*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2003. Том 44, № 2*

*УДК 517.51*

# ОЦЕНКИ АППРОКСИМАТИВНЫХ ЧИСЕЛ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ. II

**Е. Н. Ломакина**

**Аннотация:** Получены оценки норм типа Шаттена — Неймана аппроксимативных чисел интегрального оператора Харди с переменными пределами интегрирования.

**Ключевые слова:** оператор Харди, аппроксимативные числа, нормы Шаттена — Неймана

Данная работа является продолжением [1] и посвящена оценкам норм типа Шаттена — Неймана аппроксимативных чисел оператора $H : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$ с переменными пределами интегрирования вида

$$Hf(x) = v(x) \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} u(y)f(y)\,dy, \tag{1}$$

где $u(y) \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$, $v(x) \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — возрастающие дифференцируемые функции такие, что $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(x) < \psi(x)$ для $x \in (0, \infty)$ и $\varphi(\infty) = \psi(\infty) = \infty$.

Об истории исследований, связанных с данным классом операторов, см. во введении к [1]. Напомним, что если $X$ и $Y$ — банаховы пространства, $B : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор, то последовательность *аппроксимативных чисел* (*a-чисел*) оператора $B$ определена по формуле

$$a_m(B) = \inf_{P:X\to Y,\,\mathrm{rank}\,P<m} \|B - P\|, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Будем говорить, что оператор $B$ *принадлежит классу Шаттена — Неймана* $\mathcal{S}_\alpha$, $1 < \alpha < \infty$, если $\{a_n(B)\} \in \ell^\alpha$, при этом

$$\|B\|_{\mathcal{S}_\alpha} = \|\{a_k(B)\}\|_{\ell^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha(B)\right)^{1/\alpha}$$

и $B$ принадлежит $\mathcal{S}_{\alpha,weak}$, если

$$\|B\|_{\mathcal{S}_{\alpha,weak}} = \|\{a_k(B)\}\|_{\ell^\alpha_w} = \sup_{t>0} t(n(t, a(B))^{1/\alpha},$$

где *счетная функция* последовательности $\{a_n(B)\}$ задается в виде

$$n(t, a(B)) = \mathrm{card}\{k \in \mathbb{N} : a_k(B) > t\}, \quad t > 0.$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00239) и гранта Министерства образования РФ Е00–1.0–215.

Известно, что

$$\|B\|_{\mathcal{S}_\alpha} = \left( \alpha \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} n(t, a(B))\, dt \right)^{1/\alpha}.$$

Основные результаты статьи заключаются в следующем. Во-первых, для операторов $S, T : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^p(\mathbb{R}^+)$ вида

$$Sf(x) = v(x) \int\limits_0^{\psi(x)} u(y) f(y)\, dy, \tag{2}$$

$$Tf(x) = v(x) \int\limits_{\varphi(x)}^{\infty} u(y) f(y)\, dy, \tag{3}$$

устанавливается эквивалентность норм Шаттена — Неймана интегральным выражениям вида

$$\|T\|_{\mathcal{S}_\alpha} \approx \left( \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_{\varphi(x)}^\infty |u(y)|^{p'}\, dy \right)^{\alpha/p'} \left( \int\limits_0^x |v(t)|^p\, dt \right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p\, dx \right)^{1/\alpha}, \tag{4}$$

$$\|S\|_{\mathcal{S}_\alpha} \approx \left( \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_0^{\psi(x)} |u(y)|^{p'}\, dy \right)^{\alpha/p'} \left( \int\limits_x^\infty |v(t)|^p\, dt \right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p\, dx \right)^{1/\alpha}, \tag{5}$$

где $1 < p < \infty$ и $1 < \alpha < \infty$, а также оценка сверху для оператора

$$H : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^p(\mathbb{R}^+),$$

$$\|H\|_{\mathcal{S}_\alpha}^\alpha \ll \sum_m \left( \int\limits_{\Delta_m} |v|^p \right)^{\alpha/p-1} \int\limits_{\Delta_m} \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} |v(x)|^p\, dx, \tag{6}$$

где $\bigcup\limits_m \Delta_m = \bigcup\limits_m [\zeta_m, \zeta_{m+1}) = \mathbb{R}^+$ — специальное разбиение полуоси.

Для случая $H : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$ и $1 < \alpha < \infty$ доказана двусторонняя оценка

$$\|H\|_{\mathcal{S}_\alpha} \approx \left( \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{\Delta_k} \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(\zeta_{k+1})} u^2(y)\, dy \right)^{\alpha/2} \left( \int\limits_{\zeta_k}^x v^2(x)\, dx \right)^{\alpha/2-1} v^2(x)\, dx \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{\Delta_k} \left( \int\limits_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(x)} u^2(y)\, dy \right)^{\alpha/2} \left( \int\limits_x^{\zeta_{k+1}} v^2(x)\, dx \right)^{\alpha/2-1} v^2(x)\, dx \right)^{1/\alpha}, \tag{7}$$

причем для $2 < \alpha < \infty$ этой эквивалентности можно придать более компактный вид типа формулы Гильберта — Шмидта

$$\|H\|_{\mathcal{S}_\alpha} \approx \left( \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} u^2(y)\, dy \right)^{\alpha/2} \left( \int\limits_{\psi^{-1}(\sigma(x))}^{\varphi^{-1}(\sigma(x))} v^2(t)\, dt \right)^{\alpha/2-1} v^2(x)\, dx \right)^{1/\alpha}, \tag{8}$$

где функция $\sigma(x)$ определяется из соотношения

$$\int_{\varphi(x)}^{\sigma(x)} u^2(y)\,dy = \int_{\sigma(x)}^{\psi(x)} u^2(y)\,dy.$$

Для исследований мы строим разбиение $(0,\infty) = \bigcup_k \Delta_k$, где $\Delta = [\zeta_k, \zeta_{k+1})$ и $\delta_k = [\eta_k, \eta_{k+1})$ определяются для $k \in \mathbb{Z}$ следующим образом:

$$\begin{gathered} \zeta_0 = 1,\ \eta_0 = \varphi(1),\ \eta_1 = \psi(1), \quad \zeta_{k+1} = (\varphi^{-1}\circ\psi)^k(1),\ k \in \mathbb{Z}, \\ \eta_k = \psi(\varphi^{-1}\circ\psi)^{k-1}(1),\ k \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{9}$$

Пусть $x \in \Delta_k = [\zeta_k, \zeta_{k+1})$, тогда

$$Hf(x) = \Phi_k f(x) + \Psi_k f(x),$$

где

$$\Phi_k f(x) = v(x)\int_{\varphi(x)}^{\psi(\zeta_k)} u(y)f(y)\,dy, \quad \Psi_k f(x) = v(x)\int_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(x)} u(y)f(y)\,dy,$$

что позволит использовать оценки для операторов с одним переменным пределом.

