Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2003. Том 44, № 3

УДК 517.5

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ТИПА BMO ОДНОГО КЛАССА ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Р. Ф. Шамоян

Аннотация: Приведены различные характеристики типа BMO для класса голоморфных функций со смешанной нормой. Даны критерии принадлежности произведений Бляшке аналитическим пространствам Бесова.

Ключевые слова: Классы Бесова, произведение Бляшке, дифференциальные операторы, характеристики типа BMO классов, аналитические мультипликаторы

Введение

Пусть D — единичный круг на комплексной плоскости $C : D = \{z : |z| < 1\}$, $T = \{z : |z| = 1\}$ — его граница, $H(D)$ — класс всех голоморфных в D функций. Известно (см. [1] или [2]), что аналитические пространства Бесова $AB^s_{p,q}(D)$ — подпространства классов Бесова $B^s_{p,q}$ — допускают следующее описание: $AB^s_{p,q}(D) = B^s_{p,q}(D) \cap H^p(D) = \Big\{ f \in H(D) : \|f\|^q_{p,q,s} = \int\limits_0^1 M^q_p(f', r)(1-r)^{q(1-s)-1}\, dr < \infty,\ 0 < p, q < \infty,\ 0 < s < 1 \Big\}$, где $H^P(D)$ — класс Харди в круге D, $M^p_p(F, R) = \int\limits_T |F(R\xi)|^p dm(\xi)$, $F \in H(D)$, $0 < p < \infty$, с естественными модификациями при $q = \infty$ или $p = \infty$ (см., например, [3]).

В недавно появившихся работах [4, 5] были получены характеризации типа BMO пространств $AB^s_{p,q}(D)$ при $1 \le \sigma \le p < \infty$, $0 < q < \infty$, $s \in \left(0, \frac{1}{\sigma}\right)$, где σ — параметр (в [4] при $p = q = 2$, в [5] при $p = q = \infty$). Одна из основных целей данной работы — получить при некоторых ограничениях на p, q, α описания типа BMO пространств $H^{p,q,\alpha}_\beta$. Свойства классов $H^{p,q,\alpha}_\beta$, совпадающих при $\beta = 0$, $p = q$ с известными пространствами Бергмана — Джрбашяна A^p_α, изучались многими авторами (см., например, [6]). Следует отметить, что многие пространства коэффициентных мультипликаторов, действующих из одного класса голоморфных в круге функций в другой, описываются в терминах именно этих классов (см., например, [6–9]). Легко заметить, что пространства $H^{p,q,\alpha}_\beta$ сводятся к аналитическим пространствам Бесова $AB^s_{p,q}$.

В § 1 будут указаны также характеризации типа BMO для классов $H^{p,q,\alpha}_\beta$, отличные от приведенных в [3, 4].

Отметим, что поиск эквивалентных квазинорм (норм) или характеризация посредством различных специальных функций тех или иных функциональных пространств на $\mathbb{R}^n$ — хорошо известная задача (см. [10]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00992).

О дальнейшей структуре работы можно сказать следующее. В § 2 рассмотрим случай $p = q = \infty$, а также, опираясь на утверждение о характеристике типа BMO для пространства $AB^s_{p,q}$, установленное в работе [3], получим критерии (необходимые и достаточные условия) на произведения Бляшке $B(z) = B(z\{z_k\})$ (см. [11]) такие, что $B(z\{z_k\}) \in AB^s_{p,q}(D)$.

Наконец, в § 3 устанавливаются условия на произведения $B(z)$ (необходимые и достаточные, к примеру, в терминах нулей $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$), при выполнении которых оператор свертки T_B:

$$(T_B f)(rt) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int\limits_T B(\bar{\xi}\sqrt{r}) f(\sqrt{r}t\xi)\, dm(\xi), \quad r \in I,\ t \in T,$$

действует ограниченно из пространства $BMOA(D) = BMO(T) \cap H^2(D)$.

Отметим, что в случае, когда g — произвольная аналитическая функция, ограниченность оператора Tg устанавливалась в работах многих авторов (см. [7, 8] и указанную там литературу).

Доказательства всех вспомогательных утверждений, которые используются нами при установлении основных результатов данной работы, приведены в последнем § 4.

Автор благодарен рецензенту за ряд ценных замечаний, позволивших улучшить изложение.

§ 1. О характеристиках типа BMO для классов $H^{p,q,\alpha}_\beta(D)$ при $p \leq \sigma$

Для формулировки результатов параграфа введем классы $H^{p,q,\alpha}_\beta$ голоморфных в круге D функций:

$$H^{p,q,\alpha}_\beta(D) = \left\{ f \in H(D) : \|f\|^q_{H^{p,q,\alpha}_\beta} = \int\limits_0^1 M^q_p(\widetilde{D}^\beta f, r)(1-r)^\alpha\, dr < \infty, \right.$$
$$\left. 0 < p, q < \infty,\ \beta > 0,\ \alpha > -1 \right\},$$

где $\widetilde{D}^\beta$ — дифференциальный оператор:

$$\widetilde{D}^\beta : H(D) \to H(D), \quad (\widetilde{D}^\beta f)(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(k+\beta+1) a_k z^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\beta+1)},\ \beta > 0,$$

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k, \quad \widetilde{D}^{-\beta} : H(D) \to H(D), \quad (\widetilde{D}^{-\beta}\widetilde{D}^\beta f)(z) = f(z).$$

Легко видеть, что шкала пространств $H^{p,q,\alpha}_\beta$ содержит, в частности, аналитические классы Бесова $AB^s_{p,q}(D)$, точнее, $H^{p,q,\alpha}_\beta$ сводятся к классам $AB^s_{p,q}(\mathbb{D})$.

При $1 \leq \sigma \leq p$ в [3] была получена характеризация типа BMO классов $AB^s_{p,q}(D)$. В следующей теореме эта задача решается при $p \leq \sigma$ в пространствах $H^{p,q,\alpha}_\beta(D)$.

Теорема 1. *Пусть* $q \in H^\sigma(D)$ *и*

$$g \leq p, \quad 1 \leq p \leq \sigma < 2p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{\sigma} > 1, \quad \alpha > 1;$$
$$\max\left\{2q-1,\ \frac{\alpha+1}{q} + 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{\sigma},\ \frac{\alpha+1}{q} + 1 + \frac{1}{p} - \frac{2}{\sigma}\right\} < \beta < \frac{\alpha+1}{q} + 1 \tag{S_1}$$

или

$$q \le p, \quad \frac{1}{2} < p \le 1 \le \sigma < 2p, \quad \alpha > 1 + \frac{2}{p} - \frac{2}{\sigma},$$
$$\max\left(\sigma, \frac{\sigma}{p} - 1, \frac{\alpha+1}{q} + 1 + \frac{1}{p} - \frac{2}{\sigma}\right) < \beta < \frac{\alpha+1}{q} + 1. \qquad (S_2)$$

Тогда следующие условия равносильны:

1) $g \in H_\beta^{p,q,\alpha}(D)$;

$$2)\ S = \int_0^1 \left(\int_T \left(\int_T \frac{|g(\xi) - g(z)|^\sigma}{|1 - \bar{\xi} z|^{\beta+1}}\, dm(\xi)\right)^{p/\sigma} dm(\varphi)\right)^{q/p} \times (1 - |z|)^{q\beta(1/\sigma - 1) + \alpha}\, d|z| < \infty, \quad z = |z|\varphi. \qquad (1.1)$$

Замечание. Условие (1.1) с параметром σ, дающее характеризации типа BMO для классов $H_\beta^{p,q,\alpha}(AB_{p,q}^s)$ для $p \le \sigma$, совпадает с условием, дающим описание типа BMO для аналитических классов Бесова $AB_{p,q}^s$ при $\sigma \le p$, полученным в [3] при частных значениях параметров α и β.

Доказательство теоремы 1. 2) $\Rightarrow$ 1). Из интегральной формулы Коши выводим, что

$$|\widetilde{D}^\beta g(z) \lesssim \left|\int_T \frac{(g(\xi) - g(z))}{(1 - \xi\bar{z})^{\beta+1}}\, dm(\xi)\right| \lesssim \int_T \frac{|g(\xi) - g(z)|}{|1 - \bar{\xi} z|^{\beta+1}}\, dm(\xi).$$

Далее, воспользовавшись неравенством Гёльдера, получим ($\beta > 0$, $\sigma > 1$)

$$|\widetilde{D}^\beta g(z)| \lesssim \left(\int_T \frac{|g(\xi) - g(z)|^\sigma}{|1 - \bar{\xi} z|^{\beta+1}}\, dm(\xi)\right)^{1/\sigma} \left(\int_T \frac{dm(\xi)}{|1 - \bar{\xi} z|^{\beta+1}}\right)^{1/\sigma'}$$
$$\lesssim \left(\int_T \frac{|g(\xi) - g(z)|^\sigma}{|1 - \bar{\xi} z|^{\beta+1}}\, dm(\xi)\right)^{1/\sigma} (1 - |z|)^{\beta(1/\sigma - 1)}. \qquad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем запись $A \lesssim B$ означает, что существует положительная константа c такая, что $A \le cB$, через c, c_1, $c(\alpha)$, $c(p,q)$ мы будем обозначать константы, зависящие от α, p, q, β, и т. д.

Из (1.2) легко вывести оценку

$$\int_0^1 M_p^q(\widetilde{D}^\beta g, |z|)(1 - |z|)^\alpha\, d|z| \lesssim S, \quad z = |z|\varphi.$$

Допустим, что выполнена цепочка неравенств (S_1). Докажем обратную импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Учитывая легко проверяемые равенства

$$g(\xi) = c(\alpha) \int_0^1 \widetilde{D}^{\alpha+1} g(\rho\xi)(1-\rho)^\alpha\, d\rho,\ \alpha > -1, \quad g(z) = c(\alpha) \int_0^1 \widetilde{D}^{\alpha+1} g(\rho z)(1-\rho)^\alpha\, d\rho,$$

получаем

$$|g(\xi) - g(z)| \lesssim \int_0^1 (1 - \rho^2)^\alpha |\widetilde{D}^{\alpha+1} g(\rho^2\xi) - \widetilde{D}^{\alpha+1} g(\rho^2 z)| \rho\, d\rho. \qquad (1.3)$$

Очевидно, что

$$\widetilde{D}^{\alpha+1}g(\rho^2\xi)=\tilde{c}_1(\alpha)\bigg(\int\limits_T\frac{\widetilde{D}^{\alpha+1}\widetilde{D}^{-1}g(\rho\bar{\varphi})}{(1-\rho\xi\varphi)^2}\,dm(\varphi)\bigg),$$

$$\widetilde{D}^{\alpha+1}g(\rho^2 z)=\tilde{c}_1(\alpha)\bigg(\int\limits_T\frac{\widetilde{D}^{\alpha+1}\widetilde{D}^{-1}g(\rho\overline{\varphi})}{(1-\rho\varphi z)^2}\,dm(\varphi)\bigg),\quad \xi\in T,\ z\in D.$$

Поэтому

$$|\widetilde{D}^{\alpha+1}g(\rho^2\xi)-\widetilde{D}^{\alpha+1}g(\rho^2 z)|\lesssim\int\limits_T\frac{|\widetilde{D}^{\alpha+1}\widetilde{D}^{-1}g(\rho\overline{\varphi})|\,|1-\bar{\xi}z|}{|1-\rho\xi\varphi|^2\,|1-\rho\varphi z|^2}(|1-\rho\xi\varphi|+|1-\rho\varphi z|)\,dm(\varphi), \tag{1.4}$$

где

$$\widetilde{D}^{-1}(\widetilde{D}g)(z)=g(z):(\widetilde{D}^{-1}g)(z)=\sum_{k\ge 0}\frac{1}{k+1}a_k z^k,\quad g(z)=\sum_{k\ge 0}a_k z^k,\ g\in H(D).$$

Из (1.3) и (1.4) вытекает, что

$$|g(\xi)-g(z)|\lesssim\int\limits_0^1(1-\rho^2)^\alpha\int\limits_T\frac{|\widetilde{D}^{\alpha+1}\widetilde{D}^{-1}g(\rho\overline{\varphi})|\,|1-\bar{\xi}z|}{|1-\rho\xi\varphi|^2\,|1-\rho\varphi z|^2}$$
$$\times(|1-\rho\xi\varphi|+|1-\rho\varphi z|)\,dm(\varphi)\rho d\rho=K_1+K_2.$$

Оценим каждое из слагаемых в отдельности. Пусть

$$f(\rho\varphi)=\widetilde{D}^{\alpha+1}\widetilde{D}^{-1}g(\rho\varphi).$$

Тогда

$$K_1^\sigma\lesssim\left(\int\limits_0^1\int\limits_T\frac{(1-\rho)^\alpha|f(\rho\varphi)|\,dm(\varphi)\,\rho d\rho}{|1-\rho\xi\varphi|\,|1-\rho\varphi z|^2}\right)^\sigma|1-\bar{\xi}z|^\sigma$$
$$\lesssim\bigg(\int\limits_D\frac{(1-|w|)^{\alpha-1}|f(w)|\,dm_2(w)}{|1-wz|^2}\bigg)^\sigma|1-\bar{\xi}z|^\sigma.$$

