi(V_i) \subseteq V_i$, и *нечетным*, если $\phi(V_i) \subseteq V_{(i+1) \bmod 2}$, здесь $i = 0,1$. Пусть $\mathrm{End}(V)_0$ — пространство четных, а $\mathrm{End}(V)_1$ — пространство нечетных линейных отображений. Тогда на пространстве $\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}(V)_0 + \mathrm{End}(V)_1$ определим умножение, полагая

$$[\phi,\psi] = \phi\psi - (-1)^{p(\phi)p(\psi)}\psi\phi,$$

где $\phi,\psi \in \mathrm{End}(V)_0 \cup \mathrm{End}(V)_1$. Полученная алгебра является супералгеброй Ли, которую мы обозначим через $\mathrm{End}(V)^{(-)}$.

Однородное линейное отображение $\mathrm{d} : J \mapsto J$ йордановой супералгебры J называется *дифференцированием*, если для любых элементов $a,b \in J$ выполняется равенство

$$(ab)^{\mathrm{d}} = (-1)^{p(b)p(\mathrm{d})} a^{\mathrm{d}} b + ab^{\mathrm{d}}.$$

Пусть $a,b \in A$ и $x,y \in M$. Тогда $R_a, R_b \in \mathrm{End}(J)_0$, а $R_x, R_y \in \mathrm{End}(J)_1$. В супералгебре $\mathrm{End}(J)^{(-)}$ положим $D_{a,b} = [R_a,R_b]$, $D_{x,y} = [R_x,R_y]$ и $D_{a,x} = [R_a,R_x]$. Тогда $D_{a,b}, D_{x,y}$ — четные, а $D_{a,x}$ — нечетное дифференцирования супералгебры J. Их линейные комбинации называются *внутренними дифференцированиями.* Линейное пространство четных внутренних дифференцирований супералгебры J обозначим через $\mathrm{Inder}(J)_0$, а нечетных — через $\mathrm{Inder}(J)_1$.

Пространство $\mathrm{Inder}(J) = \mathrm{Inder}(J)_0 + \mathrm{Inder}(J)_1$ является подсупералгеброй Ли в $\mathrm{End}(J)^{(-)}$ и называется *супералгеброй внутренних дифференцирований.* Пусть X и Y — подмножества из J. Обозначим через $D_{X,Y}$ линейное пространство, порожденное дифференцированиями вида $D_{x,y}$, где $x \in X$, $y \in Y$.

Каждой йордановой супералгебре так же, как и в случае обычных йордановых алгебр, можно поставить в соответствие супералгебру Ли.

Пусть D_0 и D_1 — пространства четных и нечетных дифференцирований супералгебры J соответственно. Предположим, что $D = D_0 + D_1$ является подсупералгеброй Ли в $\mathrm{End}(J)^{(-)}$, $\mathrm{Inder}(J) \subseteq D$ и супералгебра J содержит единицу. Рассмотрим пространство $\mathscr{B}(J,D) = R_J + D$. Тогда $\mathscr{B}(J,D)$ — подсупералгебра Ли в $\mathrm{End}(J)^{(-)}$ с четной частью $\mathscr{B}(J,D)_0 = R_A + D_0$ и нечетной частью $\mathscr{B}(J,D)_1 = R_M + D_1$.

Для элементов $a, b \in A$ и $x, y \in M$ положим

$$(a+x)\nabla(b+y) = R_{ab} + R_{ay} + R_{xb} + R_{xy} - D_{a,b} - D_{x,y} - D_{a,y} - D_{x,b}.$$

Пусть $\overline{J}$ — изоморфная копия пространства J.

Рассмотрим теперь пространство $L(J,D) = J + \mathscr{B}(J,D) + \overline{J}$. Тогда $L(J,D)$ допускает следующую Z_2-градуировку $L(J,D) = L_0 + L_1$, где $L_0 = A + R_A + D_0 + \overline{A}$ — четная, а $L_1 = M + R_M + D_1 + \overline{M}$ — нечетная части. Пусть отображение $\xi : L(J,D) \mapsto L(J,D)$ задано формулой $\xi(a + R_b + d + \bar{c}) = c - R_b + d + \bar{a}$. Зададим на пространстве $L(J,D)$ умножение, которое также обозначим через $[\,,]$, полагая

$$[a + \phi + \bar{b}, c + \psi + \bar{d}] = a\psi - c\phi + a\nabla d - c\nabla b + [\phi,\psi] + \overline{b\xi(\psi)} - \overline{d\xi(\phi)},$$

где $a, b \in A$, $\phi \in \mathscr{B}(J,D)_0$, а $c, d \in A \cup M$, $\psi \in \mathscr{B}(J,D)_0 \cup \mathscr{B}(J,D)_1$,

$$[a + \phi + \bar{b}, c + \psi + \bar{d}] = a\psi + c\phi + a\nabla d + c\nabla b + [\phi,\psi] + \overline{b\xi(\psi)} + \overline{d\xi(\phi)},$$

где $a, b, c, d \in M$, $\phi, \psi \in \mathscr{B}(J,D)_1$. Тогда относительно этого умножения $L(J,D)$ является супералгеброй Ли. По аналогии с йордановыми алгебрами супералгебру $L(J,D)$ будем называть КТК-*супералгеброй.*

§ 2. О локальной конечномерности йордановых суперкоалгебр

В данном параграфе будет показано, что существует йорданова суперкоалгебра, которая не является локально конечномерной. Согласно определению $\mathscr{M}$-коалгебры дадим следующее

Определение. Коалгебра (J,Δ), где $J = A + M$ — Z_2-градуированное линейное пространство, называется йордановой *суперкоалгеброй*, если ее дуальная алгебра $J^* = A^* + M^*$ является йордановой супералгеброй с четной частью A^* и нечетной частью M^*.

Непосредственно из определения получаем, что $\Delta(A) \subseteq A \otimes A + M \otimes M$ и $\Delta(M) \subseteq A \otimes M + M \otimes A$. Пусть pr_0 и pr_1 — проекции пространства $A \otimes A + M \otimes M$ на подпространства $A \otimes A$ и $M \otimes M$. Тогда пара $(A, pr_0\Delta)$ — йорданова коалгебра с дуальной алгеброй A^*.

Предложение 1. *Пусть пара (J,Δ) — йорданова суперкоалгебра и $J^* = A^* + M^*$ — ее дуальная алгебра. Тогда пространство M — йорданов A^*-бимодуль, т. е. пара (M,Δ) — йорданов комодуль коалгебры $(A, pr_0\Delta)$.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру $\mathrm{D}(J)$. Как показано выше, на ней определена билинейная симметрическая невырожденная форма Q.

Пусть $a, b, \in A^*$ и $x, y, \in M$. Из того, что M^* является йордановым A^*-бимодулем, получаем равенство $Q(m^*, a \cdot x - x \cdot a) = 0$ для любого $m^* \in M^*$. Тогда $Q(\mathrm{D}(J), a \cdot x - x \cdot a) = 0$, т. е. действие A^* на пространстве M является коммутативным. Поскольку

$$Q(m^*, ((a+x)^2, b+y, a+x)) \\ = -Q((m^*, a^2, b) - 2a(m^*, a, b), x) + Q((a, m^*, a^2), y) = 0,$$

то $Q(\mathrm{D}(J), ((a+x)^2, b+y, a+x)) = 0$, т. е. $((a+x)^2, b+y, a+x) = 0$ и M — йорданов A^*-бимодуль.

Теорема 1. *Пусть пара (J, Δ) — йорданова суперкоалгебра и $J^* = A^* + M^*$ — ее дуальная алгебра. Тогда $\mathrm{D}(J)$ — йорданова супералгебра с четной частью $A^* + M$ и нечетной частью $M^* + A$.*

Доказательство. Пусть $A_0 = A^* + M$ и $M_0 = M^* + A$. Из определения коумножения Δ следует, что $\mathrm{D}(J) = A_0 + M_0$ — Z_2-градуированная суперкоммутативная алгебра. Ввиду определения формы Q имеем $Q(A_0, A_0) = Q(M_0, M_0) = 0$. В силу предложения 1 алгебра A_0 является йордановой. Повторяя доказательство предложения 1, получим, что M_0 — йорданов A_0-бимодуль.

Пусть $a, b, c \in M_0$ и $x \in A \cup M \cup M^* \cup A^*$. Покажем, что $Riden_1(a, b, c, x) = Riden_2(a, b, c, x) = 0$.

(i) Пусть $x \in A \cup M$, например, $x \in A$. Тогда можно считать, что $a, b, c \in M^*$ и поэтому $Riden_1(a, b, c, x) \in M$. Если $m^* \in M^*$, то, используя ассоциативность формы Q, получаем $Q(m^*, Riden_1(a, b, c, x)) = -Q(Liden_2(a, b, c, m^*), x) = 0$. Поэтому $Riden_1(a, b, c, x) = 0$. Равенство $Riden_2(a, b, c, x) = 0$ доказывается аналогично.

(ii) Пусть $x \in M^* \cup A^*$, например, $x \in M^*$. Тогда можно считать, что два элемента, например, a, b принадлежат M^*, а $c \in A$. Если $m^* \in M^*$, то ввиду нечетности элементов a, b, c, x, m^* и ассоциативности формы Q получаем

$$Q(m^*, Riden_1(a, b, c, x)) = Q(Liden_1(m^*, x, a, b), c) = 0.$$

Поэтому $Riden_1(a, b, c, x) = 0$. Равенство $Riden_2(a, b, c, x) = 0$ доказывается аналогично.

Пусть теперь $a, b \in A_0$, $c, d \in M_0$. Тогда

$$Q(Liden_2(d, c, a, b), x) = -Q(b, Riden_1(d, c, a, x)).$$

Если $x \in M_0$, то в силу суперкоммутативности $\mathrm{D}(J)$ и п. (i) получаем, что $Liden_2(d, c, a, b) = 0$. Аналогично доказывается равенство $Liden_1(d, c, a, b) = 0$. Опять используя суперкоммутативность $\mathrm{D}(J)$, получим $Riden_1(a, b, c, d) = Riden_2(a, b, c, d) = 0$.

Таким образом, для Z_2-градуированной алгебры $\mathrm{D}(J)$ справедливы (1) и (2), т. е. $\mathrm{D}(J)$ — йорданова супералгебра.

Йорданова суперкоалгебра (J, Δ) называется *локально конечномерной*, если любое конечное число однородных элементов из J порождает в J конечномерную подкоалгебру.

Следующей пример показывает, что существуют йордановы суперкоалгебры, которые не являются локально конечномерными.

Пусть L — счетномерное пространство с базой $\{x_0, x_1, \dots\}$, $\overline{L}$ — изоморфная копия пространства L с базой $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots\}$. Рассмотрим Z_2-градуированное пространство $J = A + M$, где четная часть $A = L$, нечетная часть $M = \overline{L} + F\bar{1}$. Определим на пространстве J коумножение Δ, полагая

$$\Delta(x_0) = 0,\ \Delta(x_i) = \bar{x}_0 \otimes \bar{x}_{i+1} - \bar{x}_{i+1} \otimes \bar{x}_0,\ \Delta(\bar{1}) = 0 \text{ и } \Delta(\bar{x}_i) = \bar{1} \otimes x_i + x_i \otimes \bar{1}.$$

Предложение 2. *Коалгебра* $(A+M,\Delta)$ — *йорданова суперкоалгебра, которая не является локально конечномерной.*

Доказательство. Определим на пространстве L коумножение Δ_L, полагая

$$\Delta_L(x_0)=0,\quad \Delta_L(x_i)=x_0\otimes x_{i+1}-x_{i+1}\otimes x_0.$$

Как показано в [1], пара (L,Δ_L) — коалгебра Ли. Следовательно, ее дуальная алгебра L^* — алгебра Ли. Умножение в алгебре L^* обозначим через $\{\,,\}$. Рассмотрим Z_2-градуированное пространство $J_1=A_1+M_1$, где $A_1=L^*$, $M_1=\overline{L^*}+F\overline{e}$ и $\overline{L^*}$ — изоморфная копия L^*. Превратим пространство J_1 в алгебру, задав все ненулевые произведения в J_1 условиями

$$l\cdot\overline{e}=\overline{e}\cdot l=\overline{l},\quad \overline{l}_1\cdot\overline{l}_2=\{l_1,l_2\},$$

где $l,l_1,l_2\in L^*$. Нетрудно проверить (см. также [9]), что J_1 — йорданова супералгебра.

Рассмотрим дуальную алгебру $J^*=A^*+M^*$ коалгебры $(A+M,\Delta)$. Ясно, что $A^*=L^*$, а $M^*=\overline{L}^*+F\overline{1}^*$. Ввиду определения коумножения Δ все ненулевые произведения в J^* определяются равенствами

$$l^*\cdot\overline{1}^*=\overline{1}^*\cdot l^*=\overline{l}^*,\quad \overline{l}_1^*\cdot\overline{l}_2^*=\{l_1^*,l_2^*\},$$

где $l^*,l_1^*,l_2^*\in L^*$, $\overline{l}^*,\overline{l}_1^*,\overline{l}_2^*\in\overline{L}^*$ и $\overline{l}^*(\overline{x})=l^*(x)$ для любого $x\in L$.

