Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2003. Том 44, № 3

УДК 517.53

О ВЛИЯНИИ АРГУМЕНТОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТЕПЕННОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ НА РОСТ ЕЕ МАКСИМУМА МОДУЛЯ

П. В. Филевич

Аннотация: Исследован следующий вопрос: как быстро может расти максимум модуля одной целой функций в сравнении с максимумом модуля другой, если соответственные коэффициенты Тейлора обеих функций равны по модулю?

Ключевые слова: целая функция, максимум модуля, степенной ряд

§ 1. Введение

Одной из классических задач теории целых функций является задача об установлении связи между ростом максимума модуля целой функции и поведением модулей коэффициентов ее степенного ряда или, обобщенно, ряда Дирихле с фиксированной последовательностью показателей. Для степенных рядов эта связь изучалась еще в работах А. Коши, Э. Бореля, Ж. Адамара и Э. Линделёфа, в результате чего возникли такие понятия, как порядок, тип, уточненный и обобщенный порядки целой функции (см., например, [1, с. 12–15, 46–60]). Относительно рядов Дирихле сформулированная задача рассматривалась, например, в работах [2; 3, с. 23–34] (см. также библиографию в [2]).

Как отмечено в [2], несмотря на большое количество работ, посвященных данной задаче, она все еще далека от полного решения. Естественно предположить, что трудности, возникающие при ее решении, в определенной мере объясняются тем, что максимум модуля целой функции зависит не только от модулей, но и от аргументов коэффициентов ее разложения в ряд. Насколько существенной является эта зависимость? Один из возможных подходов к получению ответа на этот вопрос для степенных рядов рассматривался в работе [4].

Суть этого подхода такова. Если $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ — максимум модуля целой функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.1}$$

а

$$G_f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n,$$

то, с одной стороны, $M_f(r) \le G_f(r)$, а с другой — $G_f(r)$ является максимумом модуля целой функции

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n.$$

Следовательно, вопрос о том, насколько существенно влияют аргументы коэффициентов ряда (1.1) на рост его максимума модуля, можно свести к следующему: как быстро в сравнении с $M_f(r)$ может расти $G_f(r)$?

В случае целых степенных рядов конечного логарифмического порядка, т. е. таких, что

$$\rho_f^* := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\ln r} < +\infty,$$

ответ на последний вопрос дает

Теорема A [4]. *Пусть $l(r)$ — выпуклая относительно $\ln r$ функция и $\alpha \in (0;+\infty)$. Для того чтобы для любой целой функции (1.1) такой, что $\ln G_f(r) \le l(r)$, $r \ge r_0$, выполнялось соотношение*

$$\Delta_f := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln G_f(r) - \ln M_f(r)}{\ln\ln M_f(r)} \le \alpha, \tag{1.2}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln l(r)}{\ln\ln r} \le 2\alpha + 1.$$

Пусть C_+ — класс непрерывных положительных на $(-\infty;+\infty)$ функций, а L — подкласс возрастающих к $+\infty$ функций из класса C_+.

Обозначим через $\mathscr{A}$ класс всех трансцендентных целых функций вида (1.1) и, следуя работе [5], через $\mathscr{A}_\psi$, где $\psi \in L$, — подкласс функций из $\mathscr{A}$ вида (1.1), для которых

$$|a_n| \le \exp\{-n\psi(n)\}, \quad n \ge n_0(f). \tag{1.3}$$

Используя известную формулу

$$\rho_f^* = 1 + \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\bigl(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{|a_n|}\bigr)}$$

для вычисления логарифмического порядка целой функции (1.1) через ее коэффициенты, несложно показать, что теорема A является равносильной следующей теореме.

Теорема B. *Пусть $\psi \in L$, $\beta \in (0;+\infty)$. Для того чтобы для любой целой функции $f \in \mathscr{A}_\psi$ выполнялось соотношение $\Delta_f \le \beta$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\psi(n)} \le 2\beta.$$

В связи с теоремами A и B в настоящей работе рассматривается и решается задача об установлении условий на поведение последовательности $\{|a_n|\}_{n=0}^{\infty}$, при которых для функции $f \in \mathscr{A}$ вида (1.1) выполняется более общее, нежели (1.2), соотношение

$$G_f(r) = O(M_f(r)h(\ln M_f(r))), \quad r \to +\infty, \tag{1.4}$$

где $h \in C_+$. Кроме того, мы получим условия выполнения соотношения

$$\varphi(\ln G_f(r)) \sim \varphi(\ln M_f(r)), \quad r \to +\infty, \tag{1.5}$$

где $\varphi \in L$.