Используя неравенство Гёльдера, получим (здесь и всюду ниже ε — достаточно малое положительное число)

$$K_1^\sigma\lesssim|1-\bar{\xi}z|^\sigma\left(\int\limits_0^1\int\limits_T\frac{(1-\rho)^{(\alpha-1)\sigma}|f(\rho\varphi)|^\sigma}{|1-\rho\varphi z|^{2-\varepsilon\sigma}}\,dm(\varphi)d\rho\right)\left(\int\limits_1^0\int\limits_T\frac{dm(\varphi)\,d\rho}{|1-\rho\varphi z|^{2+\varepsilon\sigma}}\right)^{\sigma/\sigma'}$$
$$\lesssim|1-\bar{\xi}z|^\sigma(1-|z|)^{-\varepsilon\sigma}\left(\int\limits_0^1\int\limits_T\frac{(1-\rho)^{(\alpha-1)\sigma}|f(\rho\varphi)|^\sigma}{|1-\rho\varphi z|^{2-\varepsilon\sigma}}\,dm(\varphi)d\rho\right).$$

Тем самым при $\beta>\sigma$, $\alpha>1-1/\sigma$, $\sigma\le 1$ приходим к соотношению

$$\bigg(\int\limits_T\frac{|g(\xi)-g(z)|^\sigma}{|1-\bar{\xi}z|^{\beta+1}}\,dm(\xi)\bigg)^{1/\sigma}$$

$$\lesssim (1-|z|)^{\frac{-\varepsilon\sigma+\sigma-\beta}{\sigma}} \left(\int_0^1\int_T \frac{(1-\rho)^{(\alpha-1)\sigma}|f(\rho\varphi)|^\sigma}{|1-\rho\varphi z|^{2-\varepsilon\sigma}}\,dm(\varphi)\,d\rho\right)^{1/\sigma}$$

$$+\left(\int_T\left(\int_0^1\int_T \frac{(1-\rho)^\alpha|f(\rho\varphi)|\,d\rho dm(\varphi)}{|1-\rho\varphi z|\,|1-\rho\varphi\xi|^2}|1-z\bar{\xi}|^{\left(\sigma-\frac{\beta+1}{\sigma}\right)}\right)^\sigma dm(\xi)\right)^{1/\sigma} = \widetilde{S}_1+\widetilde{S}_2. \tag{1.5}$$

Оценим второе слагаемое, используя соображения двойственности. Имеем

$$\widetilde{S}_2 = \int_T\int_0^1\int_T \frac{(1-\rho)^\alpha|f(\rho\varphi)|\,\rho d\rho dm(\varphi)}{|1-\rho\varphi z|\,|1-\rho\varphi\xi|^2}|1-z\bar{\xi}|^{\frac{\sigma-(\beta+1)}{\sigma}}(\psi(\xi))\,dm(\xi),\ \psi\in L^{\sigma'}(dm(\xi)).$$

Используя теорему Фубини, неравенство Гёльдера, лемму 1, получим

$$\widetilde{S}_2 \lesssim \int_0^1\int_T \frac{(1-\rho)^\alpha|f(\rho\varphi)|}{|1-\rho\varphi z|}\left(\int_T \frac{dm(\xi)}{|1-\rho\varphi\xi|^{2\sigma}|1-\bar{\xi}z|^{\beta+1-\sigma}}\right)^{1/\sigma}\rho d\rho dm(\varphi)$$

$$\lesssim \left(\int_0^1\int_T \frac{(1-\rho)^\alpha|f(\rho\varphi)|\,d\rho dm(\varphi)}{|1-\rho\varphi z|^3}\right)(1-|z|)^{(1-\beta/\sigma)}$$

$$+\left(\int_0^1\int_T \frac{(1-\rho)^{\alpha+\frac{1}{\sigma}-2}|f(\rho\varphi)|\,d\rho dm(\varphi)}{|1-\rho\varphi z|^{(\beta+1)/\sigma}}\right),\quad \alpha>1-\frac{1}{\sigma},\ \beta>\sigma. \tag{1.5$'$}$$

Далее, предположив, что выполнены условия (S_1), воспользуемся леммой 2(3). В силу неравенств

$$\alpha>-\frac{1}{\rho},\ \varepsilon>0,\ \alpha+\frac{1}{\sigma}-2>-\frac{1}{\rho},\ (1-\varepsilon)p>-1,\ \frac{\beta+1}{\sigma}>2,\ \sigma\ge 1,\ p\ge 1$$

получим

$$I_1 = \int_0^1\left(\int_T(\widetilde{S}_2(z))^p\,dm(t)\right)^{q/p}(1-|z|)^{q\beta\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)+\alpha}\,d|z| \lesssim (z=|z|t)$$

$$\lesssim \int_0^1(1-|z|)^{q\left(1-\frac{\beta}{\sigma}\right)+q\beta\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)+\alpha-\varepsilon q}\left(\int_0^1\int_T \frac{|f(\rho\varphi)|^p(1-\rho)^{\alpha p}\,d\rho dm(\varphi)}{(1-\rho|z|)1+(1-\varepsilon)p}\right)^{q/p} d|z|$$

$$+\int_0^1\left(\int_0^1\int_T \frac{|f(\rho\varphi)|^p(1-\rho)^{\left(\alpha+\frac{1}{\sigma}-2\right)p}\,d\rho dm(\varphi)}{(1-\rho|z|)^{1+\left(\frac{\beta+1}{\sigma}-2-\varepsilon\right)p}}\right)^{q/p}(1-|z|)^{q\beta\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)+\alpha-\varepsilon q}\,d|z|. \tag{1.5$''$}$$

Остается воспользоваться леммой 3(а) в (1.5$''$), теоремой Фубини, леммой 2 и заметить, что из оценки

$$\int_0^1(1-Rr)^{-\lambda}(1-r)^t\,dr \approx C(\lambda,t)(1-R)^{-\lambda+t+1},\quad t>-1,\ \lambda>t+1,$$

следует

$$((1-\rho)^{(\alpha p+2)\frac{q}{p}-\frac{q}{p}-1})\int\limits_0^1 \frac{(1-|z|)^{\alpha-\varepsilon q+q-q\beta}\,d|z|}{(1-\rho|z|)^{q/p}+(1-\varepsilon)q} \lesssim (1-\rho)^{\alpha+(\alpha-\beta)q}$$

$$\times(1-\rho)^{\left(\alpha+\frac{1}{\sigma}-2\right)q+\frac{q}{p}-1}\int\limits_0^1 \frac{(1-|z|)^{\frac{q\beta}{\sigma}-q\beta+\alpha-\varepsilon q}}{(1-\rho|z|)^{\frac{q}{p}+q\left(\frac{\beta+1}{\sigma}-2-\varepsilon\right)}}\,d|z| \lesssim (1-\rho)^{\alpha+(\alpha-\beta)q}, \tag{1.6}$$

$$p<\sigma<2p,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{\sigma}>1,\ 1<\alpha,q\le p,\ B<\beta<\frac{\alpha+1}{q}+1,$$

где

$$B=\max\left(2\sigma-1,\frac{(\alpha+1)}{q}+2-\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma},\frac{\alpha+1}{q}+1+\frac{1}{p}-\frac{2}{\sigma}\right),\quad p,\sigma\ge 1.$$

Далее,

$$I_1 \lesssim \int\limits_0^1 (1-|z|)^{q-q\beta+\alpha-\varepsilon q}\int\limits_0^1 \frac{M_p^q(f,p)(1-\rho)^{(\alpha p+2)\frac{q}{p}-\frac{q}{p}-1}}{(1-\rho|z|)(1+(1-\varepsilon)p)q/p}\,d\rho d|z|$$

$$+\int\limits_0^1 (1-|z|)^{q\beta\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)+\alpha-\varepsilon q}\int\limits_0^1 M_p^q(f,p)(1-\rho)^{\left(\alpha+\frac{1}{\sigma}-2\right)q+\frac{q}{p}-1}$$

$$\times\frac{d\rho d|z|}{(1-\rho|z|^{\frac{q}{p}+q\left(\frac{\beta+1}{\sigma}-2-\varepsilon\right)}} \lesssim \|g\|^q_{H^{p,q,\alpha}_\beta}.$$

Оценим теперь слагаемое $\widetilde{S}_1$:

$$\widetilde{S}_1^p=(1-|z|)^{\left(-\varepsilon+\left(\frac{\sigma-\beta}{\sigma}\right)\right)p}\left(\int\limits_0^1\int\limits_T \frac{(1-\rho)^{(\alpha-1)\sigma}|f(\rho\varphi)|^\sigma}{|1-\rho\varphi z|^{2-\varepsilon\sigma}}\,dm(\varphi)\,d\rho\right)^{p/\sigma}$$

$$\lesssim (1-|z|)^{\left(-\varepsilon+1-\frac{\beta}{\sigma}\right)p}\int\limits_0^1\int\limits_T \frac{(1-\rho)^{(\alpha-1)p+\frac{2p}{\sigma}-2}|f(\rho\varphi)|^p\rho d\rho dm(\varphi)}{|1-\rho\varphi z|^{(2-\varepsilon\sigma)p/\sigma}}$$

(мы воспользовались леммой 3(б)). Далее $z=|z|t$. Используя снова лемму 3(а), получим $(q\le p)$

$$I_2=\int\limits_0^1\left(\int\limits_T (S_1(z))^p\,dm(t)\right)^{q/p}(1-|z|)^{q\beta\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)+\alpha}\,d|z| \lesssim \left(\frac{2p}{\sigma}>1\right)$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 (1-|z|)^{\left(q\beta\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)+\alpha+q-q\varepsilon-\frac{\beta q}{\sigma}\right)}\left(\int\limits_0^1 \frac{M_p^p(f,\rho)(1-\rho)^{\alpha p-p+\frac{2p}{\sigma}-2}\,d\rho}{(1-\rho|z|)^{-\varepsilon\rho+\frac{2p}{\sigma}-1}}\right)^{q/p}$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 (1-|z|)^{-q\beta+\alpha+q-q\varepsilon}\int\limits_0^1 \frac{M_p^q(f,\rho)(1-\rho)^{\alpha q-q+\frac{2q}{\sigma}-\frac{q}{p}-1}\,d\rho}{(1-\rho|z|)^{-\varepsilon q-\frac{q}{p}+\frac{2q}{\sigma}}},\quad \alpha>\frac{1}{p}-\frac{2}{\sigma}+1.$$

Остается воспользоваться теоремой Фубини, оценкой (1.6) и леммой 2:

$$I_2 \lesssim \int\limits_0^1 M_p^q(f,\rho)(1-\rho)^{\alpha+\alpha q-\beta q}\,d\rho \lesssim \|g\|^q_{H^{p,q,\alpha}_\beta},\quad 1\le p\le\sigma;\ q\le 2p,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{\sigma}>1.$$

Теорема 1 доказана при $1 \le p$. Рассмотрим теперь случай $p \le 1$.

