Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 517.957

О W_q^l–РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ, КОГДА УРАВНЕНИЯ СТРОЯТСЯ НА ОСНОВЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

А. П. Копылов

Аннотация: Получено в определенном отношении окончательное решение проблемы регулярности с точки зрения теории пространств Соболева решений системы (вообще говоря) нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными в случае, когда эта система локально близка к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Главными следствиями этого результата являются теоремы 5 и 8.

Согласно первой из них старшие производные эллиптического C^l-гладкого решения системы l-го порядка нелинейных дифференциальных уравнений, построенных на основе C^1-гладких функций, удовлетворяют локально условию Гёльдера с любым показателем α, $0 < \alpha < 1$ (по поводу доказательства см. [6]).

Вторая же теорема гласит о том, что если система линейных дифференциальных уравнений l-го порядка с измеримыми коэффициентами и правыми частями равномерно эллиптична, то при условии (достаточно) медленного изменения старших ее коэффициентов степень локальной суммируемости частных производных l-го порядка каждого $W^l_{q,\mathrm{loc}}$-решения, $q > 1$, системы совпадает со степенью локальной суммируемости младших коэффициентов и правых частей.

Ключевые слова: системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, линейные равномерно эллиптические системы с разрывными коэффициентами, W_q^l-регулярность решений

В статьях [1–3] изучались свойства решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, которые преобразованиями типа преобразования Кордеса (см. [4]) локально приводятся к виду

$$\mathfrak{L}(x; f(x); f'(x); \dots; f^{(l)}(x)) \\ = V(x; f(x); f'(x); \dots; f^{(l)}(x)) + T(x; f(x); f'(x); \dots; f^{(l-1)}(x)) = 0 \quad (1)$$

$(T(x; v^0; v^1; \dots; v^{l-1}) = \mathfrak{L}(x; v^0; v^1; \dots; v^{l-1}; 0))$, где оператор V близок к эллиптическим линейным дифференциальным операторам с постоянными коэффициентами. Результаты работ [1–3] легли в основу недавних исследований, позволивших установить, что старшие производные эллиптического C^l-гладкого решения системы нелинейных дифференциальных уравнений l-го порядка, которые строятся с использованием C^1-гладких функций, удовлетворяют локально

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–01009), Международной ассоциации INTAS и государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации.

условию Гёльдера с любым показателем α, $0<\alpha<1$ [5, 6, см. также теорему 5 настоящей статьи] (это утверждение является распространением на случай систем любого порядка хорошо известных результатов Л. Ниренберга и Ч. Морри о гёльдеровости старших производных решений одного уравнения 2-го порядка (Ниренберг) и системы 2-го порядка (Морри) [7, 8]). В связи с последним обстоятельством представляется естественным подвергнуть более тщательному анализу системы, приводимые упомянутым выше способом к виду (1).

Данную работу мы как раз и посвящаем решению этой задачи. Основные ее результаты — теоремы 2, 3 и 6–8, причем последние три теоремы касаются случая систем линейных уравнений. Поясним существо дела, остановившись на случае систем линейных уравнений более подробно.

Предположим, что система $\sum\limits_{|p|\le l} a_p(x)\partial^p f(x) = h(x)$ l-го порядка, составленная из k линейных уравнений с частными производными относительно m искомых вещественных функций n вещественных переменных (см. ниже систему (11′)), обладает измеримыми коэффициентами и правыми частями, причем для нее выполнены также следующие условия.

($\circ$) Система (11′) *равномерно эллиптическая*: существует число $t\in\,]1,\infty[$ такое, что почти всюду в U

$$\left|a_p^{j\varkappa}(x)\right|\le t,\quad |p|=l,\ j=1,2,\dots,k,\ \varkappa=1,2,\dots,m,$$

и

$$\left|\sum_{|p|=l}\zeta^p a_p(x)u\right|\ge\frac{1}{t},\quad \zeta\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m,\ |\zeta|=1,\ |u|=1.$$

($\circ\circ$) Для старших коэффициентов $a_p^{j\varkappa}$, $|p|=l$, системы выполняется *условие медленного изменения*, т. е. существует неотрицательное число ε такое, что у каждой точки $x\in U$ найдутся окрестность U_x ($\subset U$) и измеримое множество $E\subset U_x$, $\operatorname{mes}(U_x\setminus E)=0$, для любых двух точек x' и x'' которого справедливы неравенства

$$\left|a_p^{j\varkappa}(x')-a_p^{j\varkappa}(x'')\right|\le\varepsilon,\quad |p|=l,\ j=1,2,\dots,k,\ \varkappa=1,2,\dots,m.$$

($\circ\circ\circ$) Существует такое число $q_0\in[1,\infty[$, что остальные коэффициенты $a_p^{j\varkappa}$, $|p|<l$, и правые части h_j рассматриваемой системы принадлежат пространству $L_{q_0,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{R})$.