Как легко видеть, супералгебры J_1 и J^* изоморфны. Поэтому пара $(A+M,\Delta)$ — йорданова суперкоалгебра.

Пусть B — подкоалгебра в $(A+M,\Delta)$, порожденная элементом $\bar{x}_1$. Тогда бесконечная последовательность линейно независимых элементов $\bar{x}_1,x_1,\bar{x}_2,x_2,\bar{x}_3,x_3,\dots$ содержится в B. Следовательно, B не является конечномерной подкоалгеброй.

Таким образом, йорданова суперкоалгебра $(A+M,\Delta)$ не будет локально конечномерной.

§ 3. Слабо внутренние дифференцирования

В этом параграфе мы определим понятие слабо внутреннего дифференцирования дуальной алгебры йордановой суперкоалгебры и покажем, что в случае йордановых алгебр это понятие совпадает с определением слабо внутреннего дифференцирования, введенным в работе [3].

Напомним понятие слабо внутреннего дифференцирования для случая йордановых коалгебр.

Дифференцирование d дуальной алгебры J^* йордановой коалгебры (J,Δ) называется *слабо внутренним*, если для любой конечномерной подкоалгебры B из (J,Δ) найдется такое внутреннее дифференцирование i, что для любых $f\in J^*$ и $b\in B$ выполняется равенство $f^{\mathrm{d}}(b)=f^{\mathrm{i}}(b)$.

Предложение 3. *Пусть* (J,Δ) — *йорданова коалгебра. Тогда дифференцирование* d *является слабо внутренним в том и только в том случае, когда для любого конечномерного подпространства* V *из* (J,Δ) *найдется такое внутреннее дифференцирование* i*, что для любых* $f\in J^*$ *и* $v\in V$ *выполняется равенство* $f^{\mathrm{d}}(v)=f^{\mathrm{i}}(v)$.

Доказательство. Если дифференцирование d удовлетворяет заключению данного предложения, то оно слабо внутреннее. Пусть d — слабо внутреннее дифференцирование и V — конечномерное подпространство из J. Поскольку йорданова коалгебра (J,Δ) локально конечномерна, то V содержится в конечномерной подкоалгебре B из (J,Δ). Поэтому найдется внутреннее дифференцирование i такое, что $f^{\mathrm{d}}(b)=f^{\mathrm{i}}(b)$ для любых $f\in J^*$ и $b\in B$. Но тогда последнее равенство имеет место для всех $v\in V$.

Пусть теперь (J,Δ) — йорданова суперкоалгебра, J^* — ее дуальная алгебра. Если не оговорено противное, то подпространство из J будет означать Z_2-градуированное подпространство, а под дифференцированиями супералгебры J^* будем понимать четные или нечетные дифференцирования.

Определение. Дифференцирование d супералгебры J^* будем называть *слабо внутренним*, если для любого конечномерного подпространства V из (J,Δ) найдется такое дифференцирование i из $\mathrm{Inder}(J^*)_0\cup\mathrm{Inder}(J^*)_1$ той же четности, что и d, что для любых $f\in J^*$ и $v\in V$ выполняется равенство $f^{\mathrm{d}}(v)=f^{\mathrm{i}}(v)$.

Обозначим через $\mathrm{Wider}(J^*)$ подпространство в $\mathrm{End}(J^*)$ всех слабо внутренних дифференцирований супералгебры J^*. Очевидно, что $\mathrm{Inder}(J^*)\subseteq\mathrm{Wider}(J^*)$.

Предложение 4. *Пусть (J,Δ) — йорданова суперкоалгебра. Тогда каждое дифференцирование d из $\mathrm{Wider}(J^*)$ можно продолжить до дифференцирования D супералгебры $\mathrm{D}(J)$, при этом четности дифференцирований d и D совпадают, и для любых однородных элементов $f\in J^*$ и $a\in J$ справедливо равенство $f^d(a)=-(-1)^{p(a)p(d)}f(a^D)$. Если дифференцирование d внутреннее, то дифференцирование D также внутреннее. Если V — конечномерное подпространство, то существует такое внутреннее дифференцирование I, продолжающее некоторое дифференцирование из $\mathrm{Inder}(J^*)$, что $v^{\mathrm{D}}=v^{\mathrm{I}}$ для любого $v\in V$. В частности, если V — подкоалгебра, то $v^D\in V$ для любого $v\in V$.*

Доказательство. Пусть x,y,z,w — однородные элементы из $\mathrm{D}(J)$. Тогда ввиду ассоциативности формы Q получаем

$$\begin{aligned}Q(xD_{y,z},w)&=Q(x(R_yR_z-(-1)^{p(y)p(z)}R_zR_y),w)\\&=Q(x,y(zw)-(-1)^{p(y)p(z)}z(yw))=Q(x,(-1)^{p(y)p(z)+p(z)p(w)+p(y)p(w)}(wz)y\\&\qquad-(-1)^{2p(y)p(z)+p(z)p(w)+p(y)p(w)}(wy)z)\\&=-(-1)^{p(z)p(w)+p(y)p(w)}Q(x,w(R_yR_z-(-1)^{p(y)p(z)}R_zR_y))\\&=-(-1)^{p(z)p(w)+p(y)p(w)}Q(x,wD_{y,z}).\end{aligned}$$

Пусть сначала d — внутреннее дифференцирование супералгебры J^*. Тогда $\mathrm{d}=\sum\limits_i D_{f_i,g_i}$ для некоторых однородных элементов $f_i,g_i\in J^*$. В этом случае для элементов $f\in J^*$ и $a\in J$ положим $f^{\mathrm{D}}=\sum\limits_i f[R_{f_i},R_{g_i}]$ и $a^{\mathrm{D}}=\sum\limits_i a[R_{f_i},R_{g_i}]$, где R_{f_i}, R_{g_i} — операторы правых умножений в супералгебре $\mathrm{D}(J)$, а $[R_{f_i},R_{g_i}]$ — суперкоммутатор в супералгебре $\mathrm{End}(\mathrm{D}(J))^{(-)}$. Нетрудно видеть, что $p(\mathrm{d})=\sum\limits_i p(f_i)+p(g_i)\,(\mathrm{mod}\,2)$. Поскольку J^* — подалгебра в $\mathrm{D}(J)$, то $f^{\mathrm{D}}=f^{\mathrm{d}}$. Ясно, что $a^{\mathrm{D}}\in J$. Если a — однородный элемент из J, то в силу доказанного выше $Q(f^{\mathrm{d}},a)=-(-1)^{p(a)p(\mathrm{d})}Q(f,a^{\mathrm{D}})$. Как легко видеть, D является внутренним дифференцированием супералгебры $\mathrm{D}(J)$, и его четность совпадает с четностью d.

Пусть теперь d — произвольное дифференцирование из $\mathrm{Wider}(J^*)$. Для элемента $f\in J^*$ положим $f^{\mathrm{D}}=f^{\mathrm{d}}$. Предположим, что a — произвольный однородный элемент J. Пусть V — конечномерное подпространство в J, содержащее a. Тогда существует $\mathrm{i}\in\mathrm{Inder}(J^*)_0\cup\mathrm{Inder}(J^*)_1$ такое, что $f^{\mathrm{d}}(v)=f^{\mathrm{i}}(v)$

для любых $f \in J^*$ и $v \in V$. Дифференцирование i имеет ту же четность, что и d. В силу доказанного выше дифференцирование i можно продолжить до дифференцирования I супералгебры $\mathrm{D}(J)$. Положим $a^{\mathrm{D}} = a^{\mathrm{I}}$. Отображение D не зависит от выбора подпространства V. Действительно, пусть V_1 — другое конечномерное подпространство в J, содержащее a. Существует $\mathrm{i}_1 \in \mathrm{Inder}(J^*)$ такое, что $f^{\mathrm{d}}(v) = f^{\mathrm{i}_1}(v)$ для любых $f \in J^*$ и $v \in V_1$. Поэтому $f^{\mathrm{d}}(a) = f^{\mathrm{i}_1}(a)$ для любого $f \in J^*$. Продолжим дифференцирование i_1 до дифференцирования I_1 супералгебры $\mathrm{D}(J)$. Так как $Q(f^{\mathrm{i}}, b) = -(-1)^{p(b)p(\mathrm{d})}Q(f, b^{\mathrm{I}})$ и $Q(f^{\mathrm{i}_1}, b) = -(-1)^{p(b)p(\mathrm{d})}Q(f, b^{\mathrm{I}_1})$ для любого $f \in J^*$ и любого однородного $b \in J$, то

$$(-1)^{p(a)p(\mathrm{I}-I_1)}Q(f, a^{\mathrm{I}-I_1}) = -Q(f^{\mathrm{I}-I_1}, a) = -Q(f^{i-i_1}, a) = -f^{\mathrm{d}}(a) + f^{\mathrm{d}}(a) = 0,$$

т. е. $a^{\mathrm{I}_1} = a^{\mathrm{I}}$.

Дифференцирование D обладает всеми свойствами, перечисленными в данном предложении.

Лемма 1. *Пусть (J, Δ) — йорданова суперкоалгебра. Тогда* $\mathrm{Wider}(J^*)$ *является супералгеброй Ли в* $\mathrm{End}(J^*)^{(-)}$.

Доказательство. Пусть элементы d_1 и d_2 принадлежат $\mathrm{Wider}(J^*)$. В силу определения $\mathrm{Wider}(J^*)$ для любого конечномерного подпространства V из J существуют такие i_1 и i_2 из $\mathrm{Inder}(J^*)$, что для любых $f \in J^*$ и $v \in V$ имеем $f^{\mathrm{d}_1}(v) = f^{\mathrm{i}_1}(v)$ и $f^{\mathrm{d}_2}(v) = f^{\mathrm{i}_2}(v)$. По предложению 3 $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2$ можно продолжить до внутренних дифференцирований $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$ супералгебры $\mathrm{D}(J)$. Пусть V^{I_1}, V^{I_2} — образы пространства V относительно I_1, I_2 и $V_0 = V + V^{\mathrm{I}_1} + V^{\mathrm{I}_2}$. Тогда пространство V_0 конечномерно и поэтому существуют такие i_1' и i_2' из $\mathrm{Inder}(J^*)$, что $f^{\mathrm{d}_1}(v) = f^{\mathrm{i}_1'}(v)$, $f^{\mathrm{d}_2}(v) = f^{\mathrm{i}_2'}(v)$ для любых $f \in J^*$ и $v \in V_0$. Дифференцирования i_1' и i_2' можно продолжить до дифференцирований I_1' и I_2', причем для элементов $v \in V$ имеем $v^{\mathrm{I}_1} = v^{\mathrm{I}_1'}$ и $v^{\mathrm{I}_2} = v^{\mathrm{I}_2'}$. Отсюда для любого $f \in J^*$ и любого однородного $v \in V$, положив $\varepsilon = (-1)^{p(\mathrm{d}_2)p(v)+p(\mathrm{d}_1)p(v)}$, получаем

$$\begin{aligned} f^{\mathrm{d}_1 d_2}(v) = -(-1)^{p(\mathrm{d}_2)p(v)}f^{\mathrm{d}_1}(v^{\mathrm{I}_2}) = \varepsilon f(v^{\mathrm{I}_2 I'_1}) = \varepsilon f(v^{\mathrm{I}_2' I'_1}) \\ = (-1)^{\mathrm{p}(d_1)p(d_2)}\varepsilon f(v^{\mathrm{I}_1' I_2'}) + \varepsilon f(v^{[\mathrm{I}_2', I'_1]}). \end{aligned}$$

Ясно, что внутреннее дифференцирование $[\mathrm{I}_2', I'_1]$ — продолжение $[\mathrm{i}_2', i'_1]$. Поскольку $v^{\mathrm{I}_1} = v^{\mathrm{I}_1'}$, по предложению 3

$$\begin{aligned} f(v^{\mathrm{I}_1' I_2'}) = f(v^{\mathrm{I}_1 I_2'}) = -(-1)^{p(\mathrm{d}_2)p(v)}f^{\mathrm{i}_2'}(v^{\mathrm{I}_1}) \\ = -(-1)^{p(\mathrm{d}_2)p(v)}f^{\mathrm{d}_2}(v^{\mathrm{I}_1}) = \varepsilon f^{\mathrm{d}_2 i_1}(v) = \varepsilon f^{\mathrm{d}_2 d_1}(v). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f^{\mathrm{d}_1 d_2}(v) = (-1)^{\mathrm{p}(d_1)p(d_2)}f^{\mathrm{d}_2 d_1}(v) - f^{[\mathrm{i}_2', i_1']}(v)$$

для любых $f \in J^*$ и $v \in V$.