Отметим, что при доказательстве теоремы A в работе [4] предложен вероятностный подход, базирующийся на понятии случайной целой функции и идеях из работ [6–8]. В отличие от соотношения (1.2) установить необходимое и достаточное условие выполнения соотношения (1.4) с помощью вероятностных рассуждений не удалось. Тем не менее такое условие найдено другим путем, а именно с использованием простого результата для тригонометрических полиномов из работы [9] (см. приведенную ниже лемму 1).

§ 2. Формулировки основных результатов

Относительно соотношения (1.4) имеет место

Теорема 1. *Пусть $h \in C_+$ и $\psi \in L$. Для того чтобы для любой целой функции $f \in \mathscr{A}_\psi$ имело место соотношение* (1.4), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$(\forall \gamma \in L) \quad \sqrt{x} = O(h(\gamma(x)\psi(x))), \quad x \to +\infty. \tag{2.1}$$

Теорема 1 является следствием из таких двух теорем.

Теорема 2. *Пусть $h \in C_+$, $\psi \in L$. Если*

$$(\forall \gamma \in L) \quad \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{h(\gamma(x)\psi(x))} \leq 1, \tag{2.2}$$

то для любой целой функции $f \in \mathscr{A}_\psi$ выполняется соотношение

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{G_f(r)}{M_f(r)h(\ln M_f(r))} \leq 1.$$

Теорема 3. *Пусть $h \in C_+$, $\psi \in L$. Если условие* (2.2) *не выполняется, то существуют целая функция $f \in \mathscr{A}_\psi$ такая, что*

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{G_f(r)}{M_f(r)h(\ln M_f(r))} > \frac{\sqrt{2}-1}{2}. \tag{2.3}$$

Для доказательства необходимости в теореме 1 достаточно заметить, что если условие (2.1) не выполняется, то существуют функции $\gamma, l \in L$ такие, что

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{h(\gamma(x)\psi(x))l(\gamma(x)\psi(x))} > 1,$$

а поэтому не выполняется условие (2.2) с функцией $h(x)l(x)$ вместо $h(x)$. Тогда по теореме 3 существует целая функция $f \in \mathscr{A}_\psi$, для которой

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{G_f(r)}{M_f(r)h(\ln M_f(r))l(\ln M_f(r))} > \frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

т. е. соотношение (1.4) для f не имеет места.

Доказательство достаточности в теореме 1 может быть проведено следующим образом. Вначале покажем, что из (2.1) следует равномерное выполнение соотношения $\sqrt{x} = O(h(\gamma(x)\psi(x)))$, $x \to +\infty$, по всем $\gamma \in L$, а именно

$$(\exists c > 0)(\forall \gamma \in L) \quad \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{h(\gamma(x)\psi(x))} \leq c. \tag{2.4}$$

Действительно, если (2.4) не выполняется, то

$$(\forall c > 0)(\exists \gamma \in L) \quad \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{h(\gamma(x)\psi(x))} > c,$$

откуда вытекает существование возрастающих к $+\infty$ последовательностей $\{c_k\}_{k=0}^\infty$, $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ и $\{\gamma_k\}_{k=0}^\infty$ таких, что $\sqrt{x_k} > c_k h(\gamma_k \psi(x_k))$, $k \geq 0$. Рассматривая функцию $\gamma \in L$, для которой $\gamma(x_k) = \gamma_k$, $k \geq k_0$, видим, что не выполняется и соотношение (2.1). Таким образом, если имеет место (2.1), то имеет место и (2.4), поэтому по теореме 2 для любой целой функции $f \in \mathscr{A}_\psi$

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{G_f(r)}{M_f(r)h(\ln M_f(r))} \le c,$$

т. е. выполняется (1.4).

Замечание 1. Пусть, например, $h(x) \equiv 1$. Тогда (2.1) не выполняется, значит, из теоремы 1 можем сделать вывод, что в любом классе $\mathscr{A}_\psi$, $\psi \in L$, найдется функция f, для которой

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{G_f(r)}{M_f(r)} = +\infty.$$

Замечание 2. В случае, когда h — неубывающая функция, условие (2.1) равносильно, как легко видеть, условию

$$(\exists\varepsilon > 0) \quad \sqrt{x} = O(h(\varepsilon\psi(x))), \quad x \to +\infty. \tag{2.5}$$