Замечание 1. Условия ($\circ$) и ($\circ\circ$) не являются независимыми: из условия ($\circ$) вытекает условие ($\circ\circ$) с $\varepsilon=2t$. Для нас важно то обстоятельство, что параметр ε медленного изменения старших коэффициентов рассматриваемой системы (11′) может принимать любое значение, меньшее $2t$.

Замечание 2. К числу систем (11′), удовлетворяющих условиям ($\circ$)–($\circ\circ\circ$), относятся, например, система Бельтрами и ее различные многомерные обобщения, а также равномерно эллиптические системы с непрерывными коэффициентами и правыми частями.

При выполнении условий ($\circ$)–($\circ\circ\circ$) для линейных систем (11′) с измеримыми коэффициентами и правыми частями имеет место следующее утверждение о $W^l_{q_0,\mathrm{loc}}$-регулярности их решений (см. ниже теорему 8): 1) *если при фиксированных* $q_0\in\,]n,\infty[$ *и* $t\in\,]1,\infty[$ *и при достаточно малом* ε *система* (11′) *удовлетворяет условиям* ($\circ$)–($\circ\circ\circ$), *то каждое* $W^l_{2,\mathrm{loc}}$*-решение* f *системы есть ее*

$W^l_{q_0,\mathrm{loc}}$*-решение (и, следовательно,*[1] $f \in C^{(l-1)+(1-n/q_0)}_{\mathrm{loc}}$*), и* 2) *если* $1 \le q_0 \le n$*, то при любых* $t > 1$, $\varepsilon \ge 0$ *существует система* $(11')$ *первого порядка, удовлетворяющая условиям* $(\circ)$–$(\circ\circ\circ)$ *и обладающая неустранимо разрывным* $W^1_{q_0,\mathrm{loc}}$*-решением* (в силу замечания 2 к теореме 8 $W^l_{2,\mathrm{loc}}$-решения в первом ее утверждении могут быть заменены на $W^l_{q,\mathrm{loc}}$-решения, где q — любое число, большее 1).

Другими словами, если система $(11')$ с измеримыми коэффициентами и правыми частями является равномерно эллиптической, то при достаточно медленном изменении старших ее коэффициентов $a^{j\varkappa}_p$, $|p| = l$, степень (локальной) суммируемости частных производных l-го порядка каждого $W^l_{2,\mathrm{loc}}$-решения системы та же, что и у ее младших коэффициентов и правых частей.

Заметим, что теорема 8 (наряду с теоремой 5 о гёльдеровости старших производных эллиптических C^l-гладких решений систем (11) нелинейных уравнений) является одним из главных итогов наших исследований W^l_q-регулярности решений систем, приводимых локально преобразованиями типа преобразований Кордеса к виду (1).

1°. Между системами, приводимыми (локально) к виду (1) (см. также ниже систему (8)), и эллиптическими системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных общего вида в случае, когда эти уравнения строятся на основе гладких функций, существует весьма тесная связь. Для описания этой связи, а также для изложения дальнейшего нам необходимо напомнить ряд понятий.

Мы начнем с точной характеризации систем, приводимых локально преобразованиями типа преобразования Кордеса к виду (1).