Так как $[\mathrm{i}_2', i'_1] \in \mathrm{Inder}(J^*)$, суперкоммутатор $\mathrm{d}_1 d_2 - (-1)^{\mathrm{p}(d_1)p(d_2)}d_2' d_1$ является слабо внутренним дифференцированием супералгебры J^*. Таким образом, $\mathrm{Wider}(J^*)$ является супералгеброй Ли в $\mathrm{End}(J^*)^{(-)}$.

В силу предложений 3 и 4 можно считать, что $\mathrm{Wider}(J^*)$ — супералгебра Ли дифференцирований йордановой супералгебры $\mathrm{D}(J)$. Ввиду теоремы 1 и предложения 1 дифференцирования из $D_{A^*,M} + D_{M^*,A}$ четные, а дифференцирования из $D_{A^*,A} + D_{M^*,M}$ нечетные и $D_{J^*,J} = D_{A^*,M} + D_{M^*,A} + D_{A^*,A} + D_{M^*,M}$.

Ясно, что пространство $\mathrm{Wider}(J^*) + D_{J^*,J}$ дифференцирований $\mathrm{D}(J)$ содержит $\mathrm{Inder}(\mathrm{D}(J))$ и является подсупералгеброй Ли в $\mathrm{End}(\mathrm{D}(J))^{(-)}$.

В дальнейшем будем предполагать, что супералгебра J^* содержит единицу. Пусть $L(\mathrm{D}(J), \mathrm{Wider}(J^*) + D_{J^*,J})$ и $L(J^*, \mathrm{Wider}(J^*))$ — КТК-супералгебры Ли для йордановых супералгебр $\mathrm{D}(J)$ и J^*. Обозначим эти супералгебры Ли через $L(\mathrm{D}(J))$ и $L(J^*)$. Можно считать, что $L(J^*)$ — подсупералгебра в $L(\mathrm{D}(J))$. Рассмотрим идеал $L^c(J)$ супералгебры $L(\mathrm{D}(J))$, порожденный пространством J. Тогда $L^c(J) = J + R_J + D_{J^*,J} + \overline{J}$, где $\overline{J}$ — изоморфная копия пространства J, а R_J — пространство правых умножений на элементы из J в супералгебре $\mathrm{D}(J)$. Ясно, что $L(\mathrm{D}(J)) = L(J^*) \oplus L^c(J)$.

Пусть V — линейное подпространство из J. Положим $\mathrm{Ann}(V) = \{f \in J^* \mid f \cdot V = 0\}$. Поскольку V — Z_2-градуированное пространство, то $\mathrm{Ann}(V)$ — Z_2-градуированное пространство, а так как алгебра $\mathrm{D}(J)$ суперкоммутативна, то из $f \in \mathrm{Ann}(V)$ следует, что $V \cdot f = 0$. Пусть $\mathrm{Ass}(V) = \{f \in J^* \mid Q((f, J^*, J^*), V) = 0\}$. Тогда $\mathrm{Ass}(V)$ — Z_2-градуированное пространство. Ввиду суперкоммутативности алгебры J^* имеем

$$Q((J^*, J^*, \mathrm{Ass}(V)), V) = Q((J^*, \mathrm{Ass}(V), J^*), V) = 0.$$

Наконец, положим $\mathscr{Z}(V) = \mathrm{Ann}(V) \cap \mathrm{Ass}(V)$.

Предложение 5. *Пусть (J, Δ) — йорданова суперкоалгебра и V — Z_2-градуированное пространство из J. Тогда $\mathrm{Ann}(V) \subseteq V^\perp$. Если V является подкоалгеброй (J, Δ), то $\mathscr{Z}(V) = \mathrm{Ann}(V) = V^\perp$. Если V — конечномерное пространство, то пространства $\mathrm{Ann}(V), \mathrm{Ass}(V)$ и $\mathscr{Z}(V)$ имеют конечную коразмерность, а пространство $D_{J^*,V}$ является конечномерным.*

Доказательство. Так как алгебра J^* содержит единицу, для $f \in \mathrm{Ann}(V)$ и $v \in V$ имеем $Q(f, v) = Q(1, f \cdot V) = 0$. Следовательно, $\mathrm{Ann}(V) \subseteq V^\perp$. Предположим, что V — подкоалгебра и $f \in \mathrm{Ann}(V)$. Тогда $(J^*, J^*, V) \subseteq V$ и $Q((f, J^*, J^*), V) = Q(f, (J^*, J^*, V)) = 0$. Поэтому $\mathscr{Z}(V) = \mathrm{Ann}(V)$.

Поскольку ортогональное дополнение подкоалгебры является идеалом, то $Q(J^*, V^\perp \cdot V) \subseteq Q(J^* V^\perp, V) = 0$. Значит, $\mathrm{Ann}(V) = V^\perp$.

Пусть теперь V — конечномерное пространство и $e_1, \dots, e_n$ — его базис. Пусть $\Delta(e_i) = \sum_{e_i} e_{i(1)} \otimes e_{i(2)}$. Рассмотрим подпространство U, порожденное всеми элементами $e_{i(2)}$, где $i = 1, \dots, n$. Если $f \in U^\perp$, то $f \cdot e_i = \sum_{e_i} f(e_{i(2)}) e_{i(1)} = 0$. Следовательно, $f \in \mathrm{Ann}(V)$. Поскольку $U^\perp$ имеет конечную коразмерность, то и $\mathrm{Ann}(V)$ имеет конечную коразмерность. Как легко видеть, из конечномерности V следует конечномерность пространства (J^*, J^*, V). Поэтому пространство $(J^*, J^*, V)^\perp$ имеет конечную коразмерность. Очевидно, что $\mathrm{Ass}(V) = (J^*, J^*, V)^\perp$, тем самым $\mathrm{Ass}(V)$ — пространство конечной коразмерности. Но тогда $\mathscr{Z}(V)$ — пространство конечной коразмерности. Поэтому $J^* = W + \mathscr{Z}(V)$, где W — конечномерное подпространство. Поскольку $Q((J^*, \mathscr{Z}(V), J^*), V) = 0$, в силу ассоциативности формы Q получаем $Q(J^*, (\mathscr{Z}(V), J^*, V)) = 0$. Отсюда следует, что $D_{\mathscr{Z}(V),V} = 0$ и $D_{J^*,V} = D_{W,V}$ — конечномерное пространство.

Лемма 2. *Пусть (J, Δ) — йорданова суперкоалгебра. Тогда на пространстве $\mathrm{Wider}(J) + D_{J^*,J}$ можно задать такую симметрическую невырожденную билинейную форму q_L, что $q_L(\mathrm{Wider}(J), \mathrm{Wider}(J)) = q_L(D_{J^*,J}, D_{J^*,J}) = 0$ и для любых однородных $\mathrm{d} \in \mathrm{Wider}(J^*)$, $f^* \in J^*$ и $a \in J$ имеет место равенство $q_L(d, D_{f,a}) = -(-1)^{p(d)p(f)} Q(f^{\mathrm{d}}, a)$.*

Доказательство. Положим

$$q_L(\mathrm{Wider}(J^*), \mathrm{Wider}(J^*)) = 0, \quad q_L(D_{J^*,J}, D_{J^*,J}) = 0.$$

Пусть теперь $\mathrm{d} \in \mathrm{Wider}(J^*)$ и u — произвольный элемент из $D_{J^*,J}$. Если $u = \sum\limits_i D_{f_i,a_i}$, то определим форму q_L, полагая

$$q_L(u, \mathrm{d}) = q_L(\mathrm{d}, u) = -\sum_i (-1)^{p(d)p(f_i)} Q\big(f_i^{\mathrm{d}}, a_i\big).$$

Проверим, что форма q_L задана корректно. Действительно, пусть $v = \sum\limits_i D_{g_i,b_i}$ — нулевой элемент из $D_{J^*,J}$. Рассмотрим подпространство V из J, порожденное всеми элементами b_i. Тогда найдется такой элемент i из $\mathrm{Inder}(J^*)$, что $f^{\mathrm{d}}(a) = f^{\mathrm{i}}(a)$ для любых $f \in J^*$ и $a \in V$. Пусть $\mathrm{i} = \sum\limits_i D_{e_i,h_i}$, где $e_i, h_i \in J^*$. Можно считать, что g_i, b_i, e_i, h_i — однородные элементы. Тогда

$$\begin{aligned}
q_L(\mathrm{d}, v) &= -\sum_i (-1)^{p(d)p(g_i)} Q\big(g_i^{\mathrm{d}}, b_i\big) = -\sum_{i,k} (-1)^{p(d)p(g_i)} Q(g_i D_{e_k,h_k}, b_i) \\
&= -\sum_{i,k} (-1)^{p(d)p(g_i)} Q((g_i e_k)h_k - (-1)^{p(e_k)p(h_k)}(g_i h_k)e_k, b_i) \\
&= -\sum_{i,k} (-1)^{p(d)p(g_i)} Q((-1)^{p(g_i)p(e_k)}(e_k g_i)h_k - (-1)^{p(g_i)p(e_k)} e_k(g_i h_k), b_i) \\
&= -\sum_{i,k} (-1)^{p(d)p(g_i)+p(g_i)p(e_k)} Q(e_k, g_i(h_k b_i) - (g_i h_k)b_i) \\
&= -\sum_{i,k} (-1)^{p(d)p(g_i)+p(g_i)p(e_k)} Q(e_k, (-1)^{p(g_i)p(h_k)+p(g_i)p(b_i)}(h_k b_i)g_i \\
&- (-1)^{p(g_i)p(h_k)}(h_k g_i)b_i) = \sum_{i,k} (-1)^{p(d)p(g_i)+p(g_i)p(e_k)+p(g_i)p(h_k)} Q(e_k, h_k D_{g_i,b_i}).
\end{aligned}$$

Поскольку $p(d) = p(e_k) + p(h_k) (\mathrm{mod}\, 2)$, то

$$q_L(\mathrm{d}, v) = \sum_k Q\Big(e_k, h_k \sum_i D_{g_i,b_i}\Big) = 0.$$

Следовательно, форма q_L задана корректно. Легко видеть, что форма q_L невырожденна.

Предложение 6. *Пусть (J, Δ) — йорданова суперкоалгебра. Тогда существует изоморфное вложение ϕ пространства $\mathrm{Wider}(J^*)$ в пространство $(D_{J^*,J})^*$, удовлетворяющее условию $\phi(d)(D_{f,a}) = q_L(d, D_{f,a})$ для любых $d \in \mathrm{Wider}(J^*)$, $f \in J^*$, $a \in J$. Если суперкоалгебра (J, Δ) конечномерна, то ϕ является изоморфизмом.*

Доказательство. В силу леммы 2 каждый элемент d из $\mathrm{Wider}(J^*)$ определяет линейный функционал $\hat{d}$ на $D_{J^*,J}$ по правилу $\hat{d}(D_{f,a}) = q_L(d, D_{f,a})$. Следовательно, отображение $\phi : \mathrm{Wider}(J^*) \mapsto (D_{J^*,J})^*$, определенное как $\phi(\mathrm{d}) = \hat{d}$, является искомым изоморфным вложением. Если пространство J конечномерно, то ввиду невырожденности формы q_L размерности пространств $\mathrm{Wider}(J^*)$ и $D_{J^*,J}$ совпадают и поэтому ϕ является изоморфизмом.

Предложение 7. *Пусть (J,Δ) — йорданова суперкоалгебра, V — конечномерное $\mathbb{Z}_2$-градуированное подпространство, являющееся подкоалгеброй в (J,Δ). Тогда для любого функционала h, заданного на пространстве $D_{J^*,J}$ и ненулевого на $D_{J^*,V}$, найдется ненулевой элемент d из D_{J^*,J^*} такой, что $h(x)=\phi(\mathrm{d})(x)$ для любого $x\in D_{J^*,V}$.*

Доказательство. Поскольку V — конечномерная подкоалгебра, по предложению 5 $\mathscr{L}(V)=V^{\perp}$ и коразмерность $V^{\perp}$ конечна. Поэтому $J^*=B\oplus V^{\perp}$ — прямая сумма пространств, причем пространство B конечномерно. Пусть pr — проекция J^* на подпространство B относительно $V^{\perp}$. Определим на B операцию умножения $*$, полагая $f*g=\mathrm{pr}(fg)$, где $f,g\in B$. Тогда для любого $v\in V$ получаем $Q(f*g,v)=Q(fg,v)$. Так как $V^{\perp}$ — идеал супералгебры J^*, пара (V,Δ) — йорданова суперкоалгебра с дуальной алгеброй $(B,*)$.