Будем говорить, что оператор $B : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$ *имеет блочно-диагональное разложение*, если существуют два семейства дизъюнктных интервалов $\{\delta_k\}$ и $\{\Delta_k\}$ такие, что $(0,\infty) = \bigcup_k \delta_k$, $(0,\infty) = \bigcup_k \Delta_k$ и

$$Bf(x) = \sum_k \chi_{\Delta_k}(B(f\chi_{\delta_k}))(x).$$

Пусть

$$P_k f(y) = \chi_{\delta_k}(y)f(y), \quad Q_k f(x) = \chi_{\Delta_k}(x)f(x).$$

Очевидно,

$$\|P_k\|_{L^p\to L^p} = 1, \quad \|Q_k\|_{L^q\to L^q} = 1.$$

Положим

$$B_k = Q_k B P_k$$

и обозначим через $\widetilde{B}_k$ сужение $B_k$ на $L^p(\delta_k)$, т. е. $B_k f = \widetilde{B}_k f$ для всех $f \in L^p(\delta_k)$. Легко видеть, что

$$a(B_k) = a(\widetilde{B}_k),$$

отметим также, что при $1 < p \le q < \infty$

$$\|B\|_{L^p\to L^q} = \sup_k \|B_k\|_{L^p\to L^q} = \sup_k \|\widetilde{B}_k\|_{L^p(\delta_k)\to L^q(\Delta_k)}.$$

Итак,

$$H = \Phi + \Psi = \sum_k \Phi_k + \sum_k \Psi_k = \sum_k Q_k H P_k + \sum_k Q_k H P_{k+1}, \tag{10}$$

где $\Phi$ и $\Psi$ имеют блочно-диагональное разложение.

Без потери общности всюду в статье неопределенности вида $0\cdot\infty$, $0/0$, $\infty/\infty$ полагаются равными нулю. Неравенство $A \ll B$ означает $A \le CB$, где константа $C$ зависит только от $p, q$; соотношение $A \approx B$ понимается как $A \ll B \ll A$; $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ — множества всех целых и натуральных чисел соответственно, $\|K\|_{X \to Y}$ — норма линейного оператора $K : X \to Y$.

Пусть последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\tau_n\}$ определяются формулами

$$U(\psi(\xi_n)) = \int\limits_0^{\psi(\xi_n)} |u(t)|^{p'}\, dt = 2^n, \quad -\infty < n \le N_\psi \le \infty,$$

$$U(\varphi(\tau_n)) = \int\limits_{\varphi(\tau_n)}^{\infty} |u(y)|^{p'}\, dy = 2^{-n}, \quad -\infty \le N_\varphi \le n < \infty.$$

Обозначим

$$\sigma_n = \left( \int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} U^{p/p'}(\psi(x)) |v(x)|^p\, dx \right)^{1/p}, \quad \varkappa_n = \left( \int\limits_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} U^{p/p'}(\varphi(x)) |v(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

В теоремах 1 и 2 для операторов $S$ и $T$ с одним переменным пределом интегрирования устанавливаются эквивалентности

$$\|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{Z})} \approx \|\{a_k(S)\}\|_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{N})}, \quad \|\{\varkappa_k\}\|_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{Z})} \approx \|\{a_k(T)\}\|_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{N})}$$

и

$$\|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \approx \|\{a_k(S)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}, \quad \|\{\varkappa_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \approx \|\{a_k(T)\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}.$$

Эти важные соотношения следуют из эквивалентности счетных функций последовательностей $\{\sigma_k\}$ и $\{a_k(S)\}$, $\{\varkappa_k\}$ и $\{a_k(T)\}$, которая доказывается в серии лемм 1–7. Далее, теорема 3 устанавливает, что

$$\|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \approx \left( \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_0^{\psi(x)} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} \left( \int\limits_x^\infty |v|^p \right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p\, dx \right)^{1/\alpha},$$

и аналогичное утверждение справедливо для нормы последовательности $\{\varkappa_k\}$. Отсюда вытекают формулы (4) и (5), на основе которых, используя блочно-диагональное представление (10), получаем основные результаты работы — соотношения (6)–(8).

Как было указано выше, нам потребуется несколько технических лемм.

**Лемма 1.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $\Omega = (c, d) \subset \mathbb{R}^+$, $J_n = (\xi_n, \xi_{n+1})$,

$$A_{\psi,1}(\Omega) = \sup_{c<t<d} \left( \int\limits_{\psi(t)}^{\psi(d)} |u(y)|^{p'}\, dy \right)^{1/p'} \left( \int\limits_c^t |v(x)|^p\, dx \right)^{1/p},$$

$$A_{\psi,2}(\Omega) = \sup_{c<t<d} \left( \int\limits_{\psi(c)}^{\psi(t)} |u(y)|^{p'}\, dy \right)^{1/p'} \left( \int\limits_t^d |v(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

*Тогда*

$$A_{\psi,1}(\overline{J_n} \cup \overline{J_{n+1}}) \ge \sigma_n, \;\; A_{\psi,2}(\overline{J_n} \cup \overline{J_{n+1}}) \ge 2^{-2/p'} \sigma_{n+1}.$$

Доказательство. Имеем

$$A_{\psi,1}(\overline{J_n}\cup\overline{J_{n+1}})=\sup_{\xi_n<t<\xi_{n+2}}\left(\int\limits_{\psi(t)}^{\psi(\xi_{n+2})}|u(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{\xi_n}^{t}|v(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

$$\geq\left(\int\limits_{\psi(\xi_{n+1})}^{\psi(\xi_{n+2})}|u(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}}|v(x)|^p\,dx\right)^{1/p}=2^{\frac{n+1}{p'}}\left(\int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}}|v(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\geq\sigma_n,$$

$$A_{\psi,2}(\overline{J_n}\cup\overline{J_{n+1}})=\sup_{\xi_n<t<\xi_{n+2}}\left(\int\limits_{\psi(\xi_n)}^{\psi(t)}|u(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{t}^{\xi_{n+2}}|v(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

$$\geq\left(\int\limits_{\psi(\xi_n)}^{\psi(\xi_{n+1})}|u(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{\xi_{n+1}}^{\xi_{n+2}}|v(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\geq 2^{-2/p'}\sigma_{n+1}. \qquad \square$$