С этой целью обозначим символом $\mathscr{O} = \mathscr{O}^{n,m,k,l}$, $n \ge 2$, $m \ge 1$, $k \ge 1$, $l \ge 1$, множество всех эллиптических линейных дифференциальных операторов l-го порядка с постоянными коэффициентами, имеющих вид

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_k) = \sum_{|p|=l} a_p \partial^p, \tag{2}$$

где $a_p = \left(a^{j\varkappa}_p\right)_{\substack{j=1,2,\dots,k\\ \varkappa=1,2,\dots,m}}$ — вещественная $(k\times m)$-матрица[2]. Напомним [9], что оператор D эллиптичен в том (и только том) случае, когда его символ $\sigma_D(\zeta) = \sum\limits_{|p|=l} \zeta^p a_p$ удовлетворяет условию $\operatorname{rank}\sigma_D(\zeta) = m$ для каждого $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Используя следующую, эквивалентную, запись оператора (2):

$$\begin{aligned} Dg(x) = \sum_{j=1}^{k}\{D_j g(x)\}e_j &= \sum_{1\le\mu_1\le\dots\le\mu_l\le n} \overset{\circ}{a}_{\mu_1\dots\mu_l}\partial_{\mu_1\dots\mu_l} g(x) \\ &= \sum_{j=1}^{k}\left\{\sum_{\varkappa=1}^{m}\sum_{1\le\mu_1\le\dots\le\mu_l\le n} \overset{\circ}{a}{}^{j\varkappa}_{\mu_1\dots\mu_l}\partial_{\mu_1\dots\mu_l} g_\varkappa(x)\right\}e_j \end{aligned} \tag{2'}$$

[1] Символом $C^{\mu+\alpha}_{\mathrm{loc}}(U,\mathbb{R}^m)$, где U — открытое множество в вещественном арифметическом евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, мы обозначаем пространство всех непрерывных отображений $h : U \to \mathbb{R}^m$, обладающих всеми частными производными вплоть до порядка μ, непрерывными в U, причем производные μ-го порядка этих отображений удовлетворяют локально в U условию Гёльдера с показателем α $(0 < \alpha < 1)$.

[2] Запись в (2) и, как правило, ниже мультииндексная: $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ — мультииндекс, $|p| = \sum\limits_{s=1}^{n} p_s$ — его порядок, $\partial^p = (\partial_1)^{p_1} \circ (\partial_2)^{p_2} \circ \dots \circ (\partial_n)^{p_n}$ — символ частной производной, соответствующей мультииндексу p $(\partial_s = \partial/\partial x_s)$.

($e_1,\dots,e_k$ — канонический базис в $\mathbb{R}^k$; $\partial_{\mu_1\dots\mu_l}=\partial_{\mu_1}\circ\partial_{\mu_2}\circ\dots\circ\partial_{\mu_l}$), построим в случае $l\ge 2$ линейный дифференциальный оператор 1-го порядка[3)]

$$D^0F(y)=\Biggl(\sum_{\varkappa=1}^{m}\sum_{1\le\mu_1\le\dots\le\mu_l\le n}\overset{\circ}{a}{}^{1\varkappa}_{\mu_1\dots\mu_l}\partial_{\mu_1}F_{\mu_2\dots\mu_l,\varkappa}(y),\dots,$$
$$\sum_{\varkappa=1}^{m}\sum_{1\le\mu_1\le\dots\le\mu_l\le n}\overset{\circ}{a}{}^{k\varkappa}_{\mu_1\dots\mu_l}\partial_{\mu_1}F_{\mu_2\dots\mu_l,\varkappa}(y),\dots,\partial_{\nu_1}F_{\nu_2\dots\nu_l,\varkappa}(y)$$
$$-\partial_{\nu_{\varphi(1)}}F_{\nu_{\varphi(2)}\dots\nu_{\varphi(l)},\varkappa}(y),\dots\Biggr),\quad (3)$$

присоединенный в смысле понятий из [10] (см. также [2, 6]) к оператору D из (2), (2′).

Замечание. При $l=1$ мы полагаем $D^0=D$ (ср. с замечанием 2 к теореме 2 в [6]).