Рассмотрим йорданову супералгебру $\mathrm{D}(V)$. Умножение в алгебре $\mathrm{D}(V)$ будем обозначать также через $*$. Для однородных элементов $a,b\in \mathrm{D}(V)$ через $G_{a,b}$ обозначим внутреннее дифференцирование супералгебры $\mathrm{D}(V)$. Если X,Y — подпространства однородных элементов из $\mathrm{D}(V)$, то $G_{X,Y}$ — пространство операторов вида $G_{x,y}$, где $x\in X$, $y\in Y$. Ясно, что $\mathrm{D}(V)$ — подпространство в $\mathrm{D}(J)$. Как легко видеть, $f*v=f\cdot v$ и $v*f=v\cdot f$ для любых элементов $f\in B$, $v\in V$.

Пусть $f\in B$ и $v\in V$ и g — однородный элемент из B. Тогда $gG_{f,v}=gD_{f,v}$. Действительно,

$$\begin{aligned} gG_{f,v}&=(-1)^{p(g)p(f)}((f*g)*v-f*(g*v))\\ &=(-1)^{p(g)p(f)}\Big(\sum_v v_{(1)}Q(f*g,v_{(2)})-f\cdot(g\cdot v)\Big)\\ &=(-1)^{p(g)p(f)}((fg)\cdot v-f\cdot(g\cdot v))=gD_{f,v}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом предложения 5 получаем, что для элементов $f_1,\dots,f_n\in B$, $v_1,\dots,v_n\in V$ равенство $\sum\limits_i G_{f_i,v_i}=0$ выполняется тогда, и только тогда, когда $\sum\limits_i D_{f_i,v_i}=0$. В таком случае пространства $G_{B,V}$ и $D_{B,V}$ изоморфны. Поэтому ввиду предложения 6 можно считать, что $G_{B,B}$ является пространством всех линейных функционалов, заданных на пространстве $D_{B,V}$. При этом для любых элементов $\mathrm{d}\in G_{B,B}$, $f\in B$ и $v\in V$ выполняется равенство $\mathrm{d}(D_{f,v})=-(-1)^{p(d)p(f)}f^{\mathrm{d}}(v)$.

Пусть $f,a,b\in B$ и $v\in V$. Тогда $(fG_{a,b})(v)=(-1)^{p(a)p(f)}(a,f,b)(v)$ и $(a,f,b)(v)=-a((f,b,v))$, где (a,f,b) и (f,b,v) — ассоциаторы в алгебре $\mathrm{D}(V)$, а по доказанному выше $(f,b,v)=(fb)\cdot v-f\cdot(b\cdot v)$. Следовательно,

$$(fG_{a,b})(v)=-(-1)^{p(a)p(f)}a((fb)\cdot v-f\cdot(b\cdot v))=(fD_{a,b})(v).$$

Пусть h — функционал, заданный на пространстве $D_{J^*,J}$, которой не равен нулю на $D_{J^*,V}$. В силу определения $\mathscr{L}(V)$ и предложения 5 получаем, что $D_{J^*,V}=D_{B,V}$. Тогда ограничение h на пространстве $D_{J^*,V}$ имеет вид $\sum\limits_i G_{a_i,b_i}$, где $a_i,b_i\in B$. Рассмотрим дифференцирование $\mathrm{d}=\sum\limits_i D_{a_i,b_i}$. По предыдущему будет

$$\Big(f\sum_i G_{a_i,b_i}\Big)(v)=\Big(f\sum_i D_{a_i,b_i}\Big)(v)$$

для любых элементов $f\in B$ и $v\in V$. Поэтому $h(x)=\phi(\mathrm{d})(x)$ для любого $x\in D_{J^*,V}$.

Лемма 3. *Пусть (J,Δ) — йорданова суперкоалгебра. Тогда существует изоморфизм ϕ между пространством* $\mathrm{Wider}(J^*)$ *и пространством всех линейных функционалов, заданных на пространстве $D_{J^*,J}$, такой, что $\phi(d)(D_{f,a}) = q_L(d, D_{f,a})$ для любых $d \in \mathrm{Wider}(J^*)$, $f \in J^*$, $a \in J$.*

Доказательство. В силу предложения 6 существует такое изоморфное вложение $\phi : \mathrm{Wider}(J^*) \mapsto (D_{J^*,J})^*$, что $\phi(\mathrm{d})(D_{f,a}) = q_L(\mathrm{d}, D_{f,a})$. Покажем, что ϕ отображает $\mathrm{Wider}(J^*)$ на все пространство $(D_{J^*,J})^*$.

Пусть $\hat{\mathrm{d}}$ — линейный функционал, заданный на пространстве $D_{J^*,J}$. Поскольку $D_{J^*,J}$ — Z_2-градуированное пространство, будем предполагать, что функционал $\hat{\mathrm{d}}$ определен на однородной компоненте пространства $D_{J^*,J}$. Зададим отображение $\mathrm{d} : J^* \mapsto J^*$, положив $p(\mathrm{d}) = p(\hat{\mathrm{d}}) + 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)$ и $f^{\mathrm{d}}(a) = (-1)^{p(f)p(\mathrm{d})}\hat{\mathrm{d}}(D_{f,a})$. Докажем, что d — слабо внутреннее дифференцирование. Поскольку для однородного элемента $g \in J^*$ справедливо равенство $p(g^{\mathrm{d}}) = p(g) + p(\mathrm{d}) (\mathrm{mod}\, 2)$, в силу определения отображения d и равенства (4) имеем

$$\begin{aligned}(fg)^{\mathrm{d}}(a) &= (-1)^{(p(f)+p(g))p(\mathrm{d})}\hat{\mathrm{d}}(D_{fg,a})\\ &= (-1)^{(p(f)+p(g))p(\mathrm{d})}\hat{\mathrm{d}}(D_{f,ga} + (-1)^{p(f)p(g)}D_{g,fa})\\ &= (-1)^{p(g)p(\mathrm{d})}f^{\mathrm{d}}(g\cdot a) + (-1)^{p(f)p(\mathrm{d})+p(f)p(g)}g^{\mathrm{d}}(f\cdot a) = ((-1)^{p(g)p(\mathrm{d})}f^{\mathrm{d}}g + fg^{\mathrm{d}})(a).\end{aligned}$$

Следовательно, d является дифференцированием супералгебры J^*. Пусть V — конечномерное подпространство из J такое, что $\mathrm{d}(J^*) \not\subseteq V^{\perp}$, и $U = D_{J^*,V}$. Тогда $\hat{\mathrm{d}}(U) \neq 0$.

Предположим, что $(J^*, J^*, J^*) \subseteq V^{\perp}$. Рассмотрим подпространство $V_0 = V + V\cdot J^*$. Ясно, что пространство V_0 конечномерно. Так как супералгебра $\mathrm{D}(J)$ суперкоммутативна, пространство V_0 является J^*-супербимодулем. Поэтому V_0 — конечномерная подкоалгебра в J. Отсюда и из предложения 6 получаем, что существует такое внутреннее дифференцирование i супералгебры J^*, что $\hat{\mathrm{d}}(x) = \phi(\mathrm{i})(x)$ для любого $x \in D_{J^*,V_0}$. Поэтому $\hat{\mathrm{d}}(D_{f,v}) = \phi(\mathrm{i})(D_{f,v})$ для любых $f \in J^*$ и $v \in V$. Следовательно, $f^{\mathrm{d}}(v) = f^{\mathrm{i}}(v)$ для любых $f \in J^*$ и $v \in V$.

Пусть теперь $(J^*, J^*, J^*) \not\subseteq V^{\perp}$. Тогда по лемме 2 получаем

$$q_L(\mathrm{Inder}(J^*), D_{J^*,V}) \neq 0, \quad q_L(\mathrm{Wider}(J^*), D_{J^*,V}) \neq 0.$$

Ввиду предложения 5 пространство $D_{J^*,V}$ конечномерно. Поэтому $\mathrm{Wider}(J^*) = C + W$, где W — ортогональное дополнение $D_{J^*,V}$ относительно формы q_L в пространстве $\mathrm{Wider}(J^*)$. Поскольку q_L — невырожденная форма, в силу предложения 6 $\phi(C)$ является пространством линейных функционалов, заданных на $D_{J^*,V}$. Следовательно, найдется слабо внутреннее дифференцирование d_0 супералгебры J^* такое, что $\hat{\mathrm{d}}(x) = \phi(\mathrm{d}_0)(x)$ для любого $x \in D_{J^*,V}$. Отсюда получаем, что $f^{\mathrm{d}}(v) = f^{\mathrm{d}_0}(v)$ для любых $f \in J^*$ и $v \in V$. Так как V — конечномерное пространство, существует внутреннее дифференцирование i супералгебры J^* такое, что $f^{\mathrm{d}}(v) = f^{\mathrm{d}_0}(v) = f^{\mathrm{i}}(v)$ для любых $f \in J^*$ и $v \in V$.

Таким образом, d — слабо внутреннее дифференцирование.

Рассмотрим супералгебру $L(\mathrm{D}(J))$. Определим на $L(\mathrm{D}(J))$ билинейную форму Q_L. Пусть $l_1 = f + R_g + \mathrm{d} + \overline{h}$ — произвольный элемент из $L(J^*)$ и $l_2 = a + R_b + D_{e,d} + \bar{n}$ — произвольный элемент из $L^c(J)$. Положим $Q_L(L(J^*), L(J^*)) = Q_L(L^c(J), L^c(J)) = 0$ и $Q_L(l_1, l_2) = (f, n) - Q(g, b) - q_L(\mathrm{d}, D_{e,d}) + Q(h, a)$. Как нетрудно видеть, форма Q_L является симметрической.

Лемма 4. *Для любых элементов l_1, l_2, l_3 супералгебры $L(\mathrm{D}(J))$ имеет место равенство $Q_L([l_1, l_2], l_3) = Q_L(l_1, [l_2, l_3])$, т. е. Q_L является ассоциативной формой.*

Доказательство. Достаточно проверить это равенство в случае, когда $l_1, l_2 \in L(J^*)$ и $l_3 \in L^c(J)$.

Пусть $l_1 = f_1 + R_{g_1} + \mathrm{d}_1 + \overline{h_1}$, $l_2 = f_2 + R_{g_2} + \mathrm{d}_2 + \overline{h_2}$ и $l_3 = a + R_b + D_{f,c} + \bar{n}$, где все элементы однородные. Тогда

$$\begin{aligned}[l_1, l_2] = f_1 g_2 + f_1^{\mathrm{d}_2} - (-1)^{p(g_1)p(f_2)} f_2 g_1 - (-1)^{p(\mathrm{d}_1)p(f_2)} f_2^{\mathrm{d}_1} \\ + R_{g_1^{\mathrm{d}_2}} - (-1)^{p(\mathrm{d}_1)p(g_2)} R_{g_2^{\mathrm{d}_1}} + R_{f_1 h_2} + (-1)^{p(h_1)p(f_2)} R_{f_2 h_1} + D_{g_1, g_2} \\ - D_{f_1, h_2} - (-1)^{p(h_1)p(f_2)} D_{f_2, h_1} + [\mathrm{d}_1, d_2] - \overline{h_1 g_2} + \overline{h_1^{\mathrm{d}_2}} \\ + (-1)^{p(g_1)p(h_2)} \overline{h_2 g_1} - (-1)^{p(\mathrm{d}_1)p(h_2)} \overline{h_2^{\mathrm{d}_1}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[l_2, l_3] = f_2 b + f_2 D_{f,c} - (-1)^{p(g_2)p(a)} a g_2 - (-1)^{p(\mathrm{d}_2)p(a)} a^{\mathrm{d}_2} \\ + R_{g_2 D_{f,c}} - (-1)^{p(\mathrm{d}_2)p(b)} R_{b^{\mathrm{d}_2}} + R_{f_2 n} - (-1)^{p(h_2)p(a)} R_{a h_2} - D_{h_2, a} - D_{f_2, n} + D_{g_2, b} \\ + [\mathrm{d}_2, D_{f,c}] - \overline{h_2 b} + \overline{h_2 D_{f,c}} + (-1)^{p(g_2)p(n)} \overline{n g_2} - (-1)^{p(\mathrm{d}_2)p(n)} \overline{n^{\mathrm{d}_2}}.\end{aligned}$$

Поэтому, с одной стороны,

$$\begin{aligned}Q_L([l_1, l_2], a) = -Q_L(h_1 g_2, a) + Q\big(h_1^{\mathrm{d}_2}, a\big) \\ + (-1)^{p(g_1)p(h_2)} Q(h_2 g_1, a) - (-1)^{p(\mathrm{d}_1)p(h_2)} Q\big(h_2^{\mathrm{d}_1}, a\big).\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}Q_L(l_1, [l_2, a]) = (-1)^{p(h_2)p(a)} Q(g_1, a h_2) \\ + q_L(\mathrm{d}_1, D_{h_2, a}) - (-1)^{p(g_2)p(a)} Q(h_1, a g_2) - (-1)^{p(\mathrm{d}_2)p(a)} Q(h_1, a^{\mathrm{d}_2}).\end{aligned}$$

В силу суперкоммутативности алгебры $\mathrm{D}(J)$ и ассоциативности формы Q получаем

$$(-1)^{p(g_1)p(h_2)} Q(h_2 g_1, a) = Q(g_1 h_2, a) = (-1)^{p(h_2)p(a)} Q(g_1, a h_2)$$

и

$$(-1)^{p(g_2)p(a)} Q(h_1, a g_2) = Q_L(h_1 g_2, a).$$

По предложению 4 и лемме 2 имеем

$$Q\big(h_1^{\mathrm{d}_2}, a\big) = -(-1)^{p(\mathrm{d}_2)p(a)} Q(h_1, a^{\mathrm{d}_2}), \quad q_L(\mathrm{d}_1, D_{h_2, a}) = -(-1)^{p(\mathrm{d}_1)p(h_2)} Q\big(h_2^{\mathrm{d}_1}, a\big).$$

Отсюда следует, что $Q_L([l_1, l_2], a) = Q_L(l_1, [l_2, a])$.