Импликация $1 \Rightarrow 2$ проверяется аналогично предыдущему случаю ($\beta > 0$, $\sigma \ge 1$). Для доказательства обратной импликации заметим, что так же, как в предыдущем случае, можно получить неравенство ($1.5'$). Учитывая, что $\beta > \sigma$, $\alpha > 1 - \frac{1}{\sigma}$, $\sigma \ge 1$, имеем

$$\left(\int\limits_T \frac{|g(\xi) - g(z)|^\sigma}{|1 - \bar{\xi} z|^{\beta+1}}\, dm(\xi)\right)^{1/\sigma} \lesssim \widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2$$

$$\lesssim (1 - |z|)\frac{-\varepsilon\sigma + \sigma - \beta}{\sigma}\left(\int\limits_0^1\int\limits_T \frac{(1-\rho)^{(\alpha-1)\sigma}|f(\rho\varphi)|^\sigma}{|1 - \rho\varphi z|^{2-\varepsilon\sigma}}\, dm(\varphi) d\rho\right)^{1/\sigma}$$

$$+ \left(\int\limits_0^1\int\limits_T + \frac{(1-\rho)^\alpha |f(\rho\varphi)|\, d\rho dm(\varphi)}{|1 - \rho\varphi z|^3}\right)(1 - |z|)^{(1 - \frac{\beta}{\sigma})}$$

$$+ \left(\int\limits_0^1\int\limits_T \frac{(1-\rho)^{\alpha + \frac{1}{\sigma} - 2}|f(\rho\varphi)|\, d\rho dm(\varphi)}{|1 - \rho\varphi z|^{\frac{\beta+1}{\sigma}}}\right) = M_1 + M_2 + M_3. \quad (1.7)$$

Возведем обе части неравенства в степень p, для оценки каждого из трех образовавшихся слагаемых в левой части неравенства (1.7) воспользуемся леммой 3 и получим ($p \le \sigma$, $p \le 1$, $z = |z|t$)

$$\int\limits_T \left(\int\limits_T \frac{|g(\xi) - g(z)|^\sigma}{|1 - \bar{\xi} z|^{\beta+1}}\, dm(\xi)\right)^{p/\sigma} dm(t)$$

$$\lesssim \int\limits_T \int\limits_0^1 \int\limits_T \frac{(1-\rho)^{(\alpha-1)p}|f(\rho\varphi)|^p (1-\rho)^{\frac{2p}{\sigma} - 2}}{|1 - \rho\varphi z|^{(2-\varepsilon\sigma)p/\sigma}}\, d\rho dm(\varphi) dm(t) (1 - |z|)^{(1 - \beta/\sigma - \varepsilon)p}$$

$$+ \int\limits_T \left(\int\limits_0^1\int\limits_T \frac{(1-\rho)^{\alpha p + 2p - 2}|f(\rho\varphi)|^p}{|1 - \rho\varphi z|^{3p}}\, d\rho dm(\varphi)\right) dm(t) (1 - |z|)^{(1 - \frac{\beta}{\sigma})p}$$

$$+ \int\limits_T \left(\int\limits_0^1\int\limits_T + \frac{(1-\rho)^{(\alpha + \frac{1}{\sigma} - 2)p}|f(\rho\varphi)|^p (1-\rho)^{2p-2}}{|1 - \rho\varphi z|^{(\beta+1)\frac{p}{\sigma}}}\, d\rho dm(\varphi)\right) dm(t)$$

$$(\sigma < 2p,\ p > 1/2,\ \beta > \sigma/p - 1).$$

Воспользовавшись теоремой Фубини и оценкой

$$\int\limits_T \frac{dm(\xi)}{|1 - r\xi|^\gamma} \le \frac{C(\gamma)}{(1-r)^{\gamma-1}}, \quad \gamma > 1,$$

имеем

$$S \lesssim \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1\int\limits_T \frac{(1-\rho)^{\alpha p - p + \frac{2p}{\sigma} - 2}|f(\rho\varphi)|^p}{(1 - \rho|z|)^{\frac{2p}{\sigma} - \varepsilon p - 1}}\, d\rho dm(\varphi)\right)^{q/p} (1 - |z|)^{q(1-\varepsilon) + \alpha - q\beta}\, d|z|$$

$$+ \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1\int\limits_T \frac{(1-\rho)^{\alpha p + 2p - 2}|f(\rho\varphi)|^p}{(1 - \rho\sigma|z|)^{3p-1}}\, d\rho dm(\varphi)\right)^{q/p} (1 - |z|)^{q - q\beta + \alpha}\, d|z|$$

$$+\int_0^1 \left(\int_0^1 \int_T \frac{(1-\rho)^{\alpha p+\frac{p}{q}-2}|f(\rho\varphi)|^p}{(1-\rho\sigma|z|)^{\frac{\beta\rho}{\sigma}+\frac{p}{\sigma}-1}}\,d\rho dm(\varphi)\right)^{q/p} (1-|z|)^{q\beta\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)+\alpha}\,d|z|.$$

Применяя дважды лемму 3, трижды оценку

$$\int_0^1 (1-Rr)^{-\lambda}(1-r)^t\,dr \le C(\lambda,t)(1-R)^{-\lambda+t+1}, \quad t>-1, \quad \lambda>t+1,$$

условия теоремы и рассуждая так же, как в предыдущем случае, получаем окончательно $S \lesssim \|g\|_{H^{p,q,\alpha}_\beta}$.

В следующем утверждении для классов $H^{p,q,\alpha}_\beta(D)$ указаны эквивалентные нормы (квазинормы) типа BMO другого вида.

Теорема 2. *Пусть $f \in H^1(D)$ и справедлива любая из цепочек неравенств, содержащихся в следующих пунктах:*

(A) $0 \le p \le 1$, $q \le p$, $\max\left(\frac{\alpha+1}{q}+\frac{1}{p}-2, 0\right) < \beta < \frac{\alpha+1}{q}$, $\alpha > -1$;

(B) $0 < p \le 1$, $q > p$, $\frac{\alpha}{q}+\frac{2}{p}-2 < \beta < \frac{\alpha+1}{q}$, $\alpha > 0$;

(C) $1 < p < \infty$, $q \le p$, $\max\left(\frac{\alpha+1}{q}-\frac{1}{p}, 0\right) < \beta < \frac{\alpha+1}{q}$, $\alpha > -1$;

(D) $1 < p < \infty$, $q > p$, $\frac{\alpha}{q} < \beta < \frac{\alpha+1}{q}$, $\alpha > 0$.

Тогда равносильны следующие условия:

1) $f \in H^{p,q,\alpha}_\beta(D)$;

2) $I = \int_0^1 \left[\int_T \left(\int_D \frac{|f(w)-f(z)|}{|1-\bar{w}z|^{\beta+2}}\,dm_2(w)\right)^p dm(\xi)\right]^{q/p} (1-|z|)^\alpha\,d|z| < \infty$, $z = |z|\xi$.

Замечание. Отметим, что в частном случае, когда $p=q$, $\beta=1$, $\alpha=p-2$, $1<p<\infty$, описание типа BMO, подобное приведенному выше для классов $H^{p,q,\alpha}_\beta(D)$, было установлено в [12] другим способом (см. также [13]).

Доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 2) в случаях (A)–(D) проходит единым образом. Действительно, учитывая формулу Коши, лемму 2, равенства

$$c\widetilde{D}f(z) = (zf(z))'; \quad \widetilde{D}^\beta\left(\frac{1}{1-\bar{\xi}z}\right) = \frac{1}{(1-\bar{\xi}z)^{\beta+1}},\ \beta>0,$$

получаем

$$|\widetilde{D}^\beta f(z)| \lesssim \left|\int_T \frac{(f(\xi)-f(z))\,dm(\xi)}{(1-\bar{\xi}z)^{\beta+1}}\right| = \left|\lim_{R\to 1}\int_T \overline{\frac{1}{(1-R\xi\bar{z})^{\beta+1}}}(f(R\xi)-f(z))\,dm(\xi)\right|$$

$$\lesssim \int_D \left|\overline{R}^1\left(\frac{1}{(1-w\bar{z})^{\beta+1}}\right)\right| |f(w)-f(z)|\,dm_2(w)$$

$$\lesssim \int_D \frac{1}{|1-w\bar{z}|^{\beta+2}}|f(w)-f(z)|\,dm_2(w), \quad f \in H^1(D).$$

Следовательно, при $z = |z|\varphi$ имеем

$$\int_0^1 \left(\int_T |\widetilde{D}^\beta f(z)|^p\,dm(\varphi)\right)^{q/p} (1-|z|)^\alpha\,dm(|z|) \lesssim I,$$

$$\beta \in (0,\infty), \quad \alpha \in (-1,\infty), \quad 0<p,q<\infty.$$

Покажем теперь, что из условия 2 следует условие 1.

Пусть $0 < p \le 1$. Воспользовавшись оценкой

$$\int\limits_D \frac{dm_2(w)}{|1 - r\bar{w}|^\gamma} \lesssim \frac{C}{(1-r)^{\gamma-2}}, \quad \gamma > 2,$$

получим

$$I \lesssim \int\limits_0^1 \biggl(\int\limits_T \biggl[\int\limits_D \biggl(\frac{|f(w)|}{|1-\bar{w}z|^{\beta+2}} + \frac{|f(z)|}{|1-\bar{w}z|^{\beta+2}}\biggr) dm_2(w)\biggr]^p dm(\varphi)\biggr)^{q/p} (1-|z|)^\alpha \, d|z|$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \biggl[\int\limits_T \biggl(\int\limits_D \frac{|f(w)|\, dm_2(w)}{|1-\bar{w}z|^{\beta+2}}\biggr)^p dm(\varphi)\biggr]^{q/p} (1-|z|)^\alpha \, d|z|$$

$$+ \int\limits_0^1 \biggl(\int\limits_T |f(z)|^p \, dm(\varphi)\biggr)^{q/p} (1-|z|)^{\alpha-\beta q} \, d|z| = I_1 + I_2, \quad \beta > 0. \quad (1.8)$$

Используя лемму 3(1) и лемму 1(2), теорему Харди — Литтлвуда (см. [14]) для оценки I_2 и условия теоремы, имеем

$$I_2 \lesssim \|f\|^q_{H^{p,q,\alpha}_\beta} \quad \text{при } \beta < \frac{\alpha+1}{q},$$

$$I_1 \lesssim \int\limits_0^1 \biggl[\int\limits_T \biggl(\int\limits_D \frac{|f(w)|^p (1-|w|)^{2p-2}}{|1-\bar{w}z|^{(\beta+2)p}} \, dm_2(w)\biggr) dm(\varphi)\biggr]^{q/p} (1-|z|)^\alpha \, d|z|$$

$$\lesssim \bar{I}_1 = \int\limits_0^1 \biggl(\int\limits_D \frac{|f(w)|^p |1-|w||^{2p-2}}{(1-|w|\,|z|)^{(\beta+2)p-1}} \, dm_2(w)\biggr)^{q/p} (1-|z|)^\alpha \, d|z|, \quad \beta > \frac{1}{p} - 2, \ \alpha > -1.$$

Пусть $q \le p$. Тогда, учитывая лемму 3, выводим ($\beta > (\alpha+1)/q + 1/p - 2$)

$$\bar{I}_1 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{M_p^q(f,|w|)(1-|w|)^{2q-q/p-1} \, d|w|}{(1-|w|\,|z|)^{(\beta+2)q-q/p}} (1-|z|)^\alpha \, d|z| d|w| \lesssim \|f\|^q_{H^{p,q,\alpha}_\beta}.$$

Рассмотрим теперь случай $q > p$. Используя соображения двойственности, находим ($\psi \in L^{(q/p)'}(d|z|)$)

$$\widetilde{I}_1 = \int\limits_0^1 \int\limits_D |f(w)|^p (1-|w|)^{2p-2} (1-|z|)^{\frac{\alpha p}{q}} (1-|w||\,|z|)^{(\beta+2)p-1} \psi(|z|) \, dm_2(w) d|z|$$

$$= \int\limits_D |f(w)|^p (1-|w|)^{2p-2} \left(\left(\int\limits_0^{|w|} + \int\limits_{|w|}^1\right) \frac{(\psi(|z|))(1-|z|)^{\alpha p/q}}{(1-|w|\,|z|)^{(\beta+2)p-1}} \, d|z|\right) dm_2(w) = S_1 + S_2.$$

Далее,

$$S_2 \lesssim \int\limits_D |f(w)|^p (1-|w|)^{2p-2+\frac{\alpha p}{q}+1-(\beta+2)p} \, dm(\varphi) \int\limits_{|w|}^1 \psi(|z|) d|z| d|w|$$

в силу неравенств $\alpha > 0$, $\beta > \frac{1}{p} - 2$. Применяя неравенства Харди (см. [1]) и Гёльдера, получим окончательно

$$S_2 \lesssim \left(\int_0^1 M_p^q(f,\rho)(1-\rho)^{\left(2p+\frac{\alpha p}{q}-(\beta+2)p\right)\frac{q}{p}}\, d\rho \right)^{p/q}$$

$$\times \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{(1-\rho)} \int_\rho^1 \psi(|z|)\, d|z| \right)^{p_1} d\rho \right)^{1/p_1}$$

$$\lesssim \left(\int_0^1 M_p^q(f,\rho)(1-\rho)^{2q+\alpha-(\beta+2)q}\, d\rho \right)^{p/q} \lesssim \|f\|^{\rho}_{H^{p,q,\alpha}_\beta}, \quad \frac{1}{p_1}+\frac{p}{q} = 1,\ p_1 = \left(\frac{q}{p}\right)'.$$

Оценим S_1, используя снова неравенства Харди и Гёльдера ($\beta > \alpha/q + 2/p - 2$):

$$S_1 \lesssim \int_0^1 M_p^p(f,|w|)(1-|w|)^{2p-2} \left(\int_0^{|w|} \frac{\psi(|z|)(1-|z|)^{\frac{\alpha p}{q}+2-(\beta+2)p}}{(1-|z|)}\, d|z| \right) d|w|$$

$$\lesssim \int_0^1 M_p^p(f,|w|)(1-|w|)^{\frac{\alpha p}{q}-\beta p} \int_0^{|w|} \frac{\psi(|z|)\, d|z| d|w|}{1-|z|}$$

$$= \int_0^1 \frac{\psi(r)}{1-r} \int_0^1 (1-|w|)^{\frac{\alpha p}{q}-\beta p} M_p^p(f,|w|)\, d|w| dr$$

$$\lesssim \left(\int_0^1 (\psi(r))^{p_1}\, dr \right)^{1/p_1} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{1-r} \int_r^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha p}{q}-\beta \rho} M_p^p(f,|w|)\, d|w| \right)^{q/p} dr \right)^{p/q}$$

$$\lesssim \left(\int_0^1 M_p^q(f,\rho)(1-\rho)^{\alpha-\beta q}\, d\rho \right)^{p/q} \lesssim \|f\|^p_{H^{p,q,\alpha}_\beta}.$$