Пусть далее $\mathscr{O}_t=\mathscr{O}_t^{n,m,k,l}$ $(1<t<+\infty)$ есть множество эллиптических линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, определяемое следующим образом:

$$\mathscr{O}_t=\Bigl\{D=\sum_{|p|=l}a_p\partial^p\in\mathscr{O},\ \bigl|a_p^{j\varkappa}\bigr|\le t,\ j=1,\dots,k,\ \varkappa=1,\dots,m,\ |p|=l,$$
$$\inf_{\zeta\in\mathbb{R}^n,\,u\in\mathbb{R}^m,\,|\zeta|=1,\,|u|=1}\Bigl|\sum_{|p|=l}\zeta^p a_p u\Bigr|\ge 1/t\Bigr\}\quad (4)$$

(обращаем внимание на то, что в силу (4) $\bigcup\limits_{t>1}\mathscr{O}_t=\mathscr{O}$). Положим (при $1<t<+\infty$)[4)]

$$\chi(t)=\inf_{D\in\mathscr{O}_t}\Lambda(D^0),\quad (5)$$
$$\Lambda(D^0)=\min_{\zeta\in\mathbb{R}^n,u\in\mathbb{R}^{mn_{l-1}},\,|\zeta|=1,\,|u|=1}|\sigma_{D^0}(\zeta)u|,$$

$n_{l-1}=\frac{(n+l-2)!}{(l-1)!(n-1)!}$, где D^0 — линейный дифференциальный оператор 1-го порядка, присоединенный посредством соотношения (3) к оператору D из $\mathscr{O}_t$, и

$$\chi^1(t)=\sup_{D\in\mathscr{O}_t}\Bigl\{\sup_{2\le q<+\infty}\Bigl[\frac{1}{q}\Upsilon_q\Bigl(\frac{D^0}{\Lambda(D^0)}\Bigr)\Bigr]\Bigr\}.\quad (6)$$

В (6)

$$\Upsilon_q(D^0)=\sup_{h\in L_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{k_0}),\,\|h\|_q=1}\|\overline{P}h\|_q$$

($\|h\|_q=\bigl\{\int_{\mathbb{R}^n}|h(y)|^q\,dy\bigr\}^{1/q}$; $k_0=k_{0,n,m,k,l}=k+m\sum\limits_{\nu=2}^{\min\{l,n\}}\frac{n!(l-1)!}{\nu!(n-\nu)!(\nu-2)!(l-\nu)!}$) — q-норма сингулярного интегрального оператора $\overline{P}=(\overline{P}_1,\dots,\overline{P}_n)$,

$$(\overline{P}_sh)(x)=-\int_{\mathbb{R}^n}\Bigl\{\frac{\partial}{\partial x_s}H_{D^0}(y-x)\Bigr\}^Th(y)\,dy$$

[3)] F — вектор-функция со значениями в пространстве $\mathbb{R}^{mn_{l-1}}$, $n_{l-1}=\frac{(n+l-2)!}{(l-1)!(n-1)!}$, скалярные функции-компоненты которой суть функции $F_{s_1\dots s_{l-1},\varkappa}$, $1\le s_1\le\dots\le s_{l-1}\le n$, $1\le\varkappa\le m$; $1\le\nu_1\le n$; $1\le\nu_2\le\dots\le\nu_l\le n$; $\overset{\circ}{a}{}^{j\varkappa}_{\mu_1\dots\mu_l}$ — коэффициенты оператора D в записи (2′); $\varphi=\varphi_\nu:\{1,2,\dots,l\}\to\{1,2,\dots,l\}$ — перестановка множества $\{1,2,\dots,l\}$ такая, что $\nu_{\varphi(1)}\le\nu_{\varphi(2)}\le\dots\le\nu_{\varphi(l)}$.

[4)] В случае $l=1$ $\chi(t)=\frac{1}{t}$ (см. [6]).

$$-\Bigg[\int\limits_{|y|=1} y_s\{H_{D^0}(y)\}^T\,ds\Bigg]h(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad (7)$$

$s=1,2,\dots,n$. В соотношениях (7) $\{\cdot\}^T$ — операция транспонирования матриц и $H_{D^0}=D^0U$, где U — фундаментальное решение эллиптического линейного дифференциального оператора $L=(D^0)^*D^0$ 2-го порядка с постоянными коэффициентами ($(D^0)^*$ — формально сопряженный к D^0 оператор), которое при $y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ определяется на основе символа σ_L оператора L формулами (30) и (31) в работе [2] (см. также формулы (13) и (14) в [6] и (3.2.4) и (3.2.5) в [11, гл. 3]).

Замечание. Из лемм 1 и 2 работы [2] вытекает, что

$$0<\chi(t) \quad (<+\infty)$$

и

$$(0<) \quad \chi^1(t)<+\infty,$$

$1<t<+\infty$.