**Лемма 2.** *Пусть $0<c<d<\infty$, $\Omega=(c,d)\subset\mathbb{R}^+$. Положим*

$$D_\psi(\Omega)=\max(A_{\psi,1}(c,s),A_{\psi,2}(s,d)),$$

*где*

$$A_{\psi,1}(c,s)=\sup_{c<t<s}\left(\int\limits_{\psi(t)}^{\psi(s)}|u(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{c}^{t}|v(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

$$A_{\psi,2}(s,d)=\sup_{s<t<d}\left(\int\limits_{\psi(s)}^{\psi(t)}|u(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{t}^{d}|v(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

*и точка $s\in(c,d)$ выбрана так, чтобы выполнялось равенство*

$$\int\limits_{c}^{s}|v(x)|^p\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{c}^{d}|v(x)|^p\,dx.$$

*Пусть $0<\varepsilon<\|S\|$, где $\varepsilon$ достаточно мало и*

$$\Delta_\Omega(\varepsilon)=\{n\in\mathbb{Z}:\overline{J}_n\subset\Omega,\sigma_n>2^{2/p'}\varepsilon\},\quad \operatorname{card}\Delta_\Omega(\varepsilon)\geq 4.$$

*Тогда*

$$D_\psi(\Omega)>\varepsilon.$$

Доказательство. Если $n_1=\min\{n:n\in\Delta_\Omega(\varepsilon)\}$, $n_2=\max\{n:n\in\Delta_\Omega(\varepsilon)\}$, то $\overline{J_{n_1}}\cup\overline{J_{n_1+1}}\subset(c,s)$, и в силу леммы 1 получаем

$$A_{\psi,1}(c,s)\geq A_{\psi,1}(\overline{J_{n_1}}\cup\overline{J_{n_1+1}})\geq\sigma_{n_1}>2^{2/p'}\varepsilon>\varepsilon.$$

Аналогично $\overline{J_{n_2-1}}\cup\overline{J_{n_2}}\subset(s,d)$ и

$$A_{\psi,2}(s,d)\geq A_{\psi,2}(\overline{J}_{n_2-1}\cup\overline{J_{n_2}})\geq 2^{-2/p'}\sigma_{n_2}>\varepsilon.$$

Следовательно, $D(\Omega)=\max(A_{\psi,1}(c,s),A_{\psi,2}(s,d))>\varepsilon$. $\square$

**Лемма 3.** *Пусть* $0 < \varepsilon < \|S\|$, $\operatorname{card}\Delta_\Omega(\varepsilon) \geq 4$, *тогда* $\|S_\Omega\| > \varepsilon$.

Доказательство. По [2, с. 158, теорема 2.2] будет $\|S_\Omega\| \approx D_\psi(\Omega)$. Применяя лемму 2, получаем требуемую оценку. $\square$

**Лемма 4.** *Пусть* $0 < \varepsilon < \|S\|$ *и* $N = N(\varepsilon)$ *целое. Тогда*

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : \sigma_k > 2^{2/p'+1}\varepsilon\} \leq 6N(\varepsilon).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : c_i \in \overline{J_k} \quad \text{для некоторых } i,\ 1 \leq i \leq N\} \leq 2N.$$

Для остальных $k \in \mathbb{Z}$, не относящихся к указанному выше множеству, имеем $\overline{J_k} \subset I_i = (c_i, c_{i+1})$ для некоторых $1 \leq i \leq N$ и

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : \overline{J_k} \subset I_i,\ \sigma_k > 2^{2/p'+1}\varepsilon\} \leq 3.$$

Следовательно,

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : \sigma_k > 2^{2/p'+1}\varepsilon\} = \sum_{i=0}^{N} \operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : \overline{J_k} \subset I_i,\ \sigma_k > 2^{2/p'+1}\varepsilon\} + 2N$$

$$\leq 3(N+1) + 2N \leq 6N. \quad \square$$

**Лемма 5.** *Для всех* $t > 0$ *выполняется*

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : \sigma_k > t\} \leq 6 \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : a_k(S) \geq t/2^{2/p'+2}\}.$$

Доказательство. Используя оценку [3 с. 23], получаем

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : a_k(S) \geq 1/2\varepsilon\} \geq N(\varepsilon).$$

По лемме 4

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : \sigma_k > t\} \leq 6N(t/c_b) \leq 6 \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : a_k(S) \geq t/2^{2/p'+2}\}. \quad \square$$

Аналогичные леммы справедливы и для оператора $T$.

**Теорема 1.** *Пусть* $1 < \alpha < \infty$. *Тогда*

$$\|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{Z})} \ll \|\{a_k(S)\}\|_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{N})}, \quad \|\{\varkappa_k\}\|_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{Z})} \ll \|\{a_k(T)\}\|_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{N})},$$
$$\|\{\sigma_k\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \ll \|\{a_k(S)\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}, \quad \|\{\varkappa_k\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \ll \|\{a_k(T)\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}.$$

Доказательство теоремы проведем для оператора $S$, для $T$ рассуждения аналогичны. Пусть $\{a_k(S)\} \in \ell^\alpha_\omega(\mathbb{N})$. По лемме 5 имеем

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : \sigma_k > t\} \leq 6 \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : a_k(S) \geq t/2\}.$$

Следовательно,

$$\|\{\sigma_k\}\|^\alpha_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{Z})} \leq 6 \cdot 2^\alpha \|\{a_k(S)\}\|^\alpha_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{N})}.$$

Далее,

$$\|\{\sigma_k\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} = \alpha \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : \sigma_k > t\}\, dt$$

$$\leq 6\alpha \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : a_k(S) \geq t/2\}\, dt = 6 \cdot 2^\alpha \|\{a_k(S)\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}. \quad \square$$

Для доказательства обратных оценок нам необходимы следующие две леммы.