Аналогичным образом выводим $Q_L([l_1, l_2], \bar{n}) = Q_L(l_1, [l_2, \bar{n}])$.

Так как

$$\begin{aligned}Q_L([l_1, l_2], R_b + D_{f,c}) = Q\big(-g_1^{\mathrm{d}_2} + (-1)^{p(\mathrm{d}_1)p(g_2)} g_2^{\mathrm{d}_1} - f_1 h_2 - (-1)^{p(h_1)p(f_2)} f_2 h_1, b\big) \\ + q_L(-D_{g_1, g_2} + D_{f_1, h_2} + (-1)^{p(h_1)p(f_2)} D_{f_2, h_1} - [\mathrm{d}_1, d_2], D_{f,c}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_L(l_1, [l_2, R_b + D_{f,c}]) = Q(f_1, -h_2 b + h_2 D_{f,c}) + Q(g_1, -g_2 D_{f,c} \\ + (-1)^{p(\mathrm{d}_2)p(b)} b^{\mathrm{d}_2}) + q_L(\mathrm{d}_1, -D_{f_2, b} - [\mathrm{d}_2, D_{f,c}]) + Q(h_1, f_2 b + f_2 D_{f,c}),\end{aligned}$$

ввиду ассоциативности формы Q, предложения 4 и леммы 2 получаем равенство $Q_L([l_1, l_2], R_b + D_{f,c}) = Q_L(l_1, [l_2, R_b + D_{f,c}])$.

Таким образом, равенство $Q_L([l_1, l_2], l_3) = Q_L(l_1, [l_2, l_3])$ доказано.

Из лемм 3 и 4 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Пусть (J,Δ) — йорданова суперкоалгебра с коединицей и J^* — ее дуальная алгебра. Тогда $L(J^*)$ является пространством всех линейных функционалов, заданных на пространстве $L^c(J)$. При этом значение функционала f на элементе l из $L^c(J)$ определяется равенством $f(l)=Q_L(f,l)$.*

§ 4. Определение коумножения на пространстве $L^c(J)$

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема 2. *Пусть (J,Δ) — йорданова суперкоалгебра с коединицей и J^* — ее дуальная алгебра. Тогда на пространстве $L^c(J)$ можно задать такое коумножение Δ_L, что пара $(L^c(J),\Delta_L)$ — суперкоалгебра Ли с дуальной супералгеброй Ли $L(J^*)$.*

Сначала докажем, что справедлива следующая

Лемма 5. *Для любого элемента $v\in L^c(J)$ подпространство $[v,L(J^*)]$ пространства $L(\mathrm{D}(J))$ имеет конечную размерность.*

Доказательство. Достаточно доказать данную лемму в случае, когда элемент v принадлежит множеству $J\cup(R_J+D_{J^*,J})\cup\overline{J}$.

Пусть $a\in J$ и $\Delta(a)=\sum\limits_a a_{(1)}\otimes a_{(2)}$. Тогда в алгебре $\mathrm{D}(J)$ имеют место включения

$$aJ^*\subseteq a\cdot J^*\subseteq\sum_a Q_L(J^*,a_{(1)})a_{(2)}\subseteq\sum_a Fa_{(2)},$$

$$(J^*,a,J^*)\subseteq(J^*a)J^*-J^*(aJ^*)\subseteq\sum_a Fa_{(1)(2)}+Fa_{(2)(2)}.$$

Следовательно, $a\cdot J^*$ и (J^*,a,J^*) — конечномерные пространства. Аналогично (J^*,J^*,a) является конечномерным пространством.

Если d — произвольный элемент из $\mathrm{Wider}(J^*)$, то в силу предложения 4 получаем, что $a^{\mathrm{d}}\in(J^*,a,J^*)$.

Пусть теперь $v\in J$. Тогда в алгебре $L(\mathrm{D}(J))$ имеет место включение

$$[v,L(J^*)]\subseteq vJ^*+[v,\mathrm{Wider}(J^*)]+D_{J^*,v}.$$

По доказанному выше в силу предложения 5 пространство $[v,L(J^*)]$ конечномерно.

Аналогично если $v\in\overline{J}$, то $[v,L(J^*)]$ — конечномерное пространство.

Пусть теперь $v=R_a+D_{e,b}$ — элемент из $R_J+D_{J^*,J}$. Тогда

$$[v,L(J^*)]\subseteq aJ^*+J^*D_{J^*,b}+D_{J^*,a}+[\mathrm{Wider}(J^*),D_{e,b}]+\overline{aJ^*}+\overline{J^*D_{J^*,b}}.$$

Так как $L(\mathrm{D}(J))$ — супералгебра Ли, имеем

$$\begin{aligned}[\mathrm{Wider}(J^*),D_{e,b}]&=[\mathrm{Wider}(J^*),[R_e,R_b]]\\&\subseteq[[R_e,\mathrm{Wider}(J^*)],R_b]+[R_e,[R_b,\mathrm{Wider}(J^*)]]\subseteq D_{J^*,b}+D_{J^*,(J^*,b,J^*)}.\end{aligned}$$

По предложению 5 получаем, что $D_{J^*,a}$, $D_{J^*,b}$ и $D_{J^*,(J^*,b,J^*)}$ — конечномерные пространства. Поэтому $D_{J^*,a}+[\mathrm{Wider}(J^*),D_{e,b}]$ — конечномерное пространство. Так как $J^*D_{J^*,b}\subseteq(J^*,J^*,b)$, пространство $[v,L(J^*)]$ конечномерно.

Доказательство теоремы 2. Пусть v — произвольный однородный элемент из $L^c(J)$ и $V=Fv+[v,L(J^*)]$. Ввиду суперантикоммутативности алгебры $L(\mathrm{D}(J))$ будет $[L(J^*),v]\subseteq V$. По лемме 5 пространство V конечномерно. Пусть

$\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис пространства V и $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ — его дуальной базис в пространстве $L(J^*)$. Тогда $L(J^*) = B + V^{\perp}$, где B — подпространство, порожденное элементами $e_1^*, \dots, e_n^*$.

Рассмотрим теперь отображение $m^* : L(J^*)^* \mapsto ((L(J^*) \otimes L(J^*))^*$, сопряженное к умножению в супералгебре $L(J^*)$, и вложение $\rho : L(J^*)^* \otimes L(J^*)^* \mapsto ((L(J^*) \otimes L(J^*))^*$. Ввиду следствия 1 имеем $m^*(u)(f \otimes g) = Q_L([f, g], u)$ для любых $f, g \in L(J^*)$ и $u \in L^c(J)$. Покажем, что $m^*(v) \in \rho(V \otimes V)$. Действительно, положим

$$w = \rho\Big(\sum_{ij} Q_L\big([e_i^*, e_j^*], v\big) e_i \otimes e_j\Big).$$

Тогда

$$m^*(v)\big(e_k^* \otimes e_l^*\big) = Q_L\big([e_k^*, e_l^*], v\big) = w\big(e_k^* \otimes e_l^*\big).$$

Следовательно, $m^*(v)(f \otimes g) = w(f \otimes g)$ для любых элементов $f, g \in B$. Если теперь f, g — произвольные элементы из $L(J^*)$, то $f = f_1 + l_1$ и $g = g_1 + l_2$, где $f_1, g_1 \in B$, $l_1, l_2 \in V^{\perp}$. Отсюда

$$\begin{aligned} w(f \otimes g) &= w(f_1 \otimes g_1) \\ &\quad + \rho\Big(\sum_{ij} Q_L\big([e_i^*, e_j^*], v\big) e_i \otimes e_j\Big)(l_1 \otimes g_1 + f_1 \otimes l_2 + l_1 \otimes l_2) = w(f_1 \otimes g_1) \end{aligned}$$

и в силу леммы 4

$$\begin{aligned} &m^*(v)(f \otimes g) = Q_L([f, g], v] \\ &= Q_L([f_1, g_1], v) + Q_L(l_1, [g_1, v]) + Q_L(l_2, [v, f_1]) + Q_L(l_1, [l_2, v]) = m^*(v)(f_1 \otimes g_1). \end{aligned}$$

Поэтому $m^*(v)(f \otimes g) = w(f \otimes g)$ для любых элементов $f, g \in L(J^*)$. Таким образом, $m^*(v) \in \rho(V \otimes V)$.

Определим теперь коумножение Δ_L на пространстве $L^c(J)$. На однородном элементе v положим $\Delta_L(v) = \rho^{-1} m^*(v)$. Поскольку ρ — инъективное отображение, то Δ_L задано корректно и по предыдущему $\Delta_L(v) \in V \otimes V \subseteq L^c(J) \otimes L^c(J)$. В силу линейности отображений m^* и ρ можно считать, что Δ_L задано на всем пространстве $L^c(J)$.

Пусть v — произвольный элемент из $L^c(J)$ и $\Delta_L(v) = \sum_v v_{(1)} \otimes v_{(2)}$. Тогда для любых $f, g \in L(J^*)$ получаем

$$[f, g](v) = Q_L([f, g], v) = m^*(v)(f \otimes g) = \rho(\Delta_L(v))(f \otimes g) = \sum_v f(v_{(1)}) g(v_{(2)}).$$

Таким образом, пара $(L^c(J), \Delta_L)$ — суперкоалгебра Ли с дуальной супералгеброй $L(J^*)$.

§ 5. Функтор $(\ )^0$ и КТК-конструкция для йордановых коалгебр

Пусть J — йорданова F-алгебра. Обозначим через $CF(J)$ множество идеалов алгебры J конечной коразмерности.

Определение. Дифференцирование d алгебры J называем *проконечным*, если для любого идеала I из $CF(J)$ найдется такое дифференцирование i из $\mathrm{Inder}(J)$, что для любого элемента $a \in J$ имеет место включение $a^{\mathrm{d}} - a^{\mathrm{i}} \in I$.

Через $\mathrm{Der}_{CF}(J)$ обозначим линейное пространство проконечных дифференцирований алгебры J. Ясно, что $\mathrm{Inder}(J) \subseteq \mathrm{Der}_{CF}(J)$.

Предложение 8. *Для любого дифференцирования* $\mathrm{d} \in \mathrm{Der}_{CF}(J)$ *и любого идеала* $I \in CF(J)$ *справедливо включение* $I^{\mathrm{d}} \subseteq I$. *Пространство* $\mathrm{Der}_{CF}(J)$ — *подалгебра алгебры Ли* $\mathrm{Der}(J)$. *Если* $I \in CF(J)$, *то пространство* $N(I) = \{\mathrm{d} \in \mathrm{Der}_{CF}(J) \mid J^{\mathrm{d}} \subseteq I\}$ *является идеалом конечной коразмерности в* $\mathrm{Der}_{CF}(J)$. *Кроме того, пространство* $D_{I,J}$ — *идеал конечной коразмерности в* $\mathrm{Inder}(J)$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{d} \in \mathrm{Der}_{CF}(J)$ и $I \in CF(J)$. Тогда найдется внутреннее дифференцирование i алгебры J такое, что $a^{\mathrm{d}} - a^{\mathrm{i}} \in I$ для любого элемента $a \in J$. Поэтому для $a \in I$ имеем $a^{\mathrm{d}} \in a^{\mathrm{i}} + I \subseteq I$.

Пусть $\mathrm{d}_1, d_2 \in \mathrm{Der}_{CF}(J)$. Тогда найдутся внутренние дифференцирования $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2$ алгебры J такие, что $a^{\mathrm{d}_k} - a^{\mathrm{i}_k} \in I$ для любого элемента $a \in J$, здесь $k = 1, 2$. Следовательно,

$$a^{\mathrm{d}_1 d_2 - d_2 d_1} \in a^{\mathrm{i}_1 d_2 - i_2 d_1} + I \subseteq a^{\mathrm{i}_1 i_2 - i_2 i_1} + I.$$

Отсюда $\mathrm{d}_1 d_2 - d_2 d_1$ — проконечное дифференцирование алгебры J.

Таким образом, $\mathrm{Der}_{CF}(J)$ — алгебра Ли.