Отправляясь от изложенных понятий, мы можем охарактеризовать систему, локально приводимую посредством преобразований типа преобразования Кордеса к виду (1), как систему (вообще говоря) нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными l-го порядка[5)]

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}_j(x;v_{l-1}(f,x);v^l(f,x))\\ &\quad=\mathfrak{L}_j(x;v^0(f,x);v^1(f,x);\dots;v^{l-1}(f,x);v^l(f,x))=0, \quad j=1,2,\dots,k, \quad (8)\end{aligned}$$

которая составлена из k уравнений относительно m искомых вещественных функций $f_\varkappa$, $\varkappa=1,2,\dots,m$, n вещественных переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$ и для которой имеет место следующее. Для почти всех $x\in U$ функции $\mathfrak{L}_j$, $j=1,2,\dots,k$, принимают конечные значения $\mathfrak{L}_j(x;v_{l-1};v^l)$ всякий раз, когда $(v_{l-1};v^l)=(v^0;v^1;\dots;v^{l-1};v^l)\in\prod\limits_{\nu=0}^{l}(\mathbb{R}^m)^{n_\nu}$, $v^\nu=(\dots,v_{p_\nu,\varkappa},\dots)\in(\mathbb{R}^m)^{n_\nu}$, причем для отображения $\mathfrak{L}$ выполнены приводимые ниже условия (i)–(iii)[6)].

(i) Функции $V_j(x;v_{l-1};v^l)=\mathfrak{L}_j(x;v_{l-1};v^l)-\mathfrak{L}_j(x;v_{l-1};0)$, $j=1,\dots,k$, измеримы, и для почти всех $x\in U$

$$|V(x;v_{l-1};v^l)|\le\eta(x)|v^l|,$$

если $(v_{l-1};v^l)\in\mathbb{R}^{N_l-n}$. Здесь η — неотрицательная измеримая в U функция, локально ограниченная в sup-норме $\|\cdot\|_\infty$: у каждой точки $x\in U$ существует окрестность Z такая, что $\|\eta|_Z\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{z\in Z}\eta(z)<+\infty$.

[5)] В (8) $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$; $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)$; $v^\nu(f,x)=(\dots,\partial^{p_\nu}f_\varkappa(x),\dots)$ — совокупность значений в точке x всех частных производных $\partial^{p_\nu}f_\varkappa(x)$, p_ν — мультииндекс порядка ν, всех функций $f_\varkappa$, $\varkappa=1,2,\dots,m$, упорядоченная, например, лексикографическим способом (см. [1, 2]); $v_{l-1}(f,x)=(v^0(f,x);v^1(f,x);\dots;v^{l-1}(f,x))$; функции $\mathfrak{L}_j$ вещественнозначны и заданы на множестве $U_1=U\times\prod\limits_{\nu=0}^{l}(\mathbb{R}^m)^{n_\nu}\subset\mathbb{R}^{N_l}$, где U — открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$, $N_l=n+m\sum\limits_{\nu=0}^{l}n_\nu$ и $n_\nu=\frac{(n+\nu-1)!}{\nu!(n-1)!}$, $\nu=0,1,\dots,l$. Заметим, что величины $v_{l-1}(f,x)$, $v^\nu(f,x)$ и вводимые в следующем предложении величины v_{l-1}, v^ν всюду ниже будут иметь тот смысл, который мы вкладываем в них в обсуждаемой в данный момент ситуации. Это высказывание распространяется и на все рассматриваемые сейчас символы и понятия.

[6)] В статьях [1, 2] рассматривается еще одно условие. Но, как показано в работе [3], оно является следствием остальных условий из [1, 2].

(ii) Отображение $(x; v_{l-1}) \mapsto T(x; v_{l-1}) = \mathfrak{L}(x; v_{l-1}; 0)$, $(x; v_{l-1}) \in U \times \mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$, измеримо. Кроме того, существует число $q_0 > n$ ($q_0 < +\infty$) такое, что

a) для почти всех точек $x \in U$ отображение $T(x; \cdot) : \mathbb{R}^{N_{l-1}-n} \to \mathbb{R}^k$ удовлетворяет условию Липшица

$$|T(x; v'_{l-1}) - T(x; v''_{l-1})| \le E(x)|v'_{l-1} - v''_{l-1}|, \qquad v'_{l-1}, v''_{l-1} \in \mathbb{R}^{N_{l-1}-n},$$

где E — функция, суммируемая локально в U в степени q_0 ($E \in L_{q_0,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R})$);

b) отображение $T(\cdot; 0) : x \mapsto T(x; 0)$, $x \in U$, принадлежит $L_{q_0,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^k)$.