Замечание 3. Для любой $h \in L$ несложно указать функцию $\psi \in L$ такую, что условие (2.5) не выполняется (например, если $\psi(x^3) = o(h^{-1}(x))$, $x \to +\infty$). Тогда по теореме 1 найдется функция $f \in \mathscr{A}_\psi$, для которой соотношение (1.4) не имеет места. Отсюда можем сделать такой вывод: для любой функции $l \in L$, какой бы быстро растущей она ни была, найдутся целые функции f и g, коэффициенты с одинаковыми номерами в степенных разложениях которых по модулю равны, но тем не менее

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{M_g(r)}{l(M_f(r))} = +\infty.$$

Замечание 4. Теорема B (а значит, теорема A), как нетрудно доказать, вытекает из теорем 2 и 3 (или из теоремы 1).

Из теорем 2 и 3 получим также приведенные ниже теоремы 4 и 5, в которых указаны условия выполнения соотношения (1.5).

Теорема 4. *Пусть $\varphi, \psi \in L$. Если*

$$\varphi(t+1) \sim \varphi(t), \quad t \to +\infty, \tag{2.6}$$

то для того чтобы для любой целой функции $f \in \mathscr{A}_\psi$ имело место соотношение (1.5), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$(\forall\gamma \in L) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi\left(\gamma(x)\psi(x) + \ln\sqrt{x}\right)}{\varphi(\gamma(x)\psi(x))} = 1. \tag{2.7}$$

Теорема 5. *Пусть $\varphi \in L$. Для того чтобы существовала функция $\psi \in L$ такая, что для любой целой функции $f \in \mathscr{A}_\psi$ имеет место соотношение* (1.5), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (2.6).

§ 3. Доказательство теоремы 2

Для любой целой функции $f \in \mathscr{A}$ вида (1.1) введем обозначение

$$S_f(r) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right)^{1/2}.$$

Тогда согласно равенству Парсеваля

$$S_f(r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt \right)^{1/2} \leq M_f(r).$$

Пусть $h \in C_+$, $\psi \in L$ и выполняется условие (2.2). Предположим вопреки утверждению теоремы, что существуют целая функция $f \in \mathscr{A}_\psi$ вида (1.1), число $\delta > 0$ и возрастающая к $+\infty$ последовательность $\{r_p\}_{p=0}^\infty$, для которых

$$G_f(r_p) \geq (1+\delta) M_f(r_p) h(\ln M_f(r_p)), \quad p \geq 0. \tag{3.1}$$

Положим $n(r) = \min\{n \geq 0 : \psi(n) \geq 2 \ln r\}$ для всех $r > 0$. Отметим, что $n(r)$ является неубывающей на $(0; +\infty)$, стремящейся к $+\infty$ при $r \to +\infty$ функцией. Кроме того, из условия (2.2) следует, что

$$(\forall \gamma \in L) \quad \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\sqrt{n(r) - 1}}{h(\gamma(n(r)-1)\psi(n(r)-1))} \leq 1. \tag{3.2}$$

Далее, поскольку $\ln r = o(\ln M_f(r))$, $r \to +\infty$, для каждой трансцендентной целой функции f, при $r \to +\infty$ имеем

$$\psi(n(r) - 1) < 2 \ln r = o(\ln M_f(r)).$$

Следовательно, существуют функция $\gamma \in L$ и подпоследовательность $\{r_{p_k}\}_{k=0}^\infty$ последовательности $\{r_p\}_{p=0}^\infty$ такие, что, во-первых, $n(r_{p_0}) \geq n_0(f)$ и $r_{p_0} > 2$ ($n_0(f)$ — число из условия (1.3)) и, во-вторых, выполняется равенство

$$\gamma(n(r_{p_k}) - 1) = \frac{\ln M_f(r_{p_k})}{\psi(n(r_{p_k}) - 1)}, \quad k \geq 0. \tag{3.3}$$

Пусть теперь r — любое число из интервала $(2; +\infty)$, для которого $n(r) \geq n_0(f) \geq 0$ (заметим, что такими являются все r_{p_k}). Тогда, воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского и условием (1.3), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} G_f(r) &= \sum_{n < n(r)} |a_n| r^n + \sum_{n \geq n(r)} |a_n| r^n \\ &\leq \sqrt{n(r)} \Big(\sum_{n < n(r)} |a_n|^2 r^{2n} \Big)^{1/2} + \sum_{n \geq n(r)} e^{-n\psi(n)} r^n \\ &\leq S_f(r)\sqrt{n(r)} + \sum_{n \geq n(r)} e^{-2n \ln r} r^n \leq M_f(r)\sqrt{n(r)} + \sum_{n \geq 0} 2^{-n} \leq M_f(r)\sqrt{n(r)} + 2. \end{aligned}$$