При $0 < p \le 1$ теорема доказана полностью. Пусть теперь $1 < p < \infty$. Достаточно оценить величину I_1 (см. (1.8)). По лемме 2 имеем

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_T \left(\int_D \frac{|f(w)|\, dm_2(w)}{|1-\bar{w}z|^{\beta+2}} \right)^P dm(\varphi) \right)^{q/p} (1-|z|)^\alpha\, d|z|$$

$$\lesssim \int_0^1 \left(\int_T \left(\int_D \frac{|f(w)|^p (1-|z|)^{-\varepsilon p}}{|1-\bar{w}z|^{2+(\beta-\varepsilon)p}}\, dm_2(w) \right) dm(\varphi) \right)^{q/p} (1-|z|)^\alpha\, d|z|$$

$$\lesssim \int_0^1 \left(\int_D \frac{|f(w)|^p (1-|z|)^{-\varepsilon p}}{(1-|w|\,|z|)^{1+(\beta-\varepsilon)p}}\, dm_2(w) \right)^{q/p} (1-|z|)^\alpha\, d|z| = \widetilde{I}_1.$$

Как и в предыдущем случае, рассмотрим две возможности $q \le p$ и $q > p$. Пусть

$q \le p$. Тогда по лемме 3 выводим

$$\widetilde{I}_1 \lesssim \int_0^1 \int_0^1 \frac{M_p^q(f,|w|)(1-|w|)^{q/p-1}}{(1-|w|\,|z|)^{q/p+(\beta-\varepsilon)q}}\, d|w|(1-|z|)^{\alpha-\varepsilon q} d|z|$$

$$\lesssim \int_0 M_p^q(f,|w|)(1-|w|)^{\alpha-\beta q} d|w| \lesssim \|f\|^q_{H_\beta^{p,q,\alpha}}$$

при $\beta > \frac{\alpha+1}{q} - \frac{1}{p}$. Если $q > p$, то воспользуемся соображениями двойственности. В силу того, что $\psi \in L^{(q/p)'}(d|z|)$ $\left(\frac{1}{(q/p)'} + \frac{1}{q/p} = 1\right)$, имеем

$$\widetilde{I}_1 = \int_0^1 \int_D \frac{|f(w)|^p(1-|z|)^{-\varepsilon p + \frac{\alpha p}{q}}}{(1-|w|\,|z|)^{1+(\beta-\varepsilon)p}}\, dm_2(w)\psi(|z|)d|z|$$

$$= \int_D |f(w)|^p \left(\left(\int_0^{|w|} + \int_{|w|}^1\right) \frac{\psi(|z|)(1-|z|)^{-\varepsilon p+\frac{\alpha p}{q}}}{(1-|w|\,|z|)^{1+(\beta-\varepsilon)p}}\, d|z|\right) dm_2(w) = \widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2.$$

Слагаемые $\widetilde{S}_1$ и $\widetilde{S}_2$ оцениваются так же, как и выше слагаемые S_1 и S_2, с использованием неравенств Гёльдера и Харди:

$$\widetilde{S}_1 \lesssim \int_0^1 \frac{\psi(r)}{1-r} \int_r^1 (1-|w|)^{\frac{\alpha p}{q}-\beta p} M_p^p(f,|w|)\, d|w| dr \lesssim \|f\|^q_{H_\beta^{p,q,\alpha}} \quad \beta > \frac{\alpha}{q},$$

$$\widetilde{S}_2 \lesssim \left(\int_0^1 M_p^q(f,\rho)(1-\rho)^{\alpha-\beta q}\right)^{p/q} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{1-\rho}\int_\rho^1 \psi(|z|)\, d|z|\right)^{p_1} d\rho\right)^{1/p_1}$$

$$\lesssim \|f\|^p_{H_\beta^{p,q,\alpha}}, \quad \alpha > 0,\ \frac{\alpha+1}{q} > \beta > 0.$$

Следовательно, получаем окончательно $\widetilde{I}_1 \lesssim \|f\|^q_{H_\beta^{p,q,\alpha}}$.

Теорема 2 доказана полностью.

§ 2. О характеризациях типа BMO аналитических классов Бесова $AB^S_{p,q}$ и пространств $H^{p,q,\alpha}_\beta$ при $p = q = \infty$

Для формулировки результатов параграфа сформулируем следующее утверждение.

Теорема А. *Пусть* $1 \le \sigma \le p < \infty$, $q \in (0,\infty)$, $s \in \left(0, \frac{1}{\sigma}\right)$, $f \in H^p$. *Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\int\limits_0^1 M_p^q(f',r)(1-r)^{q(1-s)-1}\, dr < \infty$;

2) $S = \int\limits_0^1 \Bigl(\int\limits_T \Bigl(\int\limits_T \frac{|f(\xi)-f(z)|^\sigma}{|1-\bar{\xi}z|^2}(1-|z|)dm(\xi)\Bigr)^{p/\sigma} dm(\varphi)\Bigr)^{q/p} (1-|z|)^{-qs-1}\, d|z| < \infty.$

Теорема А установлена в [3]. Доказательство существенным образом опирается на свойства специального диадического разбиения окружности T.

В качестве приложения теоремы А мы установим условия (необходимые и достаточные) в терминах нулей функции $B(z,\{z_k\}))$, при которых произведение Бляшке

$$B(z)=B(z,\{z_k\})=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{|z_k|}{z_k}\frac{z_k-z}{1-\bar z_k z}$$

(при некоторых дополнительных ограничениях на последовательность $(z_k)_{k=1}^{\infty}$) принадлежит пространствам Бесова $AB_s^{p,q}(D)$ (аналогичные утверждения могут быть выведены, конечно, и из теоремы 1). Задача нахождения тех или иных необходимых и достаточных условий на последовательность $(z_k)_{k=1}^{\infty}$, при которых произведение Бляшке $B(z,\{z_k\})$ (или более общая внутренняя функция) принадлежит тем или иным классам аналитических функций, решались в работах многих авторов (см, например, [11, 15–18]).

Для формулировки дальнейших результатов работы напомним, что последовательность $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (CN), если она представима в виде конечного объединения интерполяционных последовательностей (см. [11, 18]), т. е. последовательностей, удовлетворяющих условию $\prod\limits_{k\neq 1}\frac{|z_k-z_i|}{|1-z_kz_i|}\geq\delta$ для некоторого $\delta>0$.

Будем говорить, что последовательность $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* $R_l(\alpha,\beta)$, если

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(1-|z|)^{\alpha}(1-|w|)^{\beta}}{(1-|z|\,|w|)^{l}}\leq C,$$

где C — некоторая положительная константа, $\alpha+\beta\leq l$; $\alpha,\beta>0$; $l\in\mathbb{N}$. Напомним, что

$$AB_s^{p,q}(D)=\left\{f\in H(D):\|f\|_{p,q,s}^{q}=\int\limits_0^1 M_p^q(f',r)(1-r)^{q(1-s)-1}\,dr<\infty\right\}.$$

Введем классы типа $BMOA$:

$$\begin{aligned}BMOA_{p,q,s}^{\sigma}=\Bigg\{f\in H^{\sigma}(D):\|f\|_{BMOA_{p,q,s}^{\sigma}}\\=\int\limits_0^1\left(\int\limits_T\left(\int\limits_T\frac{|f(\xi)-f(z)|^{\sigma}}{|1-\bar\xi z|^2}(1-|z|)\,dm(\xi)\right)^{p/\sigma}dm(\varphi)\right)^{q/p}\\\times(1-|z|)^{-qs-1}\,d|z|<\infty,\ 0<p,q,\sigma<\infty,\ s\in\left(0,\frac{1}{\sigma}\right)\Bigg\}.\end{aligned}\quad(2.1)$$

Замечание. Классы типа $BMOA$, подобные введенным, изучались также в работе [19].

Теорема 3. 1. *Пусть последовательность* $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (CN) *и*

$$R_2(\alpha,\beta),\ 0<s<\frac{1}{p},\ 1<p<\infty,\ \max(0,1-p's)<\beta<\min(p'(1-s),2),\ \frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1.$$

Тогда следующие условия равносильны:

(A) $B(z,\{z_k\})\in AB_s^{p,p}(D)$;

(B) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|)^{1-sp}<\infty$;

(C) $B(z,\{z_k\})\in BMOA^p_{p,p,s}(D)$.

2. *Пусть последовательность* $(z_i)_{i=1}^\infty$ *удовлетворяет условиям* (CN) *и* $R_1(\alpha,\beta)$, $1<q<\infty$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, $s\in(0,1)$, $\max(1,1-q's)<\beta<\min((1-s)q',1)$. *Тогда следующие условия равносильны:*

(A) $B(z,\{z_k\})\in AB^{1,q}_s(D)$;

(B) $\sum\limits_{i=1}^\infty(1-|z_i|)^{q(1-s)}<\infty$;

(C) $B(z,\{z_k\})\in BMOA^1_{1,q,s}(D)$.

Следствие 1. *Пусть* $s\in(0,1)$ *и последовательность* $(z_k)_{k=1}^\infty$ *удовлетворяют условию* (CN). *Тогда следующие условия равносильны:*

1) $B(z,\{z_k\})\in BMOA^1_{1,1,s}$;

2) $B(z,\{z_k\})\in AB^s_{1,1}(D)$;

3) $\sum\limits_{i=1}^\infty(1-|z_i|)^{-s+1}<+\infty$.

Напомним, что последовательность $(z_i)_{i=1}^\infty$ *удовлетворяет слабому условию Ньюмена* (WN) (см. [20, 21]), если

$$\sup_i\Big\{(1-|z_i|)^{-1}\sum_{k\geq i}(1-|z_k|),\ i\in\mathbb{N}\Big\}<+\infty,\quad |z_i|\leq|z_{i+1}|,\ i\in\mathbb{N}.$$

Следствие 2. *Пусть* $s\in(0,1)$, $q\in(1,\infty)$, *последовательность* $(z_i)_{i=1}^\infty$ *удовлетворяет условию* (WN). *Тогда следующие условия равносильны:*

$$B(z,\{z_k\})\in AB^{1,q}_s(D);\quad B(z,\{z_k\})\in BMOA^1_{1,q,s}(D);\quad \sum_{i=1}^\infty(1-|z_i|)^{(1-s)q}<\infty. \tag{2.2}$$

Следствие 3. *Пусть* $1<p<\infty$, $0<s<\min\big(\frac{1}{p},\frac{1}{p'}\big)$, *последовательность* $(Z_k)_{k=1}^\infty$ *удовлетворяет условию* (WN). *Тогда следующие условия равносильны:*

1) $B(z,\{z_k\})\in AB^{p,p}_s(D)$;

2) $\sum\limits_{i=1}^\infty(1-|z_i|)^{(1-s)p}<\infty$;

3) $B(z,\{z_k\})\in BMOA^p_{p,p,s}(D)$.

Доказательство теоремы 3. 1. Импликации (A) $\Rightarrow$ (C) и (C) $\Rightarrow$ (A) следуют из теоремы A. Докажем, что из (C) вытекает (B), используя тот факт, что

$$\frac{1-|B(z,\{z_k\})|}{1-|z|}\geq C\sum_{i=1}^\infty\frac{(1-|z_i|)}{|1-z\bar{z}_i|^2}. \tag{2.3}$$

Если последовательность $(z_i)_{i=1}^\infty$ удовлетворяет условию Карлесона (см. [11]), то

$$\begin{aligned}M&=\int\limits_D\int\limits_0^{2\pi}\frac{|B(z)-B(\xi)|^p}{|1-\bar{z}\xi|^2}(1-|z|)^{-sp}\,dm(\xi)dm_2(z)\\&\gtrsim\int\limits_D(1-|B(z)|)^p\left(\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{|1-\bar{z}\xi|^2}\,dm(\xi)\right)(1-|z|)^{-sp}\,dm_2(z)\\&\gtrsim\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\frac{(1-|B(z)|^p}{(1-|z|)^p}(1-|z|)^{-sp-1+p}\,d|z|dm(\varphi)\end{aligned}$$

$$\gtrsim \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(1-|z_i|)}{|1-z\bar{z}_i|^2}\right)^p (1-|z|)^{-sp-1+p} d|z| dm(\varphi).$$

В последнем соотношении мы воспользовались неравенством

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right)^p \geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p, \quad p \geq 1. \tag{2.4}$$

Применяя снова оценку (1.6), получаем окончательно

$$M \gtrsim \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-|z_i|)^p}{(1-|z_i|\,|z|)^{2p-1}} (1-|z|)^{p-1-sp} d|z| \gtrsim \sum_{i=1}^{\infty} (1-|z|)^{1-sp}. \tag{2.5}$$

Покажем, что (B) $\Rightarrow$ (A). Учитывая соотношение

$$|B'(w, \{z_i\})| \lesssim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-|z_i|)}{|1-w\bar{z}_i|^2}$$

и соображения (2.5) двойственности, получаем

$$\|B\|^p_{AB_s^{P,P}} \lesssim \int\limits_T \int\limits_0^1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1-|z_i|}{|1-w\bar{z}_i|^2}\right)^p (1-|w|)^{(1-s)p-1}\, d|w| dm(\xi)$$

$$= \int\limits_T \left(\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(1-|z_i|)}{|1-w\bar{z}_i|^2} (\psi(|w|))(1-|w|)^{1-s-1/p}\, d|w|\right)^p dm(\xi),$$

где $\psi \in L^{p'}(0,1)$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Используя неравенство Гёльдера и условие теоремы, выводим

$$\|B\|^p_{AB_s^{p,p}} \lesssim \int\limits_T \left(\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} (\psi(|w|))^{p'} \frac{(1-|z_i|)^\alpha (1-|w|)^\beta\, d|w|}{|1-\bar{z}_i w|^2}\right)^{p/p'}$$

$$\times \left(\int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|w|)^{(1-s)p-1}(1-|z_j|)^{p-\alpha(p/p')}(1-|w|)^{-\beta(p/p')}}{|1-w\bar{z}_j|^2}\, d|w|\right)$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|z_j|)^{p-\alpha(p/p')}(1-|w|)^{(1-s)p-1-\beta(p/p')}}{|1-|z_j|\,|w|)}\, d|w|$$

$$\lesssim \sum_{j=1}^{\infty} (1-|z_j|)^{p-1+(1-s)p-(p/p')(\alpha+\beta)} \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} (1-|z_j|)^{1-sp}.$$

Первая часть теоремы доказана.