(iii) Существуют числа ε ($0 \le \varepsilon < +\infty$) и t ($1 < t < +\infty$) такие, что отклонение отображения V от эллиптических линейных дифференциальных операторов из множества $\mathscr{O}_t$ не превосходит числа ε. Последнее означает существование для каждого числа $\varepsilon' > \varepsilon$ и для любой точки $x \in U$ открытой окрестности Z ($\subset U$) этой точки, обратимых линейных отображений $\beta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ и $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и локально ограниченного в sup-норме измеримого матричнозначного отображения $\psi : U \to \mathbb{R}^{k\times k}$, значения $\psi(x)$ которого для почти всех $x \in U$ являются обратимыми матрицами, таких, что если, исходя из $W^l_{q,\mathrm{loc}}$-решения $f : Z \to \mathbb{R}^m$ в Z системы (8), $q \ge 1$ (см. ниже определение 1), построить новое отображение $\bar f = \beta^{-1} \circ f \circ \omega^{-1}$, то это отображение будет $W^l_{q,\mathrm{loc}}$-решением в $\omega(Z)$ системы

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{\psi,\beta,\omega}&(z; v_{l-1}(\bar f, z); v^l(\bar f, z)) \\
&= V_{\psi,\beta,\omega}(z; v_{l-1}(\bar f, z); v^l(\bar f, z)) + T_{\psi,\beta,\omega}(z; v_{l-1}(\bar f, z)) \\
&= \psi(\omega^{-1}(z))V(\omega^{-1}(z); v_{l-1}(\beta \circ \bar f \circ \omega, \omega^{-1}(z)); v^l(\beta \circ \bar f \circ \omega, \omega^{-1}(z))) \\
&\quad + \psi(\omega^{-1}(z))T(\omega^{-1}(z); v_{l-1}(\beta \circ \bar f \circ \omega, \omega^{-1}(z))) = 0 \qquad (9)
\end{aligned}$$

типа (8) уравнений с частными производными, причем для этой системы найдется эллиптический линейный дифференциальный оператор $D = \sum\limits_{|p|=l} a_p \partial^p \in \mathscr{O}_t$, который для почти каждой точки $z \in \omega(Z)$ удовлетворяет условию

$$|V_{\psi,\beta,\omega}(z; v_{l-1}; v^l) - \sum_{|p|=l} a_p \widetilde{v}^p| \le \varepsilon' |v^l|, \quad (v_{l-1}; v^l) \in \mathbb{R}^{N_l - n} \tag{10}$$

($\widetilde{v}^p$ — вектор пространства $\mathbb{R}^m$ с компонентами $v_{p,\varkappa} = v_{p_l,\varkappa}$, $\varkappa = 1, 2, \dots, m$).

Заметим, что в силу (10)

$$|V_{\psi,\beta,\omega}(z; v_{l-1}(\check f, z); v^l(\check f, z)) - D\check f(z)| \le \varepsilon' |v^l(\check f, z)|$$

для почти всех точек $z \in \omega(Z)$, если $\check f \in W^l_{1,\mathrm{loc}}(\omega(Z), \mathbb{R}^m)$.

Кратко условие (iii) можно охарактеризовать так: система (8) преобразованиями типа преобразования Кордеса локально приводится к виду (9), (10).

Определение 1. Решение класса[7)] $W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$ ($W^l_{q,\mathrm{loc}}$-решение), $q \ge 1$, системы (8), для которой выполнены условия (i) и (ii), — это любое отображение $f \in W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$, удовлетворяющее системе (8) почти всюду в U.

[7)] $W^l_q(U, \mathbb{R}^m)$ — пространство Соболева всех отображений $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) : U \to \mathbb{R}^m$ таких, что каждая их функция-компонента h_j, $j = 1, 2, \dots, m$, принадлежит пространству Лебега $L_q(U)$ и обладает всеми обобщенными частными производными вплоть до l-го порядка, также суммируемыми в U в q-й степени; $W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$ — пространство всех отображений $h : U \to \mathbb{R}^m$, обладающих следующим свойством: у каждой точки $x \in U$ существует окрестность $U_x \subset U$, ограничение $h|_{U_x}$ отображения h на которую принадлежит $W^l_q(U_x, \mathbb{R}^m)$.