Отсюда, а также из равенств (3.2) и (3.3) получаем

$$\begin{aligned} \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{G_f(r_{p_k})}{M_f(r_{p_k}) h(\ln M_f(r_{p_k}))} &\leq \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{M_f(r_{p_k})\sqrt{n(r_{p_k})} + 2}{M_f(r_{p_k}) h(\gamma(n(r_{p_k}) - 1)\psi(n(r_{p_k}) - 1))} \\ &= \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\sqrt{n(r_{p_k}) - 1}}{h(\gamma(n(r_{p_k}) - 1)\psi(n(r_{p_k}) - 1))} \leq 1, \end{aligned}$$

а это противоречит предположению о справедливости (3.1). Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 3

Нам будут нужны следующие вспомогательные леммы, первая из которых является частным случаем одного результата для мер Рудина — Шапиро (см. [9, с. 46]), а вторая носит элементарный характер.

Лемма 1 [9, с. 46]. *Для любого натурального числа n существуют числа $e_0(n)$, $e_1(n)$, ... , $e_{n-1}(n)$ из множества $\{-1; 1\}$ такие, что*

$$\max_{t\in[0;2\pi]}\left|e_0(n)+e_1(n)e^{it}+\dots+e_{n-1}(n)e^{i(n-1)t}\right|\le 2\sqrt{n}/(\sqrt{2}-1).$$

Лемма 2. *Пусть $\alpha\in C([a;b]\times[c;d])$ и $\beta(x)=\max\{\alpha(x,y) : y\in[c;d]\}$. Тогда $\beta\in C[a;b]$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$. Из непрерывности функции α на компакте $P=[a;b]\times[c;d]$ вытекает ее равномерная непрерывность на P, т. е.

$$(\exists\delta>0)(\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in P)$$
$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2<\delta^2\Rightarrow|\alpha(x_1,y_1)-\alpha(x_1,y_1)|<\delta.$$

Следовательно, если $x_1,x_2\in[a;b]$ и $|x_1-x_2|<\delta$, то при некоторых $y_1,y_2\in[c;d]$ имеем

$$\beta(x_1)=\alpha(x_1,y_1)<\alpha(x_2,y_1)+\varepsilon,\quad \beta(x_2)=\alpha(x_2,y_2)<\alpha(x_1,y_2)+\varepsilon.$$

Поэтому

$$\beta(x_1)-\beta(x_2)<\alpha(x_2,y_1)+\varepsilon-\beta(x_2)\le\varepsilon,\quad \beta(x_2)-\beta(x_1)<\alpha(x_1,y_2)+\varepsilon-\beta(x_1)\le\varepsilon,$$

т. е. $|\beta(x_1)-\beta(x_2)|<\varepsilon$. Таким образом, β равномерно непрерывна на $[a;b]$. Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы 3. Пусть $h\in C_+$, $\psi\in L$ и условие (2.2) не выполняется. Тогда существуют функция $\gamma\in L$ и число $\varepsilon>0$, для которых

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{[x]}}{h(\gamma(x)\psi(x))}>1+\varepsilon; \tag{4.1}$$

здесь и ниже $[x]$ — целая часть x. Построим пример целой функции $f\in\mathscr{A}_\psi$, для которой имеет место соотношение (2.3).

Вначале заметим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-n\psi(n)}z^n$ сходится в $\mathbb{C}$, а поэтому для любых $\delta>0$ и $x>0$ существует натуральное число $P(\delta,x)$ такое, что

$$\sum_{n\ge P(\delta,x)}e^{-n\psi(n)}x^n<\delta.$$

Кроме того, для каждого $x>0$ через $\delta(x)$ обозначим любое фиксированное число такое, что $0<\delta(x)<1$ и

$$(\forall y\in[-\delta(x);\delta(x)])\quad h(\gamma(x)\psi(x))>h(\ln(e^{\gamma(x)\psi(x)}+y))x/(x+1);$$

существование $\delta(x)$ следует, очевидно, из условия $h\in C_+$.