Вторая часть теоремы устанавливается с помощью аналогичных соображений. Эквивалентность (A) и (C) легко вывести из теоремы A. Покажем, что из (C) следует (B).

Аналогично предыдущему случаю имеем

$$I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_T \int\limits_T \frac{|B(\xi)-B(z)|}{|1-\bar{z}\xi|^2}\right)^q (1-|z|)^{(1-s)q-1\, d|z|}$$

$$\geq \int_0^1 \left(\int_T \frac{1-|B(z)|}{1-|z|}\, dm(\varphi) \right)^q (1-|z|)^{(1-s)q-1}\, d|z|, \quad z = |z|\varphi.$$

Используя тот факт, что последовательность $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (CN), и оценки (1.6) и (2.4), получаем

$$I \gtrsim \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|z_j|)}{1-|z_j|\,|z|} \right)^q (1-|z|)^{(1-s)q-1}\, d|z|$$

$$\gtrsim \int_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|z_j|)^q (1-|z|)^{(1-s)q-1}}{|1-|z_j|\,|z|)^q}\, d|z| \gtrsim \sum_{j=1}^{\infty} (1-|z_j|)^{q(1-s)}.$$

Для установления импликации $(B) \Rightarrow (A)$ воспользуемся оценкой (2.5), неравенством Гёльдера, соображениями двойственности, оценкой (1.6) и учтем условия теоремы:

$$\|B\|_{AB_s^{1,q}(D)} \lesssim \left(\int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-|z_j|)}{(1-|w|\,|z_j|)} \right)^q (1-|w|)^{(1-s)q-1}\, d|w| \right)^{1/q}$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-|w|)^{(1-s)-1/q}(1-|z_j|)}{1-|w|\,|z_j|} \psi(|w|) d|w|, \quad \psi \in L^{q'}(0,1), \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

$$\|B\|_{AB^{1,q}(D)} \lesssim \left(\int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-|w|)^{\beta}(1-|z_j|)^{\alpha}}{(1-|w|\,|z_j|)} \psi(|w|)^{q'}\, d|w| \right)^{1/q'}$$

$$\times \left(\int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-|w|)^{-\beta(q/q')}(1-|z_j|)^{-\alpha(q/q')}}{(1-|w|\,|z_j|)} (1-|w|)^{(1-s)q-1}\, d|w| (1-|z_j|)^q \right)^{1/q}$$

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} (1-|z_j|)^{q-\alpha(q/q')} \int_0^1 \frac{(1-|w|)^{-\beta(q/q')+(1-s)q-1}}{(1-|w|\,|z_j|)}\, d|w| \right)^{1/q}$$

$$\lesssim \left(\sum_{j=0}^{\infty} (1-|z_j|)^{q(1-s)} \right). \tag{2.6}$$

Теорема 3 доказана.

Для установления утверждения следствия 1 достаточно положить $p = 1$ и повторить рассуждения, проведенные в доказательстве первой части теоремы 3.

Доказательство следствия 2. Учитывая, что $-q's < 1$, выберем $\beta \in (0,1)$ так, что $1 - q's < \beta < (1-s)q'$. Положим $\alpha = 1 - \beta$. Тогда (см. [21])

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|z_j|)^{\alpha}(1-|w|)^{\beta}}{1-|z_j|\,|w|} \leq C,$$

так как $(Z_j)_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (WN). Далее, последовательность $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет также условию (CN) (см. [20, 21]). Остается воспользоваться утверждением п. 2 теоремы 3.

Доказательство следствия 3 можно провести аналогично, используя первую часть теоремы 3 и подбирая $\beta \in (0,2)$, $1 - p's < \beta < p' - p's$, $\alpha = 2 - \beta$.

Замечание. Вышеприведенные результаты анонсированы в [22].

В следующей теореме мы получаем описание типа BMO для пространств $H_\beta^{p,q,\alpha}$ в случае $p = q = \infty$,

$$H_\beta^{\infty,\infty,\alpha} = \{f \in H(D) : \sup_{r \in I} M_\infty(\widetilde{D}^\beta f, r)(1-r)^\alpha < \infty,\ \alpha \ge 0,\ \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Теорема 4. *Пусть* $f \in H^\sigma$, $\sigma \ge 1$, $0 < \alpha < \beta < \alpha + 1$, $\sigma < \frac{\beta}{\beta - \alpha}$, $\frac{1}{\sigma'} + \frac{1}{\sigma} = 1$. *Тогда следующие условия равносильны:*

1) $f \in H_\beta^{\infty,\infty,\alpha}$;

2) $S = \sup\limits_{|Z|<1} \big(\int\limits_T \frac{|f(\xi)-f(z)|^\sigma}{|1-\bar{\xi}z|^{\beta+1}}\, dm(\xi)\big)^{1/\sigma}(1-|z|)^{\alpha-\beta/\sigma'} < \infty$.

Замечание. В частных случаях при $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\sigma = 1$ или $\sigma = 2$ и при начальном предположении $f \in A = (C(T)) \cap H(D)$ ($C(T)$ — класс всех непрерывных функций на T), но для пространств с более общим «весом» типа Липшица

$$\widetilde{H}_\omega^{\infty,\infty,1} = \left\{f \in H(D) : M_\infty(f', r)\frac{(1-r)}{\omega(1-r)} < \infty\right\},$$

где ω — регулярная весовая функция (в частности, $\omega(r) = r^\gamma$, $\gamma \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$), утверждение теоремы 4 установлено в [5] другим методом.

Доказательство теоремы 4. Доказательство импликации 2) $\Rightarrow$ 1) является следствием интегральной формулы Коши и неравенства Гёльдера и проходит аналогично доказательству соответствующей импликации в теореме 1. Докажем обратное. Имеем

$$I = \int\limits_T \frac{|f(\xi)-f(z)|^\sigma}{|1-\bar{\xi}z|^{\beta+1}}\, dm(\xi) = \int\limits_T \frac{|F(\xi)-F(\widetilde{R})|^\sigma}{|1-\bar{\xi}\widetilde{R}|^{\beta+1}}\, dm(\xi), \quad z = \widetilde{R}\varphi,\ z \in D,$$

где $F(\omega) = (f_\varphi)(\omega) = f(\varphi\omega)$, $\varphi \in T$, $\omega \in \overline{D}$, $F \in H^\sigma$. Далее,

$$I = \int\limits_T \frac{|F(\xi)-F(\widetilde{R})|^\sigma}{|1-\bar{\xi}\widetilde{R}|^{\beta+1}}\, dm(\xi) = \lim_{R\to 1}\int\limits_T \frac{|F(R\xi)-F(\widetilde{R})|^\sigma}{|1-\bar{\xi}R\widetilde{R}|^{\beta+1}}\, dm(\xi). \tag{2.7}$$

По лемме 3 из соотношения $f \in H_\beta^{\infty,\infty,\alpha}$ следует $|\widetilde{D}f(z)| \le C(1-|z|)^{\beta-\alpha-1}$, $\beta < \alpha + 1$. Поэтому $|\widetilde{D}F(z)| \le C(1-|z|)^{\beta-\alpha-1}$, $\beta < \alpha + 1$. Легко видеть, что справедливы равенства

$$F(z) = \int\limits_0^1 \widetilde{D}F(rz)\, dr = \frac{1}{|z|}\int\limits_0^{|z|} \widetilde{D}F(u\xi)\, du, \quad z \in D. \tag{2.8}$$

Возьмем числа $\widetilde{R}, R$ такие, что $\frac{1}{2} < \widetilde{R} < R < 1$, и любую точку $\xi \in T$. Тогда, учитывая (2.8), получаем

$$|F(\xi R) - F(\xi\widetilde{R})| \le C\int\limits_{\widetilde{R}}^R (1-r)^{-(1+\alpha-\beta)}\, dr \le c(1-\widetilde{R})^{\beta-\alpha}, \quad \beta > \alpha.$$

Далее, при $|\psi| < 1-\widetilde{R}$, $e^{i\psi}=\xi$ справедливо неравенство

$$|F(\xi R) - F(\widetilde{R})| \le |F(\xi R) - F(\xi\widetilde{R})| + |F(\xi\widetilde{R}) - F(\widetilde{R})| \\ \le C(I-\widetilde{R})^{\beta-\alpha} + C_1|\psi|(1-\widetilde{R})^{\beta-\alpha-1} \le C_2(1-\widetilde{R})^{\beta-\alpha}.$$

При $|\psi| > 1-\widetilde{R}$ зафиксируем число $V>0$, $V<R$, $\widetilde{R}$ так, чтобы $V > 1-|\psi|$. Тогда

$$|F(\xi R) - F(\widetilde{R})| \le |F(\xi R) - F(V\xi)| + |F(V\xi) - F(V)| + |F(V) - F(\widetilde{R})| \\ \le C((1-V)^{\beta-\alpha} + |\psi|(1-V)^{\beta-\alpha-1}) \le C(V,\alpha,\beta)|\psi|^{\beta-\alpha}, \quad \beta-\alpha<1,\ \beta>\alpha.$$

Учитывая полученные оценки, имеем ($\sigma < \frac{\beta}{\beta-\alpha}$, $1/2 < \widetilde{R} < R < 1$)

$$\int\limits_T \frac{|F(R\xi)_F(\widetilde{R})|^\sigma}{|1-\bar{\xi}R\widetilde{R}|^{\beta+1}}\,dm(\xi) \lesssim \int\limits_0^{2\pi} ((1-R) + (1-\widetilde{R}) + C(V)|\psi|)^{\sigma(\beta-\alpha)-\beta-1}\,d\psi$$

$$\le 2\int\limits_0^{\pi} ((1-R)+(1-\widetilde{R})+C(V)\psi)^{\sigma(\beta-\alpha)-\beta-1}\,d\psi \le C_1((1-R)+(1-\widetilde{R}))^{\sigma(\beta-\alpha)-\beta-\alpha}.$$

Перейдем к пределу при $R\to 1$ в полученном неравенстве:

$$I = \int\limits_T \frac{|F(\xi) - F(\widetilde{R})|^\sigma}{|1-\bar{\xi}\widetilde{R}|^{\beta+1}}\,dm(\xi) \le (1-\widetilde{R})^{\sigma(\beta-\alpha)-\beta}.$$

Теорема 4 доказана.

Методы, применяемые при доказательстве теорем 1–4, могут быть использованы для получения характеризаций типа BMO пространств, отличных от классов $H^{p,q,\alpha}_\beta(D)$. Приведем примеры такого рода. В работе [23] введены классы типа BMO:

$$HF^{\infty,q}_s = \left\{ f\in H(D) : \|f\|_{F^{\infty,q}_s} = \sup_{w\in D}\left(\left(\int\limits_D |\overline{R}^k f(z)|^q (1-|z|)^{(k-s)q-1}\right)\right.\right. \\ \left.\left. \times \frac{(1-|w|)^\beta\,dm_2(z)}{|1-\bar{z}w|^{\beta+1}}\right)^{1/q} < \infty \right\},$$

где $q\in(0,\infty)$, k — любое натуральное число, $k>s$, $s\in\mathbb{R}$, β — некоторое фиксированное положительное число, $\overline{R}^t$ — дифференциальный оператор:

$$\overline{R}^t : H(D)\to H(D); \quad (\overline{R}^t f)(z)\sum_{m\ge 0} a_m(m+1)^t z^m, \quad f(z) = \sum_{m\ge 0} a_m z^m,\ t\ge 0.$$

Легко видеть (см. [11, 24]), что $F^{\infty,2}_s = BMOA = BMO\cap H^2(D)$, где $BMOA$ — аналитическое подпространство класса BMO, играющее важную роль в различных вопросах комплексного анализа (см., например, [11]).