Пусть $I \in CF(J)$ и $\mathrm{d} \in \mathrm{Der}_{CF}(J)$. Тогда фактор-алгебра J/I конечномерна. Поэтому алгебра Ли $\mathrm{Der}(J/I)$ также конечномерна. Отображение $\varepsilon : \mathrm{Der}_{CF} \mapsto \mathrm{Der}(J/I)$, заданное по правилу $(a + I)^{\varepsilon(d)} = a^{\mathrm{d}} + I$, является гомоморфизмом алгебр с ядром, равным $N(I)$. Отсюда следует, что $N(I)$ — идеал конечной коразмерности в алгебре $\mathrm{Der}_{CF}(J)$. Так как $I \in CF(J)$, то $J = V + I$, где V — конечномерное подпространство. Следовательно, $\mathrm{Inder}(J) = D_{V,V} + D_{I,J}$, т. е. пространство $D_{I,J}$ имеет конечную коразмерность. Поскольку $[D_{I,J}, \mathrm{d}] \subseteq D_{I^{\mathrm{d}},J} + D_{I,J^{\mathrm{d}}} \subseteq D_{I,J}$, то $D_{I,J}$ — идеал алгебры $\mathrm{Inder}(J)$.

Предложение 9. *Пусть* J — *йорданова алгебра,* d — *проконечное дифференцирование алгебры* J *и* (J^0, Δ^0) — *дуальная коалгебра алгебры* J. *Тогда сопряженное отображение* d^* *к дифференцированию* d *является кодифференцированием коалгебры* (J^0, Δ^0).

Доказательство. Пусть $f \in J^0$. Тогда по теореме (ACM) 1 существует такой $I \in CF(J)$, что $I \subseteq \mathrm{Ker}\, f$. Ввиду предложения 8 идеал I инвариантен относительно дифференцирования d. Отсюда получаем, что $f^{\mathrm{d}^*}(I) = f(I^{\mathrm{d}}) \subseteq f(I) = 0$. Следовательно, $f^{\mathrm{d}^*} \in J^0$ для любого $f \in J^0$.

Пусть $a, b \in J$. Тогда

$$f^{\mathrm{d}^*}(ab) = f((ab)^{\mathrm{d}}) = f(a^{\mathrm{d}}b + ab^{\mathrm{d}}) = \sum_f f_{(1)}(a^{\mathrm{d}})f_{(2)}(b) + \sum_f f_{(1)}(a)f_{(2)}(b^{\mathrm{d}}),$$

т. е.

$$\Delta^0(f^{\mathrm{d}^*}) = \sum_f f_{(1)}^{\mathrm{d}^*} \otimes f_{(2)} + f_{(1)} \otimes f_{(2)}^{\mathrm{d}^*}.$$

Таким образом, d^* — кодифференцирование коалгебры (J^0, Δ^0).

Предложение 10. *Пусть* (J, Δ) — *йорданова коалгебра и* J^* — *ее дуальная алгебра. Тогда* $\mathrm{Wider}(J^*) = \{\mathrm{d} \in \mathrm{Der}(J^*) \mid$ *для любого идеала* $I \in CF(J^*)$ *существует такое* $\mathrm{i} \in \mathrm{Inder}(J^*)$, *что* $a^{\mathrm{d}} - a^{\mathrm{i}} \in I^{\perp\perp}$ *для любого элемента* $a \in J^*\}$. *Кроме того,* $\mathrm{Der}_{CF}(J^*) \subseteq \mathrm{Wider}(J^*)$.

Доказательство. Обозначим через X множество, стоящее в правой части равенства. Пусть $\mathrm{d} \in \mathrm{Wider}(J^*)$ и I — идеал в J^* конечной коразмерности. Тогда $I^{\perp}$ — конечномерная подкоалгебра в J. По предложению 3 и определению слабо внутреннего дифференцирования найдется такое $\mathrm{i} \in \mathrm{Inder}(J^*)$, что

$f^{\mathrm{d}}(v) = f^{\mathrm{i}}(v)$ для любых $f \in J^*$ и $v \in I^{\perp}$. Отсюда получаем, что $f^{\mathrm{d}} - f^{\mathrm{i}} \in I^{\perp\perp}$ для любого $f \in J^*$. Тем самым $\mathrm{d} \in X$.

Обратно, пусть $\mathrm{d} \in X$ и B — конечномерная подкоалгебра в J. Тогда $B^{\perp}$ — идеал в J^* конечной коразмерности. Поскольку $B^{\perp} = B^{\perp\perp\perp}$, по определению множества X найдется такое $\mathrm{i} \in \mathrm{Inder}(J^*)$, что $f^{\mathrm{d}} - f^{\mathrm{i}} \in B^{\perp}$ для любого $f \in J^*$. Поэтому $f^{\mathrm{d}}(v) = f^{\mathrm{i}}(v)$ для любых $f \in J^*$ и $v \in B$. Следовательно, в силу предложения 3 получаем, что $\mathrm{d} \in \mathrm{Wider}(J^*)$.

Таким образом, $\mathrm{Wider}(J^*) = X$.

Так как для любого $I \in CF(J^*)$ имеем $I \subseteq I^{\perp\perp}$, из доказанного выше следует, что $\mathrm{Der}_{CF}(J^*) \subseteq \mathrm{Wider}(J^*)$.

Пусть J — йорданова алгебра, (J^0, Δ^0) — дуальная коалгебра алгебры J и $(J^0)^*$ — дуальная алгебра коалгебры (J^0, Δ^0). Тогда справедливо следующее

Предложение 11. *Отображение $\phi : J \mapsto (J^0)^*$, заданное правилом $\phi(a)(f) = f(a)$, где $a \in J$ и $f \in J^0$, является гомоморфизмом алгебр. Более того, образ $\phi(J)$ является плотным пространством в $(J^0)^*$ и $\mathrm{Ker}\,\phi = \bigcap\limits_{I \in CF(J)} I$. Если J — конечномерная алгебра, то ϕ является изоморфизмом.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что ϕ — гомоморфизмом алгебр. Пусть v — ненулевой элемент из J^0. Тогда $v(J) \neq 0$ и для некоторого идеала I конечной коразмерности $v(I) = 0$. Следовательно, существует такой элемент $a \in J \setminus I$, что $v(a) \neq 0$. Так как $\phi(a)(v) = v(a) \neq 0$, то $\phi(J)$ плотно в $(J^0)^*$.

Пусть $a \in \mathrm{Ker}\,\phi$. Тогда $f(a) = 0$ для любого $f \in J^0$ Предположим, что $a \notin \bigcap\limits_{I \in CF(J)} I$. Тогда $a \notin I$ для некоторого $I \in CF(J)$. Следовательно, существует такой $f \in J^*$, что $I \subseteq \mathrm{Ker}\, f$, а $f(a) \neq 0$. Так как $I \subseteq \mathrm{Ker}\, f$, по теореме (ACM) 1 $f \in J^0$. Поэтому $f(a) = 0$. Таким образом, $\mathrm{Ker}\,\phi \subseteq \bigcap\limits_{I \in CF(J)} I$. Обратное включение очевидно.

Рассмотрим пространство $\mathrm{D}^0(J) = J + J^0$ и зададим на нем умножение, полагая
$$(a + v)(b + u) = ab + \sum_u u_{(2)}(a)u_{(1)} + \sum_v v_{(1)}(b)v_{(2)},$$
здесь $a, b \in J$, $v, u \in J^0$ и $\Delta^0(v) = \sum\limits_v v_{(1)} \otimes v_{(2)}$, $\Delta^0(u) = \sum\limits_u u_{(1)} \otimes u_{(2)}$. Тогда $\mathrm{D}^0(J)$ — йорданова алгебра. Если теперь $a \in J$ и $v \in J^0$, то $av = \phi(a) \cdot v$. Так как $J^0 \subseteq J^*$, на $\mathrm{D}^0(J)$ можно определить ассоциативную билинейную форму, причем ортогональное дополнение пространства J относительно этой формы равно нулю. Для подпространства V из J^0 через $V_J^{\perp}$ будем обозначать его ортогональное дополнение в J.

Пусть $\mathrm{d} \in \mathrm{Der}_{CF}(J)$. В силу предложения 9 сопряженное отображение d^* — кодифференцирование коалгебры (J^0, Δ^0). Поэтому d^{**} — дифференцирование алгебры $(J^0)^*$.

Предложение 12. *Дифференцирование d^{**} алгебры $(J^0)^*$ является слабо внутренним. Отображение $\psi : \mathrm{Der}_{CF}(J) \mapsto \mathrm{Wider}((J^0)^*)$, определенное правилом $\psi(\mathrm{d}) = d^{**}$, является гомоморфизмом алгебр Ли. При этом для любых $a, b \in J$ выполняются равенства $\phi(a)^{\psi(\mathrm{d})} = \phi(a^{\mathrm{d}})$ и $\psi(D_{a,b}) = D_{\phi(a),\phi(b)}$. Ядро $\mathrm{Ker}\,\psi$ равно $\bigcap\limits_{I \in CF(J)} N(I)$.*

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{d}^{**} \in \mathrm{Wider}((J^0)^*)$. Пусть V — конечномерное подпространство в J^0 с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда для каждого e_i

найдется такой идеал I_i из $CF(J)$, что $e_i(I_i)=0$. Положим $I=\bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i$. Тогда I — идеал алгебры J конечной коразмерности, причем $v(a)=0$ для любых $v\in V$ и $a\in I$. Так как $I\in CF(J)$ и $\mathrm{d}\in \mathrm{Der}_{CF}(J)$, существует такое $\mathrm{i}\in \mathrm{Inder}(J)$, что $a^{\mathrm{d}}-a^{\mathrm{i}}\in I$ для любого $a\in J$. Отсюда $v(a^{\mathrm{d}})=v(a^{\mathrm{i}})$ для любых $v\in V$ и $a\in I$. Поскольку i — внутреннее дифференцирование, то $\mathrm{i}=\sum\limits_k D_{a_k,b_k}$, где $a_k,b_k\in J$.

Пусть $\mathrm{i}_1=\sum\limits_k D_{\phi(a_k),\phi(b_k)}$. Тогда i_1 — внутреннее дифференцирование алгебры $(J^0)^*$. По предложению 4 и определению гомоморфизма ϕ имеем

$$f^{\mathrm{i}_1}(a)=\phi(a)(f^{\mathrm{i}_1})=-\sum_k \phi(a)D_{\phi(a_k),\phi(b_k)}(f)=-f\Big(\sum_k aD_{a_k,b_k}\Big)=-f(a^{\mathrm{i}})$$

для любых элементов $a\in J$ и $f\in J^0$. Отсюда следует, что $v^{\mathrm{d}^*}(a)=v(a^{\mathrm{d}})=v(a^{\mathrm{i}})=-v^{\mathrm{i}_1}(a)$ для произвольных элементов $v\in V$ и $a\in J$. Поскольку $v^{\mathrm{d}^*}+v^{\mathrm{i}_1}\in J^*$, то $v^{\mathrm{d}^*}=-v^{\mathrm{i}_1}$ для любого элемента v из V.

Пусть f — произвольный элемент из $(J^0)^*$. Тогда для любого $v\in V$ получаем, что $f^{\mathrm{d}^{**}}(v)=f(v^{\mathrm{d}^*})=-f(v^{\mathrm{i}_1})=f^{\mathrm{i}_1}(v)$. Следовательно, $\mathrm{d}^{**}\in \mathrm{Wider}((J^0)^*)$.

Если a,d и f — произвольные элементы из J, $\mathrm{Der}_{CF}(J)$ и J^0 соответственно, то

$$\phi(a)^{\psi(\mathrm{d})}(f)=\phi(a)^{\mathrm{d}^{**}}(f)=\phi(a)(f^{\mathrm{d}^*})=f^{\mathrm{d}^*}(a)=f(a^{\mathrm{d}})=\phi(a^{\mathrm{d}})(f).$$

Таким образом, $\phi(a)^{\psi(\mathrm{d})}=\phi(a^{\mathrm{d}})$ для любых элементов $a\in J$ и $\mathrm{d}\in \mathrm{Der}_{CF}(J)$.

Внутреннее дифференцирование $D_{a,b}$ алгебры J продолжим до дифференцирования алгебры $\mathrm{D}^0(J)$, положив $vD_{a,b}=(a,v,b)$, где (a,v,b) — ассоциатор в алгебре $\mathrm{D}^0(J)$. Пусть c и v — произвольные элементы из J и J^0 соответственно. Тогда в силу предложения 4

$$(vD_{a,b})(c)=\phi(c)((\phi(a),v,\phi(b)))=-(\phi(c)D_{\phi(a),\phi(b)})(v)=-v(aD_{a,b}).$$

Отсюда получаем, что $v(D_{a,b})^*=-vD_{a,b}$. Значит, продолжение дифференцирования $D_{a,b}$ задано корректно на элементах из J^0. Если $f\in (J^0)^*$, то

$$fD^{**}_{a,b}(v)=f(v(D_{a,b})^*)=-f(vD_{a,b})=-f(vD_{\phi(a),\phi(b)})=(fD_{\phi(a),\phi(b)})(v).$$

Поэтому $\psi(D_{a,b})=D_{\phi(a),\phi(b)}$.