Рассмотрим множество

$$E=\{x\ge 4 : \sqrt{[x]}>(1+\varepsilon)h(\gamma(x)\psi(x))\}.$$

Согласно (4.1) это множество неограниченное, поэтому существует настолько быстро растущая последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ его элементов, что при любом $k \geq 0$ с учетом обозначений $m_0 = 1$, $n_k = [x_k]$, $p_k = [\sqrt{n_k}]$,

$$m_{k+1} = \frac{\gamma(x_{k+1})(n_{k+1} - n_k)}{n_{k+1} n_k} + m_k \frac{\psi(x_k)}{\psi(x_{k+1})}, \tag{4.2}$$

$$c_k = \exp\left\{\frac{\gamma(x_{k+1})\psi(x_{k+1})}{n_k} + m_k \psi(x_k)\right\} \tag{4.3}$$

выполняются неравенства

$$\ln c_k \geq 2\psi(x_{k+1}),\ p_{k+1} \geq 2n_k,\ c_{k+1} \geq 2(k+1)c_k,\ p_{k+2} \geq P(\delta(c_k), c_k). \tag{4.4}$$

Положим

$$b_k = \exp\{-m_k n_k \psi(x_k)\}, \quad N_k = n_k - p_k$$

для всех $k \geq 0$. Пусть

$$a_p = e_{p-p_{k+1}}(N_{k+1}) b_k c_k^{n_k - p}, \quad p \in [p_{k+1}; n_{k+1} - 1], \quad k \geq 0, \tag{4.5}$$

где $e_j(N_{k+1})$, $j = 0, \dots, N_{k+1} - 1$, — числа из множества $\{-1; 1\}$, удовлетворяющие лемме 1 при $n = N_{k+1}$. Если же a_p при некотором целом $p \geq 0$ еще не определено, то полагаем $a_p = 0$.

Рассмотрим вспомогательный степенной ряд

$$g(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=p_{k+1}}^{n_{k+1}-1} a_p z^p = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z), \tag{4.6}$$

где

$$g_k(z) = \sum_{p=p_{k+1}}^{n_{k+1}-1} a_p z^p,$$

и покажем, что $g \in \mathscr{A}_\psi$. В самом деле, воспользовавшись (4.5) и двумя первыми из неравенств (4.4), для всех $p \in [p_{k+1}; n_{k+1} - 1]$ и $k \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned} -\ln|a_p| = -\ln b_k + (p - n_k)\ln c_k > (p - n_k)\ln c_k \\ \geq \left(\frac{p}{2} + \frac{p_{k+1}}{2} - n_k\right) \cdot 2\psi(x_{k+1}) \geq p\psi(n_{k+1}) \geq p\psi(p), \end{aligned}$$

откуда следует, что $|a_p| \leq \exp\{-p\psi(p)\}$, $p \geq 0$, т. е. $g \in \mathscr{A}_\psi$.

Далее займемся установлением некоторых соотношений для ряда (4.6) и, в частности, для полиномов g_k, которые будут нужны нам при определении искомой функции f. Введем обозначение $\mu_s = b_s c_s^{n_s}$. Тогда, применив (4.5), имеем

$$|a_p| c_s^p = b_s c_s^{n_s - p} c_s^p = \mu_s, \quad p \in [p_{s+1}; n_{s+1} - 1], \quad s \geq 0.$$

Следовательно,

$$S_{g_s}(c_s) = \left(\sum_{p=p_{s+1}}^{n_{s+1}-1} |a_p|^2 c_s^{2p}\right)^{1/2} = \mu_s \sqrt{N_{s+1}}, \tag{4.7}$$

и согласно лемме 1

$$M_{g_s}(c_s) = \max_{\varphi\in[0;2\pi]} \left| \sum_{p=p_{s+1}}^{n_{s+1}-1} e_{p-p_{s+1}}(N_{s+1})|a_p| c_s^{n_s-p} c_s^p e^{ip\varphi} \right|$$

$$= \mu_s \max_{\varphi\in[0;2\pi]} \left| \sum_{j=0}^{N_{s+1}-1} e_j(N_{s+1}) e^{ij\varphi} \right| \le \mu_s \frac{2\sqrt{N_{s+1}}}{\sqrt{2}-1}. \quad (4.8)$$

Докажем теперь равенство

$$\frac{b_k}{b_{k+1}} = c_k^{n_{k+1}-n_k}, \quad k \ge 0. \quad (4.9)$$

Умножая обе части (4.2) на выражение $n_{k+1}\psi(x_{k+1})$ и используя (4.3), получаем

$$-\ln b_{k+1} = m_{k+1} n_{k+1} \psi(x_{k+1}) = \frac{\gamma(x_{k+1})\psi(x_{k+1}}{n_k}(n_{k+1}-n_k) + m_k\psi(x_k)n_{k+1}$$
$$= (\ln c_k - m_k\psi(x_k))(n_{k+1}-n_k) + m_k\psi(x_k)n_{k+1}$$
$$= (n_{k+1}-n_k)\ln c_k + m_k n_k \psi(x_k) = (n_{k+1}-n_k)\ln c_k - \ln b_k,$$

откуда и следует (4.9).