Нетрудно проверить, что классы $HF^{\infty,q}_s$ от k,β не зависят (см. [23, 11]).

Теорема 5. *Пусть* $f\in H^1(D)$ *и*
a) $-\frac{1}{q'} < s < 1$ *при* $\frac12 < q \le 1$, $\frac{1}{q'} = 1-\frac{1}{q}$;
b) $\frac{1}{q'} < s < 1$ *при* $q>1$, $\frac1q + \frac{1}{q'} = 1$.
Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $f \in HF_s^{\infty,q}(D)$;

2) $L = \sup\limits_{w\in D} \int\limits_D \Big(\int\limits_T \frac{|f(\xi)-f(r\varphi)|}{|1-\bar{\xi}r\varphi|^{k+2}}\, dm(\xi)\Big)^q \frac{(1-r)^{(k+1-s)q-1}\, dr dm(\varphi)(1-|w|)^\beta}{|1-r\varphi\bar{w}|^{\beta+1}} < \infty$, *где* $0<\beta<(1-s)q$, k *— любое число,* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство теоремы 5. Докажем 1) $\Rightarrow$ 2).

Обратное легко можно вывести так же, как и в предыдущих случаях. Пусть $q \le 1$, тогда, рассуждая, как в теореме 1, выводим неравенство

$$I = \int\limits_T \frac{|f(\xi)-f(z)|}{|1-\bar{\xi}z|^{k+2}}\, dm(\xi) \lesssim \int\limits_T \int\limits_0^1 \int\limits_T (1-\rho)^\alpha |\widetilde{D}^\alpha f(\rho\overline{\widetilde{\varphi}})|$$

$$\times \left(\frac{1}{1-\rho\xi\widetilde{\varphi}|\,|1-\rho\widetilde{\varphi}z|^2} + \frac{1}{|1-\rho\widetilde{\varphi}z|\,|1-\rho\xi\widetilde{\varphi}|^2}\right) \frac{d\rho dm(\widetilde{\varphi})\, dm(\xi)}{|1-\bar{\xi}z|^{k+1}} \lesssim A+B.$$

Из теоремы Фубини и леммы 1 следует, что

$$B \lesssim \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1-\rho)^\alpha |\widetilde{D}^\alpha f(\rho\overline{\widetilde{\varphi}})|}{|1-\rho\widetilde{\varphi}z|} \left(\frac{(1-\rho)^{-1}}{|1-\rho\widetilde{\varphi}z|^{k+1}} + \frac{(1-|z|)^{-k}}{|1-\rho\widetilde{\varphi}z|^2}\right) d\rho dm(\widetilde{\varphi})$$

$$\lesssim A = \int\limits_D \frac{|\widetilde{D}^\alpha f(w)|(1-|w|)^{\alpha-1}}{|1-\bar{w}z|^2}\, dm_2(w)(1-|z|)^{-k}.$$

Значит, учитывая, что $I \lesssim 3A$, и лемму 3, получаем ($0<q\le 1$, $z=r\varphi$)

$$L \lesssim \int\limits_D \int\limits_D \frac{(1-\rho)^{\alpha q+q-2}|\widetilde{D}^\alpha f(\rho\widetilde{\varphi})|^q}{|1-\rho\widetilde{\varphi}z|^{2q}}\, d\rho d\widetilde{\varphi} \frac{(1-\rho)^{(1-s)q-1}}{|1-r\varphi\bar{w}|^{\beta+1}}\, d\rho dm(\varphi)(1-|w|)^\beta.$$

Снова воспользуемся теоремой Фубини и легко выводимой оценкой (см. лемму 5):

$$\int\limits_D \frac{(1-|z|)^{(1-s)q-1}\, d|z|d\varphi}{|1-z\bar{w}|^{\beta+1}|1-\rho\widetilde{\varphi}z|^{2q}} \lesssim \frac{(1-\rho)^{1-sq-q}}{|1-\rho\widetilde{\varphi}w|^{\beta+1}}, \quad z=|z|\varphi=r\varphi,$$

$$\frac{1-q}{q} < s < 1,\ \frac{1}{2} < q \le 1,\ 0<\beta<(1-s)q.$$

Тем самым

$$L \lesssim \int\limits_T \int\limits_0^1 \frac{|\widetilde{D}^\alpha f(\rho\widetilde{\varphi})|^q (1-\rho)^{\alpha q-1-sq}}{|1-\rho\widetilde{\varphi}w|^{\beta+1}}\, d\rho dm(\varphi)(1-|w|)^\beta.$$

Положим $\alpha = k+1$, $L \lesssim \|f\|^q_{F_s^{\infty,q}}$. Рассмотрим теперь случай $1<q<\infty$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, нетрудно вывести оценку

$$L \lesssim \int\limits_D \left(\int\limits_0^1 \int\limits_T \frac{(1-\rho)^{\alpha-1}|\widetilde{D}^\alpha f(\rho\overline{\widetilde{\varphi}})|}{|1-\rho\widetilde{\varphi}z|^2}\, d\rho dm(\widetilde{\varphi})\right)^q$$

$$\times \frac{(1-|z|)^{(1-s)q-1}\, dm_2(z)}{|1-z\bar{w}|^{\beta+1}}(1-|w|)^\beta, \quad z=|z|\varphi=r\varphi.$$

Воспользовавшись леммой 2, имеем ($\alpha = k+1$)

$$L \lesssim \int\limits_D \int\limits_0^1 \int\limits_T \frac{(1-\rho)^{qk}|\widetilde{D}^{k+1} f(\rho\widetilde{\varphi})|^q}{|1-\rho\widetilde{\varphi}z|^{2-\varepsilon q}}\, d\rho dm(\widetilde{\varphi}) \frac{(1-|z|)^{-\varepsilon q-1+(1-s)q}\, dm_2(z)}{|1-z\bar{w}|^{\beta+1}} (1-|w|)^{\beta}.$$

В силу теоремы Фубини и оценки (см. лемму 5)

$$\int\limits_D \frac{(1-|z|)^{(1-s)q-1-\varepsilon q}\, dm_2(z)}{|1-\rho\widetilde{\varphi}z|^{2-\varepsilon q}|1-z\bar{w}|^{\beta+1}} \lesssim \frac{c(1-\rho)^{(1-s)q-1}}{|1-\rho\widetilde{\varphi}\bar{w}|^{\beta+1}}, \quad \frac{1}{q'} < s < 1,\ 0 < \beta < (1-s)q,$$

получаем

$$L \lesssim \int\limits_0^1 \int\limits_T \frac{(1-\rho)^{(k+1-s)q-1}|\widetilde{D}^{k+1} f(\rho\widetilde{\varphi})|^q}{|1-\rho\widetilde{\varphi}w|^{\beta+1}}\, dm(\widetilde{\varphi})\, d\rho (1-|w|)^{\beta} \lesssim \|f\|^q_{F_s^{\infty,q}}.$$

Теорема 5 доказана полностью.

Замечание. «Вес» $(1-|w|)^{\beta}$ в теореме 5, очевидно, можно заменить более общей весовой функцией, например, регулярной весовой функцией ω (см. [5]). Отметим, что BMO — образные описания — возможны и для пространств с порядком гладкости больше единицы. При этом разности первого порядка $|f(\omega) - f(z)|$ заменяются разностями высших порядков (см. [25]).

Учитывая, что $HF_s^{\infty,2} = BMOA$, из теоремы 5 легко получить новое описание класса $BMOA$.

Следствие 4. *Функция f принадлежит $BMOA$ тогда и только тогда, когда $f \in H^1(D)$ и*

$$L = \sup_{w \in D} \int\limits_D \left(\int\limits_T \frac{|f(\xi) - f(r\varphi)|\, dm(\xi)}{|1 = \bar{\xi} r\varphi|^{k+1}} \right)^2 \frac{(1-r)^{2(k-s)-1}\, dr dm(\varphi)}{|1 - r\varphi\bar{w}|^{\beta+1}} (1-|w|)^{\beta} < \infty,$$

где $k > 1$ любое, $k \in \mathbb{N}$, β — некоторое число, $0 < \beta < 2(1-s)$, $s \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

По поводу других различных характеристик класса $BMOA$ см. [11, 26] и указанную там литературу.

Из теоремы 4 при $\sigma = 2$ можно получить описание внешних функций из пространств $H_1^{\infty,\infty,\alpha}(D)$ в терминах модулей граничных значений. Аналогичная задача решалась в недавно появившихся работах [3, 5]. Напомним, что внешняя функция O_φ (см. [11]) имеет вид $O_\varphi(z) = \exp\bigl(\int\limits_T \frac{\xi+z}{\xi-z} \log\varphi(\xi)\, dm(\xi)\bigr)$, где $\varphi \ge 0$, $\log\varphi \in L^1(T)$. Известно, что условие $\int\limits_T \log\varphi\, dm(\xi) > -\infty$ характеризует модули ненулевой функции класса H^p (см. [11]). Учитывая, что если $|f(\xi)| = \varphi(\xi)$, $f \in H^p$, то $|O_\varphi(\xi)| = |f(\xi)|$, $O_\varphi \in H^p$ (см. [11]), и принимая во внимание очевидное равенство

$$\left(\int\limits_T \frac{|f(\xi) - f(z)|^2}{|1 - \bar{\xi} z|^2}\, dm(\xi) \right)(1-|z|) = \int\limits_T |f(\xi)|^2\, d\mu_z(\xi) - |f(z)|^2, \quad z \in D,$$

где $\mu_z(\xi) = \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{\xi}z|^2}$, и теорему 4 при $\sigma = 2$, получаем

Следствие 5. *Пусть $\varphi \ge 0$, $\log\varphi \in L^1(T)$, $\varphi \in H^2$, $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $O_\varphi \in H_1^{\infty,\infty,\alpha}(D)$;
2) $\sup\limits_{|z|<1} \bigl(\int\limits_T |O_\varphi(\xi)|^2\, d\mu_z(\xi) - |O_\varphi(z)|^2\bigr)(1-|z|)^{2\alpha-1} < \infty$.

§ 3. Произведения Бляшке и ограниченность операторов $T_B(f)$ в классе $BMOA(D)$

Пусть X и Y — подпространства $H(D)$. В последнее время появилось большое количество работ, в которых при некоторых ограничениях описывались внутренние функции θ (см. [11]) (или пары (f,θ)) такие, что для любой функции f (фиксированной функции f), $f \in X$, функция g равна $L_\theta f = f\theta \in Y$ (см., например, [15–18] и указанную там литературу). Естественно ставить подобные задачи и по отношению к другим операторам, например, по отношению к оператору T_θ свертки

$$(T_\theta f)(rt) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\int\limits_t f(\sqrt{r}\xi)\theta(\sqrt{r}\bar{\xi}t)\,dm(\xi).$$

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда внутренняя функция — произведение Бляшке

$$B(z) = B(z,\{z_k\}) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{|z_k|z_k - z}{z_k(1-\bar{z}_k z)},$$

а класс X совпадает с аналитическим подпространством класса BMO — пространством $BMOA$.

Напомним, что (см. [11, 24]) класс $BMOA$ определяется через норму Гарсиа следующим образом:

$$BMOA(D) = \left\{ f \in H^1(D) : \sup_{|z|<1}\left(\int\limits_T \frac{|f(\xi)-f(z)|^s}{|1-\xi\bar{z}|^2}\,dm(\xi)(1-|z|)\right)^{\frac{1}{s}}\right\},\ 1 \le s < \infty.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее важное утверждение, установленное в работе [18].

Теорема 6. 1. *Следующие условия равносильны:*
(a) *последовательность* $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (WN)*;*
(b) $\widehat{B}(k) = 0\left(\frac{1}{k}\right)$*;*
(c) $M_p(B',r) \le C(1-r)^{1/p-1}$ *для некоторого* p, $1<p<\infty$*;*
(d) $\int\limits_T |B''(r\xi)|\,dm(\xi) \le C_1(1-r)^{-1}$.

2. *Если* $\alpha p \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, $1 \le p < \infty$, *и последовательность* $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ *не касательно сходится к* 1, *то* $M_p(B',r) \le C(1-r)^{\alpha-1}$ *в том и только в том случае, если* $1-|z_k| = O(k^{-\alpha p/(1-\alpha p)})$.

Определение. Пусть X и Y, как и выше, подпространства $H(D)$. Будем говорить, что последовательность $(b_k)_{k\in Z_+}$ — *мультипликатор* из X в Y, если для любой функции f, $f \in X$, $f(z) = \sum\limits_{k\ge 0} a_k z^k$, функция $(Tgf)(z) = \sum\limits_{k\ge0} b_k a_k z^k$ принадлежит Y.