**Лемма 6.** *Пусть $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$, $n_1 < n_2 < n_3$ и $c_0 \in Z_{n_1}$, $x_0 \in Z_{n_2}$, $c_1 \in Z_{n_3}$. Тогда*

$$\left(\int\limits_{\psi(c_0)}^{\psi(x_0)} |u(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{x_0}^{c_1} |v(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le 2^{2/p} \max_{n_2\le n\le n_3} \sigma_n.$$

Доказательство. Имеем

$$\left(\int\limits_{\psi(c_0)}^{\psi(x_0)} |u(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{x_0}^{c_1} |v(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$
$$\le \left(\int\limits_{\psi(\xi_{n_1})}^{\psi(\xi_{n_2+1})} |u(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\xi_{n_2}}^{\xi_{n_3+1}} |v(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$
$$\le 2^{1/p}2^{n_2/p}\left(\frac{\sigma_{n_2}^p}{2^{(n_2)}} + \frac{\sigma_{n_3}^p}{2^{(n_3)}} + \dots\right)^{1/p}$$
$$\le 2^{1/p}2^{n_2/p} \max_{n_2\le n\le n_3} \sigma_n \left(\frac{2}{2^{n_2}}\right)^{1/p} = 2^{2/p} \max_{n_2\le n\le n_3} \sigma_n. \qquad \square$$

**Лемма 7.** *Пусть $I_k = (c_k, c_{k+1})$, $x_k \in I_k$, $J_k = (\psi(c_k), \psi(c_{k+1}))$ и $\xi_n < c_1 < c_2 < \dots < c_l < \xi_{n+1}$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{l}\left(\int\limits_{\psi(c_k)}^{\psi(x_k)} |u(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{x_k}^{c_{k+1}} |v(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le 2^{1/p}(1 - 2^{-p'/p})\sigma_n.$$

Доказательство. Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\sum_{k=1}^{l}\left(\int\limits_{\psi(c_k)}^{\psi(x_k)} |u(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{x_k}^{c_{k+1}} |v(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$
$$\le \sum_{k=1}^{l}\left(\int\limits_{J_k} |u(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{I_k} |v(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$
$$\le \left(\int\limits_{\psi(\xi_n)}^{\psi(\xi_{n+1})} |u|^{p'}\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} |v|^p\right)^{1/p} \le (2^{\frac{(n+1)p'}{p}} - 2^{\frac{(n)p'}{p}})^{1/p}\frac{\sigma_n}{2^{n/p}}$$
$$= 2^{\frac{(n+1)}{p}}(1 - 2^{-p'/p})^{1/p'}\frac{\sigma_n}{2^{n/p}} \le 2^{1/p}\sigma_n. \qquad \square$$

**Теорема 2.** *Пусть операторы $S : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^p(\mathbb{R}^+)$, $T : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^p(\mathbb{R}^+)$, определенные формулами (2) и (3), компактны. Тогда*

$$\|\{a_k(S)\}\|_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{N})} \ll \|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{Z})}, \quad \|\{a_k(T)\}\|_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{N})} \ll \|\{\varkappa_k\}\|_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{Z})},$$

$$\|\{a_k(S)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} \ll \|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}, \quad \|\{a_k(T)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} \ll \|\{\varkappa_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем для оператора $S$, для $T$ рассуждения аналогичны. Пусть $0 < \varepsilon < \|S\|$, $N = N(\varepsilon)$ определяются, как и в [3, с. 23]. Тогда для каждого $c_k$ существует число $j_k$ такое, что $c_k \subset \overline{J_{j_k}}$. Возможны два случая:

1) $j_{k_0} < j_{k_0+1}$,

2) $j_k = j_{k+1} = \dots = j_{k+m_k}$, $I_i \subset J_{j_k}$, $k \le i \le k+m_k$, $m_k > 1$.

Используя леммы 6 и 7, в первом случае получаем

$$\varepsilon = \|S_{I_{k_0}}\| \le C_1 D(I_{k_0}) \le C_1(A_{\psi,1}(I_{k_0}) + A_{\psi,2}(I_{k_0})) \le C \sup_{j_{k_0} \le j \le j_{k_0+1}} \sigma_j \equiv C\sigma_{j_k}$$

для $j_k \in [j_{k_0}, j_{k_0+1}]$ и во втором —

$$\varepsilon m_k = \sum_{i=k}^{k+m_k} \|S_{I_i}\| \le C\sigma_{j_k},$$

$$N(\varepsilon) = \operatorname{card}\left\{k : \sigma_{j_k} \ge \frac{\varepsilon}{C}\right\} + \sum_{k:m_k>1} \operatorname{card}\left\{k : \sigma_{j_k} \ge \frac{\varepsilon m_k}{C}\right\}$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{card}\left\{k : \sigma_k \ge \frac{n\varepsilon}{C}\right\}.$$

Используем результаты из [3, с. 23] в случае $1 < p = q < \infty$. Тогда

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : a_k(S) > \varepsilon\} \le N(\varepsilon) + 1 \le 2N(\varepsilon),$$

$$\|\{a_k(S)\}\|^\alpha_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{N})} = 2\sup_{t>0} t^\alpha N(t)$$
$$\le 2\sup_{t>0} t^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{card}\left\{k \in \mathbb{Z} : \sigma_k \ge \frac{nt}{C}\right\} = 2C^\alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\right) \|\{\sigma_k\}\|^\alpha_{\ell^\alpha_\omega(\mathbb{Z})}.$$

Аналогичный результат может быть получен и для пространств $\ell^\alpha$:

$$\|\{a_k(S)\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} = \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : a_k(S) > t\}\, dt$$
$$\le \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} 2N(t)\, dt \le 2\alpha \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} t^{\alpha-1} \operatorname{card}\infty \left\{k \in \mathbb{Z} : \sigma_k \ge \frac{nt}{C}\right\} dt$$
$$= 2\alpha C^\alpha \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(\frac{tn^\alpha}{C}\right)^{\alpha-1} \operatorname{card}\left\{k : \sigma_k \ge \frac{nt}{C}\right\} d\left(\frac{nt}{C}\right)$$
$$= 2C^\alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\right) \|\{\sigma_k\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \equiv C^\alpha(p)\beta(\alpha)\|\{\sigma_k\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}. \qquad \square$$

Положим

$$J_\alpha = \left( \int_0^\infty \left( \int_0^{\psi(x)} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} \left( \int_x^\infty |v|^p \right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p \, dx \right)^{1/\alpha},$$

$$J'_\alpha = \left( \int_0^\infty \left( \int_0^y |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'-1} \left( \int_{\psi^{-1}(y)}^\infty |v|^p \right)^{\alpha/p} |u(y)|^{p'} \, dy \right)^{1/\alpha}.$$