Пусть $s \ge 1$, $k \le s-1$ и $p \in [p_{k+1}; n_{k+1}-1]$. С учетом (4.5), (4.9) и третьего из неравенств (4.4) имеем

$$|a_p| c_s^p = c_k^{n_k-p} c_s^p b_k = c_k^{n_k-p} c_s^p b_s \prod_{j=k}^{s-1} c_j^{n_{j+1}-n_j}$$
$$\le c_k^{n_k-p} c_s^p b_s c_k^{n_{k+1}-n_k} c_{s-1}^{n_s-n_{k+1}} \le b_s c_s^{n_s} \left(\frac{c_{s-1}}{c_s}\right)^{n_s-p} \le \mu_s \left(\frac{1}{2s}\right)^{n_s-p}.$$

Следовательно,

$$\sum_{p\le n_s-1} |a_p| c_s^p \le \mu_s \sum_{p\le n_s-1} \left(\frac{1}{2s}\right)^{n_s-p} \le \mu_s \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2s}\right)^j \le \frac{\mu_s}{s}, \quad s \ge 1. \quad (4.10)$$

Определим по индукции последовательность $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ чисел из отрезка $[0;1]$, исходя из следующих соображений. Пусть $t_0 = 1$. Предположим, что при некотором $s \ge 1$ уже определены $t_0, \dots, t_{s-1}$. Рассмотрим функцию

$$\alpha_s(t,\varphi) = \left| \sum_{k=0}^{s-1} t_k g_k(c_s e^{i\varphi}) + t g_s(c_s e^{i\varphi)} \right|.$$

Эта функция, очевидно, непрерывна на $[0;1]\times[0;2\pi]$, поэтому согласно лемме 2 функция

$$\beta_s(t) = \max_{\varphi\in[0;2\pi]} |\alpha_s(t,\varphi)|$$

является непрерывной на $[0;1]$. Поскольку из (4.10) и (4.7) следует, что

$$\beta_s(0) \le \sum_{p\le n_s-1} |a_p| c_s^p \le \frac{\mu_s}{s},$$

$$\beta_s(1) \ge M_{g_s}(c_s) - \sum_{p\le n_s-1} |a_p| c_s^p \ge S_{g_s}(c_s) - \frac{\mu_s}{s} = \mu_s \left(\sqrt{N_{s+1}} - \frac{1}{s}\right)$$

и, как легко проверить, $\sqrt{N_{s+1}} - \frac{1}{s} \geq 1 \geq \frac{1}{s}$, то существует такое значение $t \in [0;1]$, которое мы и обозначим через t_s, что $\beta_s(t) = \beta_s(t_s) = \mu_s$, $s \geq 1$.

Рассмотрим степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k g_k(z).$$

Поскольку $g \in \mathscr{A}_\psi$, то тем более $f \in \mathscr{A}_\psi$. Докажем, что для функции f выполняется соотношение (2.3).

Пусть далее $s \geq 1$. Положим $y_s = M_f(c_s) - \mu_s$. Воспользовавшись последним из неравенств (4.4), получаем

$$|y_s| = |M_f(c_s) - \beta_s(t_s)| \leq \sum_{p \geq p_{s+2}} |a_p| c_s^p \leq \sum_{p \geq P(\delta(c_s, c_s)} e^{-p\psi(p)} c_s^p < \delta(c_s) < 1.$$

Но согласно (4.3)

$$\mu_s = b_s c_s^{n_s} = \exp\{-m_s n_s \psi(x_s) + n_s \ln c_s\} = \exp\{\gamma(x_{s+1})\psi(x_{k+1})\}.$$

Таким образом,

$$\ln M_f(c_s) = \ln(\mu_s + y_s) = \ln(e^{\gamma(x_{s+1})\psi(x_{s+1})} + y_s),$$

поэтому, вспоминая определение $\delta(x)$, имеем

$$h(\gamma(x_{s+1})\psi(x_{s+1})) > h(\ln M_f(c_s)) x_{s+1}/(x_{s+1} + 1). \tag{4.11}$$

Кроме того, из определения функции β_s и (4.10) следует, что

$$\mu_s = \beta_s(t_s) \leq \sum_{p \leq n_s - 1} |a_p| c_s^p + t_s M_{g_s}(c_s) \leq \frac{\mu_s}{s} + t_s M_{g_s}(c_s).$$