Пусть $\mathrm{d}\in \operatorname{Ker}\psi$. Тогда в силу доказанного выше $\phi(a^{\mathrm{d}})=\phi(a)^{\psi(\mathrm{d})}=0$ для любого $a\in J$. Следовательно, по предложению 11 получаем, что $a^{\mathrm{d}}\in \bigcap\limits_{I\in CF(J)} I$. Поэтому $\mathrm{d}\in \bigcap\limits_{I\in CF(J)} N(I)$, т. е. $\operatorname{Ker}\psi\subseteq \bigcap\limits_{I\in CF(J)} N(I)$. Обратно, если $\mathrm{d}\in \bigcap\limits_{I\in CF(J)} N(I)$ и v — произвольный элемент из J^0, то $J^{\mathrm{d}}\subseteq \bigcap\limits_{I\in CF(J)} I$ и $I\subseteq \operatorname{Ker} v$ для некоторого $I\in CF(J)$. Тогда $v(a^{\mathrm{d}})=0$ для любого $a\in J$. Таким образом, $v^{\mathrm{d}^*}(a)=v(a^{\mathrm{d}})=0$, т. е. $\mathrm{d}^*=0$, а значит, $\psi(\mathrm{d})=0$.

Для элемента $v\in J^0$ через R^0_v обозначим оператор правого умножения в алгебре $\mathrm{D}^0(J^0)$ на элемент v. Пусть $R^0_{J^0}$ — пространство всех таких операторов. Напомним, что R_{J^0} — пространство операторов правых умножений алгебры $\mathrm{D}(J^0)$ на элементы из J^0.

Предложение 13. *Отображение $R^0_v\mapsto R_v$ является изоморфизмом пространств $R^0_{J^0}$ и R_{J^0}.*

Доказательство. Пусть v — элемент из J^0 такой, что $R^0_v=0$. Тогда для любого $a\in J$ имеем $av=0$. Тем самым $\phi(a)\cdot v=0$. Пусть f — произвольный элемент из $(J^0)^*$. Если $f\cdot v\neq 0$, то по предложению 11 получаем $\phi(a)(f\cdot v)\neq 0$ для некоторого элемента a из J. Поскольку $\phi(a)(f\cdot v)=f(\phi(a)\cdot v)$, то $\phi(a)(f\cdot v)=0$. Следовательно, $R_v=0$.

Таким образом, указанное отображение задано корректно. Так как $av=\phi(a)\cdot v$, ядро этого отображения равно нулю. Ясно, что оно сюръективно.

Пусть $a\in J$ и $v\in J^0$. Тогда внутреннее дифференцирование $D_{a,v}$ алгебры $\mathrm{D}^0(J)$ обозначим через $D^0_{a,v}$, а пространство всех таких дифференцирований — через D^0_{J,J^0}.

Лемма 6. *Отображение* $\pi: D^0_{J,J^0}\mapsto D_{(J^0)^*,J^0}$, *заданное правилом*

$$\pi\Big(\sum_i D^0_{a_i,v_i}\Big)=\sum_i D_{\phi(a_i),v_i},$$

является изоморфизмом пространств.

Доказательство. Сначала покажем, что отображение π задано корректно. Допустим, что $\sum\limits_i D^0_{a_i,v_i}=0$. Тогда для любого b из J имеем $b\sum\limits_i D^0_{a_i,v_i}=0$. Следовательно, $\phi(b)\sum\limits_i D_{\phi(a_i),v_i}=0$. Пусть f — произвольный элемент из $(J^0)^*$ и $w=f\sum\limits_i D_{\phi(a_i),v_i}$. Если $w\neq 0$, то по предложению 11 получаем, что $\phi(b)(w)\neq 0$ для некоторого $b\in J$. Поскольку $\phi(b)(w)=-f(\phi(b)\sum\limits_i D_{\phi(a_i),v_i})=0$, то $w=0$. Значит, $\sum\limits_i D_{\phi(a_i),v_i}=0$.

Пусть $\sum\limits_i D^0_{a_i,v_i}\in\operatorname{Ker}\pi$. Тогда

$$\begin{aligned}b\sum_i D^0_{a_i,v_i}&=\sum_i (a_ib)v_i-a_i(bv_i)\\&=\sum_i \phi(a_ib)\cdot v_i-\phi(a_i)\cdot(\phi(b)\cdot v_i)=\phi(b)\sum_i D_{\phi(a_i),v_i}=0\end{aligned}$$

для любого $b\in J$. Поэтому $\operatorname{Ker}\pi=0$.

Покажем, что отображение π сюръективно. Пусть $w=\sum\limits_i^k D_{f_i,v_i}$ — произвольный ненулевой элемент из $D_{(J^0)^*,J}$. Рассмотрим подкоалгебру B в J^0, порожденную элементами $v_1,\dots,v_k$. Тогда $J=U_0+B^\perp_J$ и $(J^0)^*=U+B^\perp$, где U_0 и U — конечномерные пространства одинаковой размерности. По предложению 5 имеем $w=\sum\limits_i^s D_{g_i,v_i}$, где $g_1,\dots,g_s\in U$. Если $b\in B^\perp_J$, то $\phi(b)(v)=v(b)=0$ для любого элемента $v\in B$. Следовательно, $\phi\big(B^\perp_J\big)\subseteq B^\perp$. Отсюда получаем, что отображение $\overline{\phi}: J/B^\perp_J\mapsto (J^0)^*/B^\perp$, заданное правилом $\overline{\phi}\big(a+B^\perp_J\big)=\phi(a)+B^\perp$, является изоморфизмом. Тогда в пространстве U_0 существуют такие элементы $a_1,\dots,a_s$, что $\phi(a_i)-g_i\in B^\perp$. В силу предложения 5 получаем

$$\sum_i^s D_{\phi(a_i),v_i}=\sum_i^s D_{g_i,v_i},$$

т. е. $\pi\Bigg(\sum\limits_i^s D^0_{a_i,v_i}\Bigg)=w$. Поэтому отображение π сюръективно.

Таким образом, отображение π является изоморфизмом пространств.

Пусть B — подкоалгебра йордановой коалгебры (J^0,Δ^0). Положим

$$p^0(B)=\{v\in D_{(J^0)^*,J}\mid \phi(J)v\subseteq B\},\quad p^*(B)=\{v\in D_{(J^0)^*,J}|(J^0)^*v\subseteq B\}.$$

Предложение 14. *Пусть I — идеал конечной коразмерности алгебры J. Тогда $p^0(I^\perp) = p^*(I^\perp) = (D_{\phi(J),\phi(I)})^\perp$.*

Доказательство. Ясно, что $p^*(I^\perp) \subseteq p^0(I^\perp)$.

Обратно, пусть $v \in p^0(I^\perp)$ и $I^{\perp\perp}$ — ортогональное дополнение $I^\perp$ в $(J^0)^*$. Тогда $(J^0)^*(I^{\perp\perp}v) \subseteq Q((J^0)^*, I^{\perp\perp}v) \subseteq Q(I^{\perp\perp}, (J^0)^*v) \subseteq Q(I^{\perp\perp}, I^\perp) = 0$. Тем самым v — нулевое отображение на пространстве $I^{\perp\perp}$. Поскольку I — идеал конечной коразмерности, то $J = U_0 + I$, $(J^0)^* = U + I^{\perp\perp}$ и $U \subseteq \phi(U_0) + I^{\perp\perp}$. Следовательно, $Uv \subseteq I^\perp$. Поэтому $v \in p^*(I^\perp)$.

Если $v \in p^0(I^\perp)$, то по следствию 1, лемме 4 и предложению 11 имеем

$$D_{\phi(J),\phi(I)}(v) \subseteq q_L(D_{\phi(J),\phi(I)}, v) \subseteq Q(\phi(I), \phi(J)v)$$
$$\subseteq \phi(I)(\phi(J)v) \subseteq (\phi(J)v)(I) \subseteq I(I^\perp) = 0,$$

т. е. $p^0(I^\perp) \subseteq (D_{\phi(J),\phi(I)})^\perp$.

Обратно, если $v \in (D_{\phi(J),\phi(I)})^\perp$, то $(\phi(J)v)(I) \subseteq q_L(D_{\phi(J),\phi(I)}, v) = 0$. Поэтому $v \in p^0(I^\perp)$. Таким образом, $p^0(I^\perp) = (D_{\phi(J),\phi(I)})^\perp$.

Пусть йорданова алгебра J содержит единицу. Рассмотрим КТК-алгебру Ли $L_{\mathrm{in}}(J) = L(J, \mathrm{Inder}(J))$ алгебры J. Для идеала I алгебры J положим $p(I) = \{\mathrm{d} \in \mathrm{Inder}(J) | J^{\mathrm{d}} \subseteq I\}$, $I_1(I) = I + R_I + D_{I,J} + \overline{I}$ и $I_2(I) = I + R_I + p(I) + \overline{I}$. Тогда, как показано в [10] (см. теорему 14 на с. 331), пространства $I_1(I)$, $p(I)$ и $I_2(I)$ являются идеалами алгебры $L_{\mathrm{in}}(J)$. Более того, если K — идеал алгебры $L_{\mathrm{in}}(J)$, то $I = J \cap K$ идеал алгебры J и справедливы включения $I_1(I) \subseteq K \subseteq I_2(I)$. Если K — идеал конечной коразмерности, то идеал I имеет конечную коразмерность и в силу предложения 8 идеалы $I_1(I)$, $I_2(I)$ имеют конечную коразмерность. Напомним, что $L((J^0)^*) = L((J^0)^*, \mathrm{Wider}((J^0)^*))$.

Предложение 15. *Пусть J — йорданова алгебра с единицей и $(J^0)^*$ — дуальная алгебра коалгебры (J^0, Δ^0). Тогда отображение $\Phi : L_{\mathrm{in}}(J) \mapsto L((J^0)^*)$, заданное по правилу*

$$\Phi(a + R_b + \mathrm{d} + \bar{c}) = \phi(a) + R_{\phi(a)} + \psi(\mathrm{d}) + \overline{\phi(c)},$$

является гомоморфизмом алгебр. При этом $\mathrm{Ker}\,\Phi = \bigcap\limits_{I \in CF(J)} I_2(I)$. Образ $\Phi(L_{\mathrm{in}}(J))$ — плотная подалгебра в $L((J^0)^*)$.

Доказательство. Из определения умножения в алгебре $L_{\mathrm{in}}(J)$ и предложений 11, 12 следует, что отображение Φ — гомоморфизм алгебр. Пусть $K = \bigcap\limits_{I \in CF(J)} I_2(I)$. Если элемент $a + R_b + \mathrm{d} + \bar{c}$ принадлежит $\mathrm{Ker}\,\Phi$, то $a, b, c \in \mathrm{Ker}\,\phi$, а $\mathrm{d} \in \mathrm{Ker}\,\psi$. Ввиду предложения 11 и 12 получаем, что $a, b, c \in \bigcap\limits_{I \in CF(I)} I$, а $\mathrm{d} \in \bigcap\limits_{I \in CF(I)} N(I)$. Отсюда вытекает, что $\mathrm{Ker}\,\Phi \subseteq K$. Обратно, если элемент $a + R_b + \mathrm{d} + \bar{c}$ принадлежит K, то

$$a, c \in \bigcap_{I \in CF(I)} I, \quad b = [1, R_b] \in \bigcap_{I \in CF(I)} I, \quad J^{\mathrm{d}} \subseteq [J, \mathrm{d}] \subseteq \bigcap_{I \in CF(I)} I.$$

Применяя опять предложения 11, 12, находим, что $a, b, c \in \mathrm{Ker}\,\phi$, а $\mathrm{d} \in \mathrm{Ker}\,\psi$. Следовательно, $K \subseteq \mathrm{Ker}\,\Phi$.

Таким образом, $\mathrm{Ker}\,\Phi = \bigcap\limits_{I \in CF(J)} I_2(I)$.