**Лемма 8.** *Пусть $0 < \alpha < \infty$. Предположим, что $J_\alpha < \infty$ ($J'_\alpha < \infty$). Тогда $J'_\alpha < \infty$ ($J_\alpha < \infty$), и в этом случае $J_\alpha = (p/p')^{1/\alpha} J'_\alpha$.*

Доказательство. Если $0 \le J_\alpha < \infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \left( \int_0^{\psi(x)} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} \left( \int_x^\infty |v|^p \right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p \, dx = 0.$$

Это означает, что

$$\lim_{t\to\infty} \left( \int_0^{\psi(t)} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} \left( \int_t^\infty |v|^q \right)^{\alpha/q} = 0.$$

Интегрированием по частям находим

$$\infty > J_\alpha^\alpha = \frac{p}{\alpha} \int_0^\infty \left( \int_0^{\psi(x)} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} \frac{\alpha}{p} \left( \int_x^\infty |v|^p \right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p \, dx$$

$$= \frac{p}{\alpha} \int_0^\infty \left( \int_0^{\psi(x)} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} d\left( - \int_x^\infty |v|^p \right)^{\alpha/p}$$

$$\ge \frac{p}{\alpha} \int_0^\infty \left( \int_x^\infty |v|^p \right)^{\alpha/p} d\left( \int_0^{\psi(x)} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'}$$

$$= \frac{p}{p'} \int_0^\infty \left( \int_0^x |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'-1} \left( \int_x^\infty |v|^q \right)^{\alpha/q} |u(x)|^{p'} \, dx = \frac{p}{p'} {J'_\alpha}^\alpha.$$

Таким образом,

$$J_\alpha \ge \left( \frac{p}{p'} \right)^{1/\alpha} J'_\alpha,$$

поэтому $J'_\alpha < \infty$. Обратно, предположим, что $J'_\alpha < \infty$. Тогда аналогичные рассуждения показывают, что

$$\lim_{t\to 0} \left( \int_0^t |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} \left( \int_{\psi^{-1}(t)}^\infty |v|^q \right)^{\alpha/q} = 0, \quad J'_\alpha \ge \left( \frac{p'}{p} \right)^{1/\alpha} J_\alpha. \qquad \square$$

Пусть

$$A_\alpha = \Big( \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k^\alpha \Big)^{1/\alpha}.$$

**Теорема 3.** *Если* $0 < \alpha < \infty$, $1 < p < \infty$, *то*

$$A_\alpha \approx J_\alpha \approx J'_\alpha.$$

Доказательство. Последняя эквивалентность следует из леммы 8. Покажем первую. Имеем

$$A_\alpha^\alpha = \sum_k \sigma_k^\alpha \le \sum_k 2^{(k+1)\alpha/p'} \left( \int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} |v(x)|^p \, dx \right)^{\alpha/p}$$

$$\le \sum_k 2^{(k+1)\alpha/p'} \left( \int\limits_{\xi_k}^{\infty} |v(x)|^p \, dx \right)^{\alpha/p}.$$

Обозначим

$$\sum_k 2^{(k+1)\alpha/p'} \left( \int\limits_{\xi_k}^{\infty} |v(x)|^p \, dx \right)^{\alpha/p} = \overline{A}_\alpha^\alpha.$$

Тогда

$$J_\alpha^\alpha = \sum_k \int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left( \int\limits_0^{\psi(x)} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} \left( \int\limits_x^{\infty} |v|^p \right)^{\alpha/p-1} |v|^p \, dx$$

$$\ge \sum_k \int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left( \int\limits_0^{\psi(\xi_k)} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} \left( \int\limits_x^{\infty} |v|^p \right)^{\alpha/p-1} |v|^p \, dx$$

$$= \frac{p}{\alpha} \sum_k 2^{k\alpha/p'} \left[ \left( \int\limits_{\xi_k}^{\infty} |v|^p \right)^{\alpha/p} - \left( \int\limits_{\xi_{k+1}}^{\infty} |v|^p \right)^{\alpha/p} \right]$$

$$\ge \frac{p}{\alpha} 2^{-2\alpha/p'} [2^{\alpha/p'} - 1] \overline{A}_\alpha^\alpha \ge \frac{p}{\alpha} 2^{-2\alpha/p'} [2^{\alpha/p'} - 1] A_\alpha^\alpha,$$

$$J_\alpha^\alpha \ge \frac{p}{\alpha 2^{2\alpha/p'}} [2^{\alpha/p'} - 1] A_\alpha^\alpha.$$

Следовательно,

$$A_\alpha = \Big( \sum_k \sigma_k^\alpha \Big)^{1/\alpha} \le \left[ \frac{\alpha 2^{2\alpha/p'}}{p(2^{\alpha/p'} - 1)} \right]^{1/\alpha} J_\alpha, \quad 0 < \alpha < \infty.$$

Для доказательства обратного неравенства предположим, что $0 < \alpha \le p$. Тогда

$$\frac{\alpha}{p} \le 1, \quad \frac{\alpha}{p} - 1 \le 0,$$

и если

$$\int\limits_x^{\xi_{k+1}} |v|^p \le \int\limits_x^{\infty} |v|^p,$$

получаем

$$\left(\int_x^\infty |v|^p\right)^{\alpha/p-1} \le \left(\int_x^{\xi_{k+1}} |v|^p\right)^{\alpha/p-1},$$

$$\left(\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} |v|^p\right)^{\frac{\alpha}{p}} = \alpha/p \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_x^{\xi_{k+1}} |v|^p\right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p\,dx$$

$$\ge \frac{\alpha}{p} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_x^\infty |v|^p\right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p\,dx.$$