Отсюда и из неравенства (4.8) получаем

$$t_s \geq \left(1 - \frac{1}{s}\right) \frac{\mu_s}{M_{g_s}(c_s)} \geq \left(1 - \frac{1}{s}\right) \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{N_{s+1}}}. \tag{4.12}$$

Наконец, используя (4.12) и (4.11), при $s \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned}
G_f(c_s) &\geq t_s \sum_{p=p_{s+1}}^{n_{s+1}-1} |a_p| c_s^p = t_s \mu_s N_{s+1} \\
&\geq (1 + o(1)) \frac{\sqrt{2} - 1}{2} (M_f(c_s) + y_s) \sqrt{N_{s+1}} = (1 + o(1)) \frac{\sqrt{2} - 1}{2} M_f(c_s) \sqrt{[x_{s+1}]} \\
&\geq (1 + \varepsilon + o(1)) \frac{\sqrt{2} - 1}{2} M_f(c_s) h(\gamma(x_{s+1})\psi(x_{s+1})) \\
&\geq (1 + \varepsilon + o(1)) \frac{\sqrt{2} - 1}{2} M_f(c_s) h(\ln M_f(c_s)),
\end{aligned}$$

т. е. имеет место соотношение (2.3). Теорема доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 4

Достаточность. Пусть $\varphi, \psi \in L$ и выполняются условия (2.6) и (2.7). Докажем, что для любой целой функции $f \in \mathscr{A}_\psi$ имеет место соотношение (1.5).

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Из условия (2.7) следует, что

$$(\forall \gamma \in L) \quad \varphi(\gamma(x)\psi(x) + \ln\sqrt{x}) < (1+\delta)\varphi(\gamma(x)\psi(x)), \quad r \geq r_\gamma.$$

Отсюда, рассматривая функцию $h_\delta \in C_+$ такую, что

$$h_\delta(x) = \exp\{\varphi^{-1}((1+\delta)\varphi(x)) - x\}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

получаем

$$(\forall \gamma \in L) \quad \sqrt{x} < h_\delta(\gamma(x)\psi(x)), \quad r \geq r_\gamma.$$

Следовательно, при $h(x) = h_\delta(x)$ выполняется условие (2.2) из теоремы 2. Согласно этой теореме для любой $f \in \mathscr{A}_\psi$ верно неравенство

$$G_f(r) < eM_f(r)h_\delta(\ln M_f(r)), \quad r > r_f,$$

которое после перехода от h_δ к φ перепишем в виде

$$\varphi(\ln G_f(r) - 1) < (1+\delta)\varphi(\ln M_f(r)), \quad r > r_f. \tag{5.2}$$

Воспользовавшись (2.6) и (5.2), имеем

$$1 \leq \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\varphi(\ln G_f(r))}{\varphi(\ln M_f(r))} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\varphi(\ln G_f(r) - 1)}{\varphi(\ln M_f(r))} \leq 1 + \delta.$$

В силу произвольности δ можем сделать вывод о справедливости соотношения (1.5). Достаточность доказана.

Необходимость. Предположим, что условие (2.7) не выполняется, т. е. существуют функция $\gamma \in L$, число $\delta > 0$ и возрастающая к $+\infty$ последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, для которых

$$\varphi(\gamma(x_n)\psi(x_n) + \ln\sqrt{x_n}) > (1+\delta)\varphi(\gamma(x_n)\psi(x_n)), \quad n \geq 0. \tag{5.3}$$

Докажем, что для некоторой функции $f \in \mathscr{A}_\psi$ соотношение (1.5) не имеет места.

Учитывая (5.1), перепишем (5.3) в виде

$$\sqrt{x_n} > h_\delta(\gamma(x_n)\psi(x_n)), \quad n \geq 0.$$

Тогда при $h(x) = e^{-1}h_\delta(x)$ условие (2.2), как легко видеть, не выполняется. Согласно теореме 3 существуют целая функция $f \in \mathscr{A}_\psi$ и стремящаяся к $+\infty$ последовательность $\{r_n\}_{n=0}^\infty$ такие, что при любом $n \geq 0$

$$G_f(r_n) > e^{-2}M_f(r_n)h(\ln M_f(r_n)) = e^{-3}M_f(r_n)h_\delta(\ln M_f(r_n)),$$