Пространство всех мультипликаторов из X в Y в дальнейшем будем обозначать через $M_T(X,Y)$. Напомним, что

$$H_\alpha^{\infty,\infty,\beta}(D) = \{f \in H(D) : \sup_{r\in I} M_\infty(\widetilde{D}^\alpha f, r)(1-r)^\beta < \infty,\ \beta>0,\ \alpha\in\mathbb{R}\}.$$

Легко видеть (см. [6]), что $H_\alpha^{\infty,\infty,\alpha}(D) = Bl(D)$, $H_\beta^{\infty,\infty,\beta-\alpha} = \Lambda_A^\alpha(D)$, $\beta>\alpha>0$, где $Bl(D)$ и $\Lambda_A^\alpha(D)$ — известные пространства Блоха и Липшица — Зигмунда (см. [11]).

Теорема 7. *Пусть* $g \in H(D)$, $g(z) = \sum\limits_{k\ge 0} b_k z^k$. *Тогда следующие условия равносильны:*

1) $g \in M_T(BMOA(D), H^{\infty,\infty,\beta}_{\alpha}(D))$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$;

2) $\sup\limits_{r\in(0,1)} \big(\int\limits_T |\widetilde{D}^U g(r\xi)|\, dm(\xi)\big)(1-r)^V < \infty$ *для некоторых* U, V, $V > 0$, $U \in \mathbb{R}$, $V - \beta = U - \alpha$.

Замечание. Описание пространств коэффициентных мультипликаторов, действующих из класса $BMOA$ или в класс $BMOA$, было, по-видимому, начато в статье [27]. Теорема 7 дополняет результаты этой работы.

Следствие 6. *Имеют место равенства*

$$M_T\big(BMOA(D), \beta l(D)\big) = \{g \in H(D) : \sup_{r\in(0,1)} M_1(\overline{R}^{\alpha} g, r)(1-r)^{\alpha} < \infty,\ \alpha \in (0,\infty)\},$$

$$M_T\big(BMOA(D), \Lambda^{\alpha}_{A}(D)\big) = \{g \in H(D) : \sup_{r\in(0,1)} M_1(\overline{R}^{\gamma} g, r)(1-r)^{\gamma-\alpha} < \infty,\ \gamma > \alpha > 0\}.$$

Замечая, что $f \in M_T(BMOA(D), Bl(D))$, $f = \frac{1}{1-z}$, *получаем хорошо известное вложение* $BMOA \subset Bl$ (*см., например,* [11]).

Доказательство теоремы 7. В дальнейшем, как и выше, $\widetilde{D}^{-\alpha}(\widetilde{D}^{\alpha} f) = f$ для $\alpha > 0$. Для доказательства импликации 2) $\Rightarrow$ 1) заметим, что из леммы 4 следует

$$|h(r\rho^2\xi)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \widetilde{D}^{-1} g_{\xi r}(\rho\bar{t})\widetilde{D}^1 f(t\rho)\, dm(t)\right| \le c(\rho)\int\limits_D |\widetilde{D}^2\widetilde{D}^{-1} g_{\xi r}(w)|\,|\widetilde{D}^1 f(\overline{w})|\,(1-|w|)\, dm_2(w), \qquad (3.1)$$

$$c(\rho) \to c_1, \quad \rho \to 1, \quad g_w(z) = g(wz), \quad w, z \in D,$$
$$h(r\rho^2\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_T g_{\xi r}(\rho\bar{t}) f(t\rho)\, dm(t), \quad \xi \in T,\ \rho, r \in (0,1).$$

Переходя в (3.1) к пределу при $\rho \to 1$ и принимая во внимание соотношение $(\widetilde{D}^2\widetilde{D}^{-1}\widetilde{D}^{-1} g)_{r\xi}(w) \in H^{\infty}(D)$ и лемму 4, приходим к неравенству

$$|h(r\xi)| \le c\|(\widetilde{D}^2\widetilde{D}^{-1}\widetilde{D}^{-1} g)_{r\xi}(w)\|_{H^1(D)} \lesssim \int\limits_T |\widetilde{D}^2\widetilde{D}^{-1}\widetilde{D}^{-1} g(r\xi)|\, dm(\xi).$$

Вместо $h(z)$, $g(z)$ возьмем далее соответственно $\widetilde{D}^1\widetilde{D}^1\overline{R}^{\alpha} h(z)$, $\widetilde{D}^1\widetilde{D}^1\overline{R}^{\alpha} g(z)$, $\alpha > 0$, повторим проведенные рассуждения и получим

$$|\widetilde{D}^1\widetilde{D}^1\overline{R}^{\alpha} h(r\xi)| \lesssim \int\limits_T |\overline{R}^{\alpha}\widetilde{D}^2 g(r,t)|\, dm(t).$$

Следовательно,

$$\sup_{r\in I} |\widetilde{D}^1\widetilde{D}^1\overline{R}^{\alpha} h(r\xi)|\,(1-r)^{\beta+2} \lesssim \sup_{r\in I}\left(\int\limits_T |\overline{R}^{\alpha}\widetilde{D}^2 g(r\xi)|\, dm(\xi)\right)(1-r)^{\beta+2}.$$

Остается применить леммы 1 (п. 2) и 3 (п. 1):

$$\sup_{r\in I}\int\limits_T |\overline{R}^\alpha \widetilde{D}^2 g(r\xi)|\,dm(\xi)\,(1-r)^{\beta+2} \lesssim \sup_{r\in I}\int\limits_T |\overline{R}^\alpha \overline{R}^2 g(r\xi)|\,dm(\xi)\,(1-r)^{\beta+2}$$

$$\lesssim \sup_{r\in I}\biggl(\int\limits_T |\overline{R}^\alpha g(r\xi)|\,dm(\xi)\biggr)(1-r)^\beta < \infty, \quad \beta>0.$$

Аналогично применяя леммы 1 (п. 2) и 3 (п. 1) слева, выводим $\sup\limits_{r\xi\in D}|\overline{R}^\alpha h(r\xi)|\,(1-r)^\beta < C$. Поэтому

$$\sup_{r\in I}\biggl(\int\limits_T |\overline{R}^U g(r\xi)|\,dm(\xi)\biggr)(1-r)^v < \infty.$$

Докажем обратную импликацию. Заметим, что $h(wz)-h_w(z) = (\widetilde{D}^m g_w)(z)$, $w\in D$, где

$$h(z)=\sum_{k\ge0} b_k a_k z^k, \quad g(z)=\sum_{k\ge0} b_k z^k, \quad f_w(z)=\frac{1}{(1-wz)^{m+1}}=\sum_{k\ge0} a_k(zw)^k.$$

Ввиду теоремы о замкнутом графике с учетом вложения $H^\infty\subset BMOA$ (см. [11]) выполняется неравенство

$$\|\widetilde{D}^m g_w(z)\|_{H^{\infty,\infty,\beta}_\alpha(D)} \le C\left\|\frac{1}{(1-wz)^{m+1}}\right\|_{H^\infty(D)}, \quad m\in\mathbb{N},\ w\in D.$$

Из леммы 1 (п. 2) в силу неравенства

$$\|f_w(z)\|_{H^\infty(D)} \le \frac{1}{|1-wz_0|^{m+1}}, \quad f_w(z)=\frac{1}{(1-wz)^{m+1}}, \quad w\in D,$$

находим

$$\|\overline{R}^m g_w(z)|_{H^{\infty,\infty,\beta}_\alpha(D)} \le \frac{C}{|1-wz_0|^{m+1}}, \quad |z_0|=1.$$

Следовательно, используя снова лемму 1, получаем

$$\|\overline{R}^{\alpha+m} g(wr\xi)|\,(1-r)^\beta \le \frac{C}{|1-wz_0|^{m+1}}, \quad w\in D,\ \beta>0.$$

Положим $w=r\varphi$. Тогда, интегрируя обе части неравенства по T и учитывая лемму 3, выводим окончательно, что $\int\limits_T |\overline{R}^\alpha g(r\xi)|\,dm(\xi)\,(1-r)^\beta < \infty$, $\beta>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Остается еще раз воспользоваться леммой 3.

Теорема 7 доказана полностью.

Из теоремы 6 и теоремы 7 следует

Теорема 8. 1. *Следующие условия равносильны:*

(a) *последовательность* $(z_k)_{k=1}^\infty$ *удовлетворяет условию* (WN);

(b) *оператор* T_B *ограниченно действует из* $BMOA(D)$ *в* $H^{\infty,\infty,B}_{\beta+1}(D)$, $\beta>0$;

(c) $\widehat{B}(k)=O\left(\frac{1}{k}\right)$.

2. *Пусть* $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ *и последовательность* $(z_k)_{k=1}^\infty$ *не касательно сходится к* 1. *Тогда следующие условия равносильны:*

(a) $1-|z_k|=O(k^{-\alpha/(1-\alpha)})$;

(b) *оператор* T_B *действует ограниченно из* $BMOA(D)$ *в* $H^{\infty,\infty,\beta-\alpha}_\beta(D)$, $\beta>\alpha$.

Замечание. Легко видеть, что предложенный выше подход можно использовать и в других ситуациях, когда пространство мультипликаторов имеет удобный вид и применима теорема 6.

§ 4. Формулировки и доказательства вспомогательных утверждений

Лемма 1. 1. *Пусть* γ_1, $\gamma_2 > 1$. *Тогда*

$$M = \int\limits_T \frac{dm(\xi)}{|1 - z\xi|^{\gamma_1} |1 - w\bar{\xi}|^{\gamma_2}} \le \frac{C_1(1 - |z|)^{1-\gamma_1}}{|1 - z\bar{w}|^{\gamma_2}} + \frac{C_2(1 - |w|)^{1-\gamma_2}}{|1 - z\bar{w}|^{\gamma_1}}, \quad w \in D.$$

2. *Пусть* $\alpha > 0$. *Тогда* $\overline{R}^{\alpha} f \in H_0^{p,q,s}$ *в том и только в том случае, если* $\widetilde{D}^{\alpha} f \in H_O^{p,q,s}$, $s > 1, 0 < p, q \le \infty$, *где*

$$H_\beta^{p,\infty,\alpha} = \{f \in H(D) : \sup_{r \in I} M_p(D^\beta f, r)\,(1 - r)^\alpha < \infty,\, \beta \in \mathbb{R},\, \alpha \ge 0,\, 0 < p \le \infty\};$$

$$H_\beta^{\infty,q,\alpha} = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 (M_\infty(D^\beta f, z))^q (1 - r)^\alpha \, dr < \infty,\, \alpha > -1, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Доказательство леммы 1. Имеем

$$M = \int\limits_{\xi|1-\xi\bar{z}| \ge \sigma|1 - z\bar{w}|} (\dots)\, dm(\xi) + \int\limits_{\xi|1-\xi\bar{z}| \ge \sigma|1 - z\bar{w}|} (\dots)\, dm(\xi) = \widetilde{M}_1 + \widetilde{M}_2.$$

Легко видеть, что если число σ выбрать достаточно близким к нулю, то в силу неравенства $|1 - \xi\bar{z}| < \sigma|1 - z\bar{w}|$ будем иметь $C_2|1 - w\bar{z}| < |1 - w\bar{\xi}| < C_1|1 - w\bar{z}|$, $\xi \in T$, $w, z \in D$. Следовательно, получаем

$$\widetilde{M}_1 = \int\limits_{|1-\xi\bar{z}| > \sigma|1 - w\bar{z}|} \frac{dm(\xi)}{|1 - \bar{\xi}z|^{\gamma_1} |1 - \bar{\xi}w|^{\gamma_2}} \le \frac{C_3(1 - |w|)^{1-\gamma_2}}{|1 - w\bar{z}|^{\gamma_1}},$$

$$\widetilde{M}_2 = \int\limits_{|1-\bar{\xi}z| \le \sigma|1 - w\bar{z}|} \frac{dm(\xi)}{|1 - \bar{\xi}z|^{\gamma_1} |1 - \bar{\xi}w|^{\gamma_2}} \le \frac{C_4(1 - |z|)^{1-\gamma_1}}{|1 - w\bar{z}|^{\gamma_2}}.$$

Утверждение второй части леммы установлено в работе [9].

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Справедливы следующие оценки:*

1) $\int\limits_0^1 M_p^q(\widetilde{D}^{\alpha+1}\widetilde{D}^{-1} g, \rho)\,(1 - \rho)^{\alpha + \alpha q - \beta q}\, d\rho \le C\|g\|^q_{H_\beta^{p,q,\alpha}}$, где $g \in H_\beta^{p,q,\alpha}$, $0 < p$, $q < \infty$, $\alpha(1 + q) - \beta q > -1$,

2) $\lim\limits_{R\to 1} \bigl|\int\limits_T \overline{g(R\xi)} f(R\xi)\, dm(\xi)\bigr| \le C \int\limits_D |\overline{R}^{\alpha} g(w)|\, |f(\bar{w})|\, (1 - |w|)^{\alpha - 1}\, dm_2(w)$, $\alpha > 0$, $f, g \in H(D)$, $g(z) = \sum\limits_{k \ge 0} b_k z^k$, $\overline{R}^s g(z) = \sum\limits_{k \ge 0} (k + 1)^s b_k z^k$, $s \in \mathbb{R}$;

3) $N = \bigl(\int\limits_D \frac{|f(w)|\,(1-|w|)^\alpha}{|1-wz|^\beta}\, dm_2(w)\bigr)^q \le C \int\limits_D \frac{|f(w)|^q (1-|w|)^{\alpha q} (1-|z|)^{-\delta q}\, dm_2(w)}{|1-wz|^{2+(\beta-2-\delta)q}}$, $q \ge 1$, $f \in H(D)$, $\alpha q > -1$, $\delta > 0$, $z \in D$.