Итак,

$$\left(\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} |v|^p\right)^{\alpha/p} \ge \frac{\alpha}{p} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_x^\infty |v|^p\right)^{\frac{\alpha}{p}-1} |v(x)|^p\,dx,$$

$$\sum_k 2^{k\alpha/p'} \left(\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} |v|^p\right)^{\alpha/p} \ge \frac{\alpha}{p} \sum_k 2^{k\alpha/p'} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_x^\infty |v|^p\right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p\,dx,$$

$$A_\alpha^\alpha \ge \frac{\alpha}{p} \sum_k \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} 2^{k\alpha/p'} 2^{\alpha/p'} 2^{-\alpha/p'} \left(\int_x^\infty |v|^p\right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p\,dx$$

$$= \frac{\alpha}{p} \sum_k 2^{-\alpha/p'} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} 2^{(k+1)\alpha/p'} \left(\int_x^\infty |v|^p\right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p\,dx$$

$$\left(\text{заметим: } 2^{(k+1)\alpha/p'} = \left(\int_0^{\psi(\xi_{k+1})} |u|^{p'}\right)^{\alpha/p'} \ge \left(\int_0^{\psi(x)} |u|^{p'}\right)^{\alpha/p'}, \quad \xi_k \le x \le \xi_{k+1}\right)$$

$$\ge \frac{\alpha}{p} 2^{-\alpha/p'} \sum_k \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_0^{\psi(x)} |u|^{p'}\right)^{\alpha/p'} \left(\int_x^\infty |v|^p\right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p\,dx$$

$$= \frac{\alpha}{p} 2^{-\alpha/p'} \int_0^\infty \left(\int_0^{\psi(x)} |u|^{p'}\right)^{\alpha/p'} \left(\int_x^\infty |v|^p\right)^{\alpha p-1} |v(x)|^p\,dx = \frac{\alpha}{p} 2^{-\alpha/p'} J_\alpha^\alpha.$$

Получаем

$$\left(\frac{\alpha}{p 2^{\alpha/p'}}\right)^{1/\alpha} J_\alpha \le \left(\sum_k \sigma_k^\alpha\right)^{1/\alpha}, \quad 0 < \alpha \le p.$$

Рассмотрим случай, когда $1 < p < \alpha < \infty$. Имеем

$$J_\alpha^\alpha = \sum_k \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_0^{\psi(x)} |u|^{p'}\right)^{\alpha/p'} \left(\int_x^\infty |v|^p\right)^{\alpha/p-1} |v|^p\,dx$$

$$\leq \sum_k \int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left( \int\limits_0^{\psi(\xi_{k+1})} |u|^{p'} \right)^{s/p'} \left( \int\limits_x^{\infty} |v|^p \right)^{\alpha/p-1} |v|^p \, dx$$

$$= \sum_k \int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} 2^{(k+1)\alpha/p'} \left( \int\limits_x^{\infty} |v|^p \right)^{\alpha/p-1} |v|^p \, dx$$

$$= \frac{p}{\alpha} \sum_k 2^{(k+1)\alpha/p'} \left[ \left( \int\limits_{\xi_k}^{\infty} |v|^p \right)^{\alpha/p} - \left( \int\limits_{\xi_{k+1}}^{\infty} |v|^p \right)^{\alpha/p} \right] \leq \frac{p}{s} \sum_k 2^{(k+1)\alpha/p'} \left( \int\limits_{\xi_k}^{\infty} |v|^p \right)^{\alpha/p}.$$

Пусть $\theta = p/2p'$. Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int\limits_{\xi_k}^{\infty} |v|^p = \sum_{m \geq k} \int\limits_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} |v|^p = \sum_{m \geq k} \left[ 2^{\theta m} \int\limits_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} |v|^p \right] 2^{-\theta m}$$

$$\leq \left[ \sum_{m \geq k} 2^{\frac{\theta m \alpha}{p}} \left( \int\limits_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} |v|^p \right)^{\alpha/p} \right]^{p/\alpha} \left[ \sum_{m \geq k} 2^{-\theta m \cdot \frac{\alpha}{\alpha - p}} \right]^{1-p/\alpha}$$

$$= C_1 2^{-k\theta} \left[ \sum_{m \geq k} 2^{\frac{\theta m \alpha}{p}} \left( \int\limits_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} |v|^p \right)^{\alpha/p} \right]^{p/\alpha},$$

где $C_1 = \frac{2^{\theta}}{(2^{\frac{\theta\alpha}{\alpha-p}} - 1)^{\frac{\alpha-p}{\alpha}}}$. Следовательно,

$$J_\alpha^\alpha \leq \frac{p}{\alpha} \sum_k 2^{(k+1)\alpha/p'} C_1^{\alpha/p} 2^{\frac{-k\theta\alpha}{p}} \sum_{m \geq k} 2^{\frac{\theta m \alpha}{p}} \left( \int\limits_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} |v|^p \right)^{\alpha/p}$$

$$= C_2 \sum_k 2^{\frac{k\alpha}{2p'}} \sum_{m \geq k} 2^{\frac{ms}{2p'}} \left( \int\limits_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} |v|^p \right)^{\alpha/p},$$

где

$$C_2 = \frac{p}{\alpha} \cdot \frac{2^{3\alpha/2p'}}{(2^{\frac{p\alpha}{2p'(\alpha-p)}} - 1)^{\frac{\alpha}{p}-1}}.$$

Далее,

$$C_2 \sum_k 2^{\frac{k\alpha}{2p'}} \sum_{m \geq k} 2^{\frac{m\alpha}{2p'}} \left( \int\limits_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} |v|^p \right)^{\alpha/p} = C_2 \sum_m 2^{\frac{m\alpha}{2p'}} \left( \int\limits_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} |v|^p \right)^{\alpha/p} \sum_{k \leq m} 2^{\frac{k\alpha}{2p'}} \leq C_3 A_\alpha^\alpha,$$

где

$$C_3 = \frac{p}{\alpha} \cdot \frac{2^{2\alpha/p'}}{(2^{\frac{p\alpha}{2p'(\alpha-p)}} - 1)^{\frac{\alpha}{p}-1} (2^{\frac{\alpha}{2p'}} - 1)}.$$

Итак,

$$J_\alpha \le C_3^{1/\alpha} A_\alpha, \quad 1 < p < \alpha < \infty,$$

и мы получаем требуемую эквивалентность

$$\Big(\sum_k \sigma_k^\alpha\Big)^{1/\alpha} \approx \left(\int_0^\infty \left(\int_0^{\psi(x)} |u|^{p'}\right)^{\alpha/p'} \left(\int_x^\infty |v|^p\right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p\,dx\right)^{1/\alpha}. \qquad \square$$

**Следствие 1.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \alpha < \infty$ *и* $S : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^p(\mathbb{R}^+)$ *— компактный оператор* (2). *Тогда*

$$\Big(\sum_n a_n^\alpha(S)\Big)^{1/\alpha} \approx \left(\int_0^\infty \left(\int_0^{\psi(x)} |u|^{p'}\right)^{\alpha/p'} \left(\int_x^\infty |v|^p\right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{11}$$

Положим

$$I_\alpha = \left(\int_0^\infty \left(\int_{\varphi(x)}^\infty |u|^{p'}\right)^{\alpha/p'} \left(\int_0^x |v|^p\right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p\,dx\right)^{1/\alpha},$$

$$I'_\alpha = \left(\int_0^\infty \left(\int_y^\infty |u|^{p'}\right)^{\alpha/p'-1} \left(\int_0^{\varphi^{-1}(y)} |v|^p\right)^{\alpha/p} |u(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/\alpha}.$$

**Лемма 9.** *Пусть* $0 < \alpha < \infty$, $1 < p < \infty$, *и предположим, что* $I_\alpha < \infty$ ($I'_\alpha < \infty$), *тогда* $I'_\alpha < \infty$ ($I_\alpha < \infty$), *и в этом случае* $I_\alpha = (\frac{p}{p'})^{1/\alpha} I'_\alpha$.