откуда получаем

$$\varphi(\ln G_f(r_n) - 3) > (1+\delta)\varphi(\ln M_f(r_n)), \quad n \geq 0.$$

Следовательно, учитывая (2.6), имеем

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\varphi(\ln G_f(r))}{\varphi(\ln M_f(r))} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\varphi(\ln G_f(r) - 3)}{\varphi(\ln M_f(r))} \geq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(\ln G_f(r_n) - 3)}{\varphi(\ln M_f(r_n))} \geq 1 + \delta,$$

т. е. соотношение (1.5) для функции f не выполняется. Теорема 4 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 5

Необходимость. Предположим, что условие (2.6) для функции $\varphi \in L$ не выполняется. Тогда существуют число $\delta > 0$ и возрастающая к $+\infty$ последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, для которых

$$\varphi(x_n + 1) > (1+\delta)\varphi(x_n), \quad n \geq 0. \tag{6.1}$$

Докажем, что для любой $\psi \in L$ существует целая функция $f \in \mathscr{A}_\psi$ такая, что соотношение (1.5) не имеет места.

Учитывая (5.1), перепишем (6.1) в виде $1 > h_\delta(x_n)$, $n \geq 0$. Отсюда видим, что при $h(x) = e^2 h_\delta(x)$ условие (2.2) не выполняется. Поэтому из теоремы 3 следует существование целой функции $f \in \mathscr{A}_\psi$ и стремящейся к $+\infty$ последовательности $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ таких, что при любом $n \geq 0$

$$G_f(r_n) > e^{-2} M_f(r_n) h(\ln M_f(r_n)) = M_f(r_n) h_\delta(\ln M_f(r_n)).$$

Отсюда получаем

$$\varphi(\ln G_f(r_n)) > (1+\delta)\varphi(\ln M_f(r_n)), \quad n \geq 0,$$

поэтому для функции f соотношение (1.5) не выполняется. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть функция $\varphi \in L$ удовлетворяет соотношению (2.6). Тогда, как легко доказать, существует функция $\alpha \in L$ такая, что $\varphi(t + \alpha(t)) \sim \varphi(t)$, $t \to +\infty$.

Пусть $\psi \in L$ — любая функция, для которой $\psi(x) = \alpha^{-1}(\ln \sqrt{x})$, $x \geq x_0$. Докажем, что эта функция и является искомой, т. е. для любой целой функции $f \in \mathscr{A}_\psi$ выполняется соотношение (1.5).

Действительно, для любой $\gamma \in L$ согласно обозначениям

$$y = \psi(x), \quad \beta(y) = \gamma(e^{2\alpha(y)}) = \gamma(x), \quad t = \beta(y)y$$

получаем

$$1 \leq \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\varphi(\gamma(x)\psi(x) + \ln\sqrt{x})}{\varphi(\gamma(x)\psi(x))} = \varlimsup_{y\to+\infty} \frac{\varphi(\beta(y)y + \alpha(y))}{\varphi(\beta(y)y)}$$

$$\leq \varlimsup_{y\to+\infty} \frac{\varphi(\beta(y)y + \alpha(\beta(y)y))}{\varphi(\beta(y)y)} = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t+\alpha(t))}{\varphi(t)} = 1.$$

Как видим, для функции ψ выполнено условие (2.7). Поэтому по теореме 4 для любой целой функции $f \in \mathscr{A}_\psi$ имеет место соотношение (1.5). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
2. *Осколков В. А., Калиниченко Л. И.* Рост целых функций, представленных рядами Дирихле // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 6. С. 129–144.
3. *Шеремета М. М.* Цiлi ряди Дiрiхле. Київ: IСДО, 1993.
4. *Филевич П. В.* Неравенства типа Вимана — Валирона для целых и случайных целых функций конечного логарифмического порядка // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 683–692.
5. *Шеремета М. Н.* О соотношениях между максимальным членом и максимумом модуля целого ряда Дирихле // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 5. С. 141–148.

6. *Erdös P., Rényi A.* On random entire functions // Zastosowania Mat. 1969. V. 10. P. 47–55.
7. *Steele J. M.* Sharper Wiman inequality for entire functions with rapidly oscillating coefficients // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 123. P. 550–558.
8. *Філевич П. В.* Оцінки типу Вімана — Валірона для випадкових цілих функцій // Доповіді НАН України. 1997. № 12. С. 41–43.
9. *Кахан Ж.-П.* Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир, 1976.

Статья поступила 14 ноября 2001 г.

Филевич Петр Васильевич
Львовский национальный университет им. И. Франко,
механико-математический факультет,
ул. Университетская, 1, Львов 79000, Украина
filevych@mail.ru