Покажем, что образ $\Phi(L_{\rm in}(J))$ плотен в $L((J^0)^*)$. Достаточно доказать, что пространство $\Phi({\rm Inder}(J))$ является плотным в ${\rm Wider}((J^0)^*)$. Пусть $\sum\limits_i^n D_{f_i,v_i}$ — ненулевой элемент из $D_{(J^0)^*,J^0}$. Тогда по лемме 6 в алгебре J найдутся такие элементы $a_1,\ldots,a_n$, что

$$\sum_i^n D_{f_i,v_i}=\sum_i^n D_{\phi(a_i),v_i}.$$

По следствию 1 и лемме 4 имеем

$$\phi(a)\left(f\sum_i^n D_{\phi(a_i),v_i}\right)=-f\left(\phi(a)\sum_i^n D_{\phi(a_i),v_i}\right)$$

для любых $a\in J$ и $f\in (J^0)^*$. Тогда ввиду предложения 11

$$\phi(b)\left(\phi(a)\sum_i^n D_{\phi(a_i),v_i}\right)\neq 0$$

для некоторых $a,b\in J$. Применяя опять следствие 1 и лемму 4, получим, что

$$D_{\phi(a),\phi(b)}\left(\sum_i^n D_{f_i,v_i}\right)\neq 0.$$

Таким образом,

$$\Phi(D_{a,b})\left(\sum_i^n D_{f_i,v_i}\right)\neq 0.$$

Пусть ${\rm d}\in {\rm Der}_{CF}(J)$. На алгебре ${\rm D}^0(J)$ зададим отображение ${\rm d}^0$, полагая ${\rm d}^0(a+v)=a^{\rm d}+v^{{\rm d}^*}$, где $a\in J$, $v\in J^0$. Тогда ${\rm d}^0$ является дифференцированием алгебры ${\rm D}^0(J)$. Пространство всех таких дифференцирований и дифференцирования из D^0_{J,J^0} образуют подалгебру в алгебре Ли ${\rm Der}({\rm D}^0(J))$. Обозначим эту подалгебру через ${\rm Der}(J,J^0)$. В КТК-алгебре Ли $L({\rm D}^0(J),{\rm Der}(J,J^0))$ рассмотрим идеал $L(J^0)$, порожденный пространством J^0. Тогда $L(J^0)=J^0+R^0_{J^0}+D^0_{J,J^0}+\overline{J^0}$. Для внутреннего дифференцирования $D_{a,b}$ алгебры J справедливо $v(D_{a,b})^*=-(a,v,b)$, где (a,v,b) — ассоциатор в алгебре ${\rm D}^0(J)$. Поэтому можно считать, что $L_{\rm in}(J)$ является подалгеброй в $L({\rm D}^0(J))$. Положим

$${\rm Loc}_2(L_{\rm in}(J)^0)=\{f\in L_{\rm in}(J)^*\mid \text{ существует такой } I\in CF(J),\ \text{что } I_2(I)\subseteq {\rm Ker}\,f\}.$$

Теорема 3. *Пусть J — йорданова алгебра с единицей и $L_{\rm in}(J)$ — ее* КТК-*алгебра Ли. Тогда пространство $L(J^0)$ является коалгеброй Ли, которая изоморфна коалгебре $(L^c(J^0),\Delta_L)$. Кроме того, $L(J^0)={\rm Loc}_2(L_{\rm in}(J)^0)$. Равенство $L(J^0)={\rm Loc}(L_{\rm in}(J)^0)$ справедливо тогда и только тогда, когда $\bigcap\limits_{I\in CF(J)} I_1(I)=\bigcap\limits_{I\in CF(J)} I_2(I)$.*

Доказательство. Пусть отображение $\Pi: L(J^0)\mapsto L^c(J^0)$ определенно правилом

$$\Pi\Big(u+R^0_v+\sum_i D^0_{a_i,v_i}+\overline{w}\Big)=u+R_v+\pi\Big(\sum_i D^0_{a_i,v_i}\Big)+\overline{w}.$$

Тогда ввиду предложения 13 и леммы 6 отображение Π является изоморфизмом пространств. В силу следствия 1 и предложения 15 каждый элемент f из $L(J^0)$ определяет линейный функционал на пространстве $L_{\mathrm{in}}(J)$, а именно $f(l) = \Phi(l)(\Pi(f))$. Поэтому можно считать, что $L(J^0) \subseteq L_{\mathrm{in}}(J)^*$.

Зафиксируем элемент f из $L(J^0)$. Тогда для произвольных элементов l_1 и l_2 из $L_{\mathrm{in}}(J)$, используя предложение 15 и теорему 2, получаем

$$f([l_1, l_2])(f) = \Phi([l_1, l_2])(\Pi(f)) = \sum_{\Pi(f)} \Phi(l_1)(\Pi(f)_{(1)})\Phi(l_1)(\Pi(f)_{(2)}).$$

Пусть $f_{(1)}$ и $f_{(2)}$ — элементы из $L(J^0)$, являющиеся прообразами элементов $\Pi(f)_{(1)}$ и $\Pi(f)_{(2)}$ соответственно. Определим коумножение $\overline{\Delta}$ на пространстве $L(J^0)$, полагая

$$\overline{\Delta}(f) = \sum_f f_{(1)} \otimes f_{(2)}.$$

Тогда Π — изоморфизм коалгебр $(L(J^0), \overline{\Delta})$ и $(L^c(J^0), \Delta_L)$.

Пусть $f = u + R_v^0 + \sum\limits_i D^0_{a_i, v_i} + \overline{w}$ — элемент из $L(J^0)$ и B — подкоалгебра в (J^0, Δ^0), порожденная всеми элементами u, v, v_i, w. Тогда $B_J^{\perp}$ — идеал конечной коразмерности в J.

Если d — произвольный элемент из $p\big(B_J^{\perp}\big)$, то

$$D_{J,B}(\mathrm{d}) \subseteq \psi(\mathrm{d})(\Pi(D_{J,B})) \subseteq \psi(\mathrm{d})(D_{\phi(J),B}) \subseteq \phi(J^{\mathrm{d}})(B) \subseteq B\big(B_J^{\perp}\big) = 0.$$

Поэтому $I_2\big(B_J^{\perp}\big) \subseteq \operatorname{Ker} f$, т. е. $L(J^0) \subseteq \mathrm{Loc}_2(L_{\mathrm{in}}(J)^0)$.

Покажем обратное включение. Возьмем произвольно $f \in \mathrm{Loc}_2(L_{\mathrm{in}}(J)^0)$. Тогда $I_2(I) \subseteq \operatorname{Ker} f$ для некоторого идеала I из $CF(J)$. Поскольку $f \in J^* + (R_J)^* + \mathrm{Inder}(J)^* + \overline{J^*}$ и $J^0 = \mathrm{Loc}(J^0)$, достаточно рассмотреть случай, когда $f \in \mathrm{Inder}(J)^*$. Пусть $I^{\perp}$ — ортогональное дополнение пространства I в J^0 и $D^{\perp}_{J,I^{\perp}}$ — ортогональное дополнение пространства $D_{J,I^{\perp}}$ в $\mathrm{Inder}(J)$. Тогда по доказанному выше $D_{J,I^{\perp}}(p(I)) = 0$, т. е. $p(I) \subseteq D^{\perp}_{J,I^{\perp}}$. Если $\mathrm{d} \in D^{\perp}_{J,I^{\perp}}$, то

$$I^{\perp}(J^{\mathrm{d}}) \subseteq \phi(J^{\mathrm{d}})(I^{\perp}) \subseteq (\phi(J)^{\psi(\mathrm{d})})(I^{\perp}) \subseteq \Phi(\mathrm{d})(\Pi(D_{J,I^{\perp}})) \subseteq D_{J,I^{\perp}}(\mathrm{d}) = 0,$$

т. е. $J^{\mathrm{d}} \subseteq (I^{\perp})_J^{\perp} = I$. Поэтому $p(I) = D^{\perp}_{J,I^{\perp}}$. Поскольку $p(I)$ — идеал конечной коразмерности, то $\mathrm{Inder}(J) = U + p(I)$, где U — конечномерное пространство. Тогда получаем, что $D_{J,I^{\perp}}$ является пространством линейных функционалов, заданных на пространстве U. Отсюда следует, что функционал f совпадает с некоторым элементом из $D_{J,I^{\perp}}$.

Таким образом, $L(J^0) = \mathrm{Loc}_2(L_{\mathrm{in}}(J)^0)$.

Пусть

$$\bigcap_{I \in CF(J)} I_1(I) = \bigcap_{I \in CF(J)} I_2(I).$$

Покажем, что $\mathrm{Loc}(L_{\mathrm{in}}(J)^0) \subseteq L(J^0)$. Рассмотрим элемент $f \in \mathrm{Loc}(L_{\mathrm{in}}(J)^0)$. Тогда в алгебре $L_{\mathrm{in}}(J)$ найдется такой идеал K конечной коразмерности, что $K \subseteq \operatorname{Ker} f$. Положим $I = J \cap K$. Тогда $I_1(I)$ — идеал конечной коразмерности и $I_1(I) \subseteq K$. Не ограничивая общности, можно считать, что $f \in \mathrm{Inder}(J)^0$ и $D_{J,I} \subseteq \operatorname{Ker} f$.

Поскольку $D_{J,I}$ — идеал конечной коразмерности, то $\mathrm{Inder}(J) = U \oplus D_{J,I}$, где U — конечномерное пространство. Если $\Phi(u) \in D_{\phi(J),\phi(I)}$ для некоторого элемента $u \in U$, то ввиду предложения 15 $u \in \bigcap\limits_{I \in CF(J)} I_2(I) + D_{J,I}$, а по условию теоремы получаем, что $u \in D_{J,I}$. Тем самым $u = 0$. Следовательно, $\Phi((\mathrm{Inder}(J)) = \Phi(U) \oplus D_{\phi(J),\phi(I)}$, причем размерности пространств U и $\Phi(U)$ совпадают. По предложению 14 $p^0(I^\perp) = D^\perp_{\phi(J),\phi(I)}$. Поэтому $\Phi(U)$ и $p^0(I^\perp)$ — пространства одинаковой размерности. Пусть V — подпространство из D_{J,J^0} такое, что $\Pi(V) = p^0(I^\perp)$. Тогда $V(D_{J,I}) \subseteq \Phi(D_{J,I})(\Pi(V)) \subseteq D_{\phi(J),\phi(I)}(p^0(I^\perp)) = 0$ и пространства U, V имеют одинаковую размерность. Отсюда следует, что V является пространством линейных функционалов, заданных на U. Следовательно, функционал f совпадает с некоторым элементом из V.

Поэтому если $\bigcap\limits_{I\in CF(J)} I_1(I) = \bigcap\limits_{I\in CF(J)} I_2(I)$, то $L(J^0) = \mathrm{Loc}(L_{\mathrm{in}}(J)^0)$.

Пусть теперь $L(J^0) = \mathrm{Loc}(L_{\mathrm{in}}(J)^0)$. Предположим, что

$$\bigcap_{I\in CF(J)} I_1(I) \neq \bigcap_{I\in CF(J)} I_2(I).$$

Тогда существует такой элемент a из $\bigcap\limits_{I\in CF(J)} I_2(I)$, что $a \notin I_1(I)$ для некоторого идеала $I \in CF(J)$. Следовательно, найдется такой функционал f пространства $L_{\mathrm{in}}(J)$, что $I_1(I) \subseteq \mathrm{Ker}\, f$ и $f(a) \neq 0$. Поэтому $f \in L(J^0)$, а так как $L(J^0) = \mathrm{Loc}_2(L_{\mathrm{in}}(J)^0)$, то $I_2(K) \subseteq \mathrm{Ker}\, f$ для некоторого идеала $K \in CF(J)$. Поскольку $a \in I_2(K)$, то $f(a) = 0$. Полученное противоречие показывает, что $\bigcap\limits_{I\in CF(J)} I_1(I) = \bigcap\limits_{I\in CF(J)} I_2(I)$.

Таким образом, теорема доказана.

Пользуясь случаем, хочу выразить благодарность профессору И. П. Шестакову за полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Michaelis W.* Lie coalgebras // Adv. Math. 1980. V. 38. P. 1–54.
2. *Anquela J. A., Cortes T., Montaner F.* Nonassociative Coalgebras // Comm. Algebra. 1994. V. 22, N 12. P. 4693–4716.
3. *Желябин В. Н.* Конструкция Кантора — Кехера — Титса для йордановых коалгебр // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 2. С. 51–67.
4. *Sweedler M. E.* Hopf Algebras. New York: W. A. Benjamin Inc., 1969.
5. *Желябин В. Н.* Структуризуемые коалгебры // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 5. С. 503–517.
6. *Michaelis W.* An example of a non-zero Lie coalgebra M for $\mathrm{Loc}(M) = 0$ // J. Pure Appl. Algebra. 1990. V. 68. P. 341–348.
7. *Nichols W. D.* The structure of the dual Lie coalgebra of the Witt algebra // J. Pure Appl. Algebra. 1990. V. 68. P. 359–364.
8. *Slinko A.* Local finiteness of coalgebraic Lie coalgebras // Comm. Algebra. 1995. V. 23, N 5. P. 1165–1170.
9. *Шестаков И. П.* Альтернативные и йордановы супералгебры // Алгебра, геометрия, анализ и математическая физика: 10-я Сибирская школа. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997. С. 157–169.
10. *Jacobson N.* Structure and representations of Jordan algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; 39).

Статья поступила 25 февраля 2002 г.

Желябин Виктор Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vicnic@math.nsc.ru