Доказательство. Лемма 9 доказывается аналогично лемме 8.

Пусть

$$B_\alpha = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varkappa_k^\alpha\Big)^{1/\alpha}.$$

**Теорема 4.** *Если* $0 < \alpha < \infty$, $1 < p < \infty$, *то*

$$B_\alpha \approx I_\alpha \approx I'_\alpha.$$

Доказательство. Теорема 4 доказывается аналогично теореме 3.

**Следствие 2.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \alpha < \infty$ *и* $T : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^p(\mathbb{R}^+)$ *компактен. Тогда*

$$\Big(\sum_n a_n^\alpha(T)\Big)^{1/\alpha} \approx \left(\int_0^\infty \left(\int_{\varphi(x)}^\infty |u(y)|^{p'}\,dy\right)^{\alpha/p'} \left(\int_0^x |v(t)|^p\,dt\right)^{\frac{\alpha}{p}-1} |v(x)|^p\,dx\right)^{1/\alpha}. \tag{12}$$

Используя лемму 2.2 из [1], получаем

$$\|\{a_k(H)\}\|_{\ell^\alpha}^\alpha \le \sum_m \|\{a_k(\Psi_m)\}\|_{\ell^\alpha}^\alpha + \sum_m \|\{a_k(\Phi_m)\}\|_{\ell^\alpha}^\alpha$$

$$\le \sum_m \int_{\zeta_m}^{\zeta_{m+1}} \left(\int_{\psi(\zeta_m)}^{\psi(x)} |u|^{p'}\right)^{\alpha/p'} \left(\int_x^{\zeta_{m+1}} |v|^p\right)^{\alpha/p-1} |v(x)|^p\,dx$$

$$+\sum_m \int\limits_{\zeta_m}^{\zeta_{m+1}} \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(\zeta_{m+1})} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} \left( \int\limits_{\zeta_m}^{x} |v|^p \right)^{\alpha p-1} |v(x)|^p \, dx$$

$$\le \sum_m \int\limits_{\Delta_m} \left( \int\limits_{\Delta_m} |v|^p \right)^{\alpha/p-1} \left\{ \left( \int\limits_{\psi(\zeta_m)}^{\psi(x)} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} + \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(\zeta_{m+1})} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} \right\} |v(x)|^p \, dx$$

$$\le 2 \sum_m \left( \int\limits_{\Delta_m} |v|^p \right)^{\alpha/p-1} \int\limits_{\Delta_m} \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} |v(x)|^p \, dx.$$

Таким образом, мы получили верхнюю оценку для компактного оператора $H$ с переменными пределами интегрирования

$$\|\{a_k(H)\}\|_{\ell^\alpha}^\alpha \ll \sum_m \left( \int\limits_{\Delta_m} |v|^p \right)^{\frac{\alpha}{p}-1} \int\limits_{\Delta_m} \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} |u|^{p'} \right)^{\alpha/p'} |v(x)|^p \, dx, \qquad (13)$$

где $\Delta_m = [\zeta_m, \zeta_{m+1})$ — специальное разбиение (9).

**Лемма 10.** *Пусть $B : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$ — компактный оператор, имеющий блочно-диагональное разложение $B = \sum\limits_k B_k$. Обозначим*

$$|B| = (B^* B)^{1/2} = \sum_k (B_k^* B_k)^{1/2},$$

*$\sigma(|B|)$ и $\sigma(|B_k|)$ — спектры операторов $|B|$ и $|B_k|$ соответственно. Тогда*

$$\sigma(|B|) = \bigcup_k \sigma(|B_k|).$$

Доказательство. Сначала мы покажем вложение

$$\sigma(|B|) \subset \bigcup_k \sigma(|B_k|).$$

Пусть $\lambda_n \in \sigma(|B|)$. Тогда существует собственная функция $f_n$ такая, что $|B| f_n = \lambda_n f_n$. Выберем

$$f_n = \sum_k f_{n,k}, \quad \text{где } \mathbb{R}^+ = \bigcup_k \Delta_k, \ \operatorname{supp} f_{n,k} \subset \Delta_k.$$

Имеем

$$|B| f_n = |B| \sum_k f_{n,k} = \sum_k |B_k| f_{n,k} = \lambda_n \sum_k f_{n,k}.$$

Если $x \in \Delta_k$, $f_{n,k} \neq 0$, то $|B_k| f_{n,k} = \lambda_n f_{n,k}$, а это означает, что $\lambda_n \in \sigma(|B_k|)$ и $\lambda_n \in \bigcup\limits_k \sigma(|B_k|)$.

Обратно, если $\lambda_n \in \sigma(|B_k|)$, то существует собственная функция $f_{n,k}$ такая, что

$$|B_k| f_{n,k} = \lambda_n f_{n,k}, \quad \operatorname{supp} f_{n,k} \in \Delta_k, \quad \sum_k |B_k| f_{n,k} = \lambda_n \sum_k f_{n,k}.$$

Мы получили, что $|B|f_n = \lambda_n f_n$, т. е. $\lambda_n \in \sigma(|B|)$ с собственной функцией $f_n = \sum\limits_k f_{n,k}$. $\square$

Лемма 10 показывает, что для оператора $H : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$ выполнено равенство

$$n(\varepsilon, a(H)) = \sum_k n(\varepsilon, a(H_k)). \tag{14}$$

В силу блочно-диагонального представления (10) оператора $H$ и предложения 6 из [4, с. 123] для $1 < \alpha < \infty$ будет

$$\|\Psi\|_{S_\alpha} \leq \|H\|_{S_\alpha}, \quad \|\Phi\|_{S_\alpha} \leq \|H\|_{S_\alpha}.$$