Доказательство леммы 2. 1. Для доказательства воспользуемся леммой 1 (п. 2) и теоремой Харди — Литтлвуда (см., например, [14]):

$$\int\limits_0^1 M_p^q(\widetilde{D}^{\alpha+1}\widetilde{D}^{-1} g, \rho)\,(1 - \rho)^{\alpha(1+q) - \beta q}\, d\rho$$

$$\lesssim \int_0^1 M_p^q(\overline{R}^{\alpha+1}\overline{R}^{-1}g,\rho)\,(1-\rho)^{\alpha(1+q)-\beta q}\,d\rho$$

$$\lesssim \int_0^1 M_p^q(\overline{R}^{\alpha}g,\rho)\,(1-\rho)^{\alpha(1+q)-\beta q}\,d\rho \lesssim \|g\|^q_{H_\beta^{p,q,\alpha}}.$$

2. Оценка следует непосредственно из легко проверяемого тождества Литтлвуда — Пэли:

$$\int_T f(rt)\overline{g(rt)}\,dm(t) = \frac{2^{m-1}}{r^2(m-1)!\pi}\int_0^r\int_T f(R\xi)\overline{\overline{R}^m g(R,\xi)}\left(\log\left(\frac{r}{R}\right)\right)^{m-1} R\,dRdm(\xi).$$

3. Воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$N \lesssim \left(\int_D \frac{|f(w)|^q(1-|w|)^{\alpha q}\,dm_2(w)}{|1-\bar{w}z|^{2+((\beta-2)-\delta)q}}\right)\left(\int_D \frac{dm_2(w)}{|1-\bar{w}z|^{2+\delta q}}\right)^{q/q'}.$$

Остается использовать легко выводимую (см. (1.6)) оценку

$$\left(\int_D \frac{dm_2(w)}{|1-wz|^{2+\delta q}}\right)^{q/q'} \lesssim (1-|z|)^{-\delta q}, \quad z\in D,\ \delta>0,$$

$$N \lesssim \int_D \frac{|f(w)|^q(1-|w|)^{\alpha q}(1-|z|)^{-\delta q}}{|1-w\bar{z}|^{2+((\beta-2-\delta)q}}\,dm_2(w).$$

Лемма 2 доказана полностью.

Лемма 3. *Имеют место следующие оценки:*

1. $H_V^{p,q,\alpha} = H_U^{p,q,\beta}$, $\alpha,\beta\ge 1$, $u,v\in\mathbb{R}$, $u-v=\beta-\alpha$, $0<q$, $p\le\infty$, *где*

$$(\widetilde{D}^s f)(z) = \sum_{k\ge 0}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(k+s+1)}a_k z^k \quad s<0, f(z)\in H(D), f(z)=\sum_{k\ge 0}a_k z^k.$$

2. *Выполнены соотношения*

(a) $\left(\int\limits_0^1\int\limits_T |f(r\varphi)|^p(1-r)^\alpha\,dm(\varphi)rdr\right)^{q/p} \lesssim \int\limits_0^1 M_p^q(f,|w|)(1-|w|)^t\,dm_2(w)$, *где* $0<p$, $q<\infty$, $f\in H(D)$, $q\le p$, $\alpha>-1$, $f\underset{s}{\in} H_0^{q,p,t}$, $t=(\alpha+1)q/p-1$;

(b) $\left(\int\limits_0^1\int\limits_T |(f(r\varphi))|^p(1-r)^\alpha r\,drdm(\varphi)\right) \le C\int\limits_D |f,(w)|^{ps}(1-|w|)^{(\alpha+2)s-2}\,dm_2(w)$, *где* $s\le 1$, $\alpha>\frac{1-2s}{s}$, $0<p<\infty$, $f\in H_0^{ps,ps,r}$, $r=(\alpha+2)s-2$.

Доказательство леммы 3. 1. Это утверждение установлено в работе [6].

2. Для доказательства второй части леммы нам потребуется диадическое разбиение круга D:

$$D_{jk} = \{z=r\xi,\ 2^{-k-1}<1-r\le 2^{-k},$$
$$\pi j2^{-k}<\theta\le\pi(j+1)2^{-k},\ j=-2^k,\dots,2^k-1\};$$

$$D^*_{jk} = \{z = r\xi,\ 2^{-k-2} < 1 - r \le 2^{-k+1},$$
$$\pi(j-1/2)2^{-k} < \theta \le \pi(j+1/2)2^{-k},\ j = -2^k, \dots, 2^k - 1\}.$$

Нам также потребуется оценка

$$\max_{z \in D_{k,l}} |f(z)|^p \le C2^{2k} \int\limits_{D_{k,l}} |f(z)|^p \, dm_2(z), \quad 0 < p < \infty,\ f \in H(D), \tag{3.2}$$

установленная, например, в [28].

(a) Имеем

$$K = \left(\int\limits_D |f(w)|^p (1 - |w|)^\alpha \, dm_2(w) \right)^{q/p} = \sum_{k \ge 0} \left(\sum_{l=2^{-k}}^{2^k - 1} \int\limits_{D_{k,l}} |f(w)|^p (1 - |w|)^\alpha \, dm_2(w) \right)^{q/p},$$

$$K \lesssim \sum_{k \ge 0} \Big(\sum_l (\max_{w \in D_{k,l}} |f(w)|^p) 2^{-k(\alpha+2)} \Big)^{q/p}.$$

Далее, учитывая оценку (3.2) и тот факт, что дуги $I^*_{k,l} = \{\xi \in T : z = r\xi \in D^*_{k,l}\}$ конечнократно покрывают окружность T, получаем

$$K \lesssim \sum_{k \ge 0} \left(\sum_l \left(\int\limits_{I^*_{k,l}} \sup_{z \in (1 - 2^{-k+1}, 1 - 2^{-k-2}} |f(z)|^p \, dm(\xi) \right) 2^{-k(\alpha+1)} \right)^{q/p}$$

$$\lesssim \sum_{k \ge 0} \left(\int\limits_T |f(r_0\xi)|^p \, dm(\xi) \right)^{q/p} 2^{-k(q/p)(\alpha+1)} \lesssim \int\limits_0^1 M_p^q(f, \rho)(1 - \rho)^t \, d\rho.$$

Оценка (b) установлена в [28] (см. также [29]).

Лемма 3 доказана полностью.

Лемма 4. 1. *Пусть $f, g \in H(D)$, $\alpha > 0$. Тогда*

$$\left| \int\limits_T f(r\bar{t}) g(rt) \, dm(t) \right| \le C \int\limits_D |f(w)| \, |\widetilde{D}^\alpha g(w)| \, (1 - |w|)^{\alpha - 1} \, dm_2(w), \quad r > \frac{1}{2}.$$

2. *Функция f принадлежит $BMOA(D)$ в том и только в том случае, если для любой функции g, $g \in H^1(D)$, справедлива оценка*

$$\int\limits_D |\widetilde{D} f(w)| \, |\widetilde{D} g(w)| \, (1 - |w|) \, dm_2(w) \le c\|g\|_{H^1(D)}.$$

Утверждения 1 и 2 леммы содержатся соответственно в [29, 30].

Лемма 5. *Пусть $s > -1$, $r, t \ge 0$, $r + t - s > 2$, $\xi, w \in D$. Тогда*

$$\int\limits_D \frac{(1 - |z|)^s}{|1 - z\bar{\xi}|^r |1 - z\bar{w}|^t} \, dm_2(z) \le \begin{cases} \frac{C}{|1 - \bar{\xi} w|^{r+t-s-2}}, & r - s,\ t_s < 2, \\ \frac{C}{(1 - |\xi|)^{r-s-2} |1 - \xi\bar{w}|^t}, & t - s < 2 < r - s. \end{cases}$$

Доказательство см. в [24].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стейн Е. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

2. *Пеллер В. В., Хрущев С. В.* Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы // Успехи мат наук. 1982. Т. 37, № 1. С. 53–124.

3. *Dyakonov K. M.* Besov spaces and outer functions // Mich. Math. J. 1998. V. 45. P. 143–157.

4. *Aleman A.* Hilbert spaces of analytic functions between the Hardy space and the Dirichlet space // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 115. P. 97–104.

5. *Dyakonov K. M.* Equivalent norms on Lipschitz-type spaces of holomorphic functions // Acta Math. 1997. V. 178. P. 143–167.

6. *Tevtiĉ M., Pavloviĉ M.* Coefficient multipliers on spaces of analytic functions // Acta Sci. Math. 1998. V. 64. P. 531–545.

7. *Шамоян Р. Ф.* Непрерывные функционалы и мультипликаторы степенных рядов одного класса голоморфных в полидиске функций // Изв. вузов. Математика. 2000. № 7. С. 84–87.

8. *Blasco O.* Multipliers on spaces of analytic functions // Canad. J. Math. 1995. V. 47. P. 44–64.

9. *Buckley S. M., Koskela P., Vukotiĉ D.* Fractional integration, differentiation, and weighted Bergman spaces // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1999. V. 126, N 2. P. 377–385.

10. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.

11. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

12. *Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K.* Theory of Bergman spaces. New York: Springer-Verl., 2000.

13. *Zhu K.* Operator theory in function spaces. New York: Springer, 1990.

14. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces. New York: Acad. Press, 1970.

15. *Дьяконов К. М.* Гладкие функции и коинвариантные подпространства оператора сдвига // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, № 5. С. 117–147.

16. *Ahern P., Jeviĉ M.* Inner multipliers of the Besov spaces, $0 < p \leq 1$ // Rocky Mountain J. Math. 1990. V. 20, N 3. P. 753–764.

17. *Dyakonov K. M.* Multiplication by Blaschke products and stability of ideals in Lipschitz algebras // Math. Scand. 1993. V. 73. P. 246–258.

18. *Вербицкий И.* О коэффициентах Тейлора и L^p-модулях непрерывности произведений Бляшке // Зап. науч. семинаров ЛОМИ/ Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд-ние. 1982. Т. 107. С. 27–35.

19. *Шамоян Р. Ф.* Об ограниченности операторов Теплица в пространствах типа $BMOA$ // Тез. докл. междунар. конф. «Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках». Воронеж, 2000. С. 232.

20. *Виноградов С. А., Хавин В. П.* Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах // Зап. науч. семинаров ЛОМИ/ Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд-ние. 1976. Т. 56. С. 12–59.

21. *Виноградов С. А.* Базисы из показательных функций и свободная интерполяция в банаховых пространствах с p-нормой // Зап. науч. семинаров ЛОМИ/ Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд-ние. 1976. Т. 65. С. 17–69.

22. *Шамоян Р. Ф.* О произведениях Бляшке в пространствах Бесова и в классах типа $BMOA$ // Тез. докл. междунар. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж, 2001. С. 283.

23. *Ortega J. M., Fabrega J.* Hardy's inequality and embeddings in holomorphic Triebel — Lizorkin spaces // Illinois. J. Math. 1999. V. 43, N 4. P. 733–751.

24. *Ortega J. M., Fabrega J.* Pointwise multipliers and corona type decomposition in $BMOA$ // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1996. V. 46. P. 111–137.

25. *Dorronsoro J. R.* Mean oscillation and Besov spaces // Canad. Math. Bull. 1985. V. 28. P. 474–480.

26. *Шведенко С. В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге и шаре // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 23. С. 3–123. (Итоги науки и техники).

27. *Mateljeviĉ M., Pavloviĉ M.* Multipliers of H^p and $BMOA$ // Pacific J. Math. 1990. V. 146, N № 1. P. 71–84.

28. *Djrbashian A. È, Shamoyan F. A.* Topics in the theory of A^p_α spaces. Leipzig: Teubner-Verl., 1988. (Teubner Texte zur Math.; 105).

29. *Шамоян Р. Ф.* О мультипликаторах из пространств типа Бергмана в пространства Харди в поликруге // Укр. мат. журн. 2000. № 10. С. 405–415.

30. *Шамоян Ф. А.* Теплицевы операторы в некоторых пространствах голоморфных функций и новая характеристика классов $BMOA$ // Изв. АН Арм. ССР. 1987. № 2. С. 122–132.

Статья поступила 16 августа 2001 г., окончательный вариант — 14 мая 2002 г.

Шамоян Роми Файзоевич
Брянский гос. университет, ул. Бежицкая, 14, Брянск 241036
root@shamoyan.bitmcnit.bryansk.su