Тогда

$$\|\{a_n(\Psi)\}\|_{\ell^\alpha}^\alpha = \sum_n^\infty a_n^\alpha(\Psi) = \alpha \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} n(t, a(\Psi))\, dt$$

$$= \alpha \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \sum_{k=1}^\infty n(t, a(\Psi_k))\, dt = \sum_{k=1}^\infty \alpha \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} n(t, a(\Psi_k))\, dt = \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty a_n^\alpha(\Psi_k).$$

Итак,

$$\|\{a_n(\Psi)\}\|_{\ell^\alpha}^\alpha \gg \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \left( \int\limits_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(x)} u^2(y)\, dy \right)^{\alpha/2} \left( \int\limits_x^{\zeta_{k+1}} v^2(x)\, dx \right)^{\alpha/2-1} v^2(x)\, dx$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{\Delta_k} \left( \int\limits_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(x)} u^2(y)\, dy \right)^{\alpha/2} \left( \int\limits_x^{\zeta_{k+1}} v^2(x)\, dx \right)^{\alpha/2-1} v^2(x)\, dx,$$

а также

$$\|\{a_n(\Phi)\}\|_{\ell^\alpha}^\alpha \gg \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{\Delta_k} \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(\zeta_{k+1})} u^2(y)\, dy \right)^{\alpha/2} \left( \int\limits_{\zeta_k}^{x} v^2(x)\, dx \right)^{\alpha/2-1} v^2(x)\, dx.$$

На основании рассуждений, проведенных выше, получим следующий результат.

**Теорема 5.** *Пусть оператор $H : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$ компактен и $1 < \alpha < \infty$. Тогда*

$$\|H\|_{\mathcal{S}_\alpha} \approx \left( \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{\Delta_k} \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(\zeta_{k+1})} u^2(y)\, dy \right)^{\alpha/2} \left( \int\limits_{\zeta_k}^{x} v^2(x)\, dx \right)^{\alpha/2-1} v^2(x)\, dx \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{\Delta_k} \left( \int\limits_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(x)} u^2(y)\, dy \right)^{\alpha/2} \left( \int\limits_x^{\zeta_{k+1}} v^2(x)\, dx \right)^{\alpha/2-1} v^2(x)\, dx \right)^{1/\alpha}. \tag{15}$$

Замечание. При $\alpha = 2$ в предыдущей формуле имеет место равенство в соответствии с известной формулой Гильберта — Шмидта, а при $2 < \alpha < \infty$ (15) имеет более компактный вид.

Для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ оператора (1) определим *фарватер-функцию* $\sigma(x)$ такую, что $\varphi(x) < \sigma(x) < \psi(x)$ и

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\sigma(x)} u^2(y)\,dy = \int\limits_{\sigma(x)}^{\psi(x)} u^2(y)\,dy$$

для любого $x \in \mathbb{R}^+$.

**Следствие 3.** *Пусть оператор* $H : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$ *компактен и* $2 < \alpha < \infty$. *Тогда*

$$\|H\|_{\mathcal{S}_\alpha} \approx \left( \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} u^2(y)\,dy \right)^{\alpha/2} \left( \int\limits_{\psi^{-1}(\sigma(x))}^{\varphi^{-1}(\sigma(x))} v^2(t)\,dt \right)^{\alpha/2-1} v^2(x)\,dx \right)^{1/\alpha}. \quad (16)$$

Доказательство. По теореме 2 из [5, с. 301], полагая

$$s = \alpha - 1, \quad p = \frac{2(\alpha-1)}{\alpha-2}, \quad \alpha > 2, \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p},$$

получаем

$$\|H\|^\alpha_{\mathcal{S}_\alpha} \approx \sum_{k=1}^\infty \left( \int\limits_{\Delta_k} \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(\zeta_{k+1})} \left( u^{\frac{2(1-p)}{p}}(y) \right)^{-p'} dy \right)^{s/p'} \left( \int\limits_{\zeta_k}^{x} v^2(t)\,dt \right)^{s/2-1} v^2(x)\,dx \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Delta_k} \left( \int\limits_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(x)} \left( u^{\frac{2(1-p)}{p}}(y) \right)^{-p'} dy \right)^{s/p'} \left( \int\limits_{x}^{\zeta_{k+1}} v^2(t)\,dt \right)^{s/2-1} v^2(x)\,dx \right)$$

$$\approx \|\overline{H}\|^s_{L^p(\mathbb{R}^+)\to L^2(\mathbb{R}^+)},$$

где оператор $\overline{H}$ имеет вид

$$\overline{H}f(x) = v(x) \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y) u^{\frac{2(1-p)}{p}}(y)\,dy.$$

По теореме 1 из [5, с. 300]

$$\|\overline{H}\|^s_{L^p\to L^2} \approx \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (u^{\frac{2(1-p)}{p}})^{-p'} \right)^{s/p'} \left( \int\limits_{\psi^{-1}(\sigma(x))}^{\varphi^{-1}(\sigma(x))} v^2 \right)^{s/2-1} v^2(x)\,dx$$

$$\approx \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} u^2(y)\,dy \right)^{\alpha/2} \left( \int\limits_{\psi^{-1}(\sigma(x))}^{\varphi^{-1}(\sigma(x))} v^2(t)\,dt \right)^{\alpha/2-1} v^2(x)\,dx,$$

что и доказывает следствие 3. $\square$

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Ломакина Е. Н.* Оценки аппроксимативных чисел одного класса интегральных операторов. I // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 1. С. 178–192.
2. *Lomakina E., Stepanov V.* On asympotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten-von Neumann norms of Hardy-type integral operators // Function Spaces and Applications. New Delhi (India): Narosa Publ. House, 2000. P. 153–200.
3. *Ломакина Е. Н., Степанов В. Д.* Об асимптотическом поведении аппроксимативных чисел и оценках норм Шаттена — фон Неймана для интегрального оператора Харди // Докл. РАН. 1999. Т. 367, № 5. С. 594–596.
4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
5. *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Тр. Мат. ин-та. им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 232, № 5. С. 298–317.


*Статья поступила 13 февраля 2002 г.*

*Ломакина Елена Николаевна*
*Вычислительный центр ДВО РАН, ул. Тихоокеанская, 153, Хабаровск 680042*
lomakina@as.khb.ru