Аналогично определяется понятие W_q^l-решения системы (8).

Замечание. Придерживаясь соглашения, принятого в работах [1–3], мы полагаем далее, что отображение $\mathfrak{L}$ в (8) — это лучший представитель отображений, совпадающих с $\mathfrak{L}$ почти всюду в U_1:

$$\mathfrak{L}_j(y) = \varlimsup_{r \searrow 0} \frac{1}{r^{N_l} v_{N_l}} \int\limits_{\{w \in \mathbb{R}^{N_l}, |w-y|<r\}} \mathfrak{L}_j(w)dw, \quad y \in U_1, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

(v_{N_l} — объем N_l-мерного единичного шара[8] $B_{N_l}(0,1)$).

Мы будем рассматривать в настоящей статье также эллиптические системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными общего вида (последнее означает, что областью определения функций $\mathfrak{L}_j$ в (11) может быть не только цилиндрическое множество $U_1 = U \times \prod\limits_{\nu=0}^{l} (\mathbb{R}^m)^{n_\nu} \subset \mathbb{R}^{N_l}$, как в случае систем (8), но и любое открытое множество Y пространства $\mathbb{R}^{N_l}$)

$$\mathfrak{L}_j(x; v_{l-1}(f,x); v^l(f,x)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \tag{11}$$

где $\mathfrak{L}_j$ — непрерывные функции, обладающие непрерывными частными производными 1-го порядка относительно всех своих аргументов (функции класса C^1):

$$\mathfrak{L}_j = \mathfrak{L}_j(x; \dots, v_{p_0,\varkappa}, \dots; \dots, v_{p_1,\varkappa}, \dots; \dots; \dots, v_{p_l,\varkappa}, \dots),$$

$(x; \dots, v_{p_0,\varkappa}, \dots; \dots, v_{p_1,\varkappa}, \dots; \dots; \dots, v_{p_l,\varkappa}, \dots) = y \in Y$, Y — открытое множество пространства $\mathbb{R}^{N_l}$. Как и в [5, 6] отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, где U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, мы называем решением класса $C^l = C^l(U, \mathbb{R}^m)$ (C^l-решением) системы (11), если $f \in C^l$ и для любого $x \in U$ точка $y = (x; \dots, \partial^{p_0} f_\varkappa(x), \dots; \dots, \partial^{p_1} f_\varkappa(x), \dots; \dots; \dots, \partial^{p_l} f_\varkappa(x), \dots)$ принадлежит Y и удовлетворяет (11), и эллиптичность системы (11) понимаем в духе следующего определения.

Определение 2 (см. [5, 6]). Система (11) называется *эллиптической*, если[9]

$$\operatorname{rank} \left\{ \sum_{p_l} \zeta^{p_l} \begin{pmatrix} \partial_{v_{p_l,1}} \mathfrak{L}_1(y) & \dots & \partial_{v_{p_l,m}} \mathfrak{L}_1(y) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{v_{p_l,1}} \mathfrak{L}_k(y) & \dots & \partial_{v_{p_l,m}} \mathfrak{L}_k(y) \end{pmatrix} \right\} = m \tag{12}$$

для каждых $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $y \in Y$. Решение $f : U \to \mathbb{R}^m$ ($U \subset \mathbb{R}^n$) класса C^l системы (11) называется *эллиптическим*, если условие эллиптичности (12) выполняется в каждой точке $y = (x; \dots, \partial^{p_0} f_\varkappa(x), \dots; \dots, \partial^{p_1} f_\varkappa(x), \dots; \dots; \dots \dots, \partial^{p_l} f_\varkappa(x), \dots)$, $x \in U$.

Классическим примером систем (8), удовлетворяющих условиям (i)–(iii), является система Бельтрами

$$\partial_{\bar{z}} f(z) = q(z) \partial_z f(z), \quad \|q\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{z \in \operatorname{dom} q} |q(z)| \le \varepsilon < 1$$

(здесь мы пользуемся стандартными комплексными обозначениями: $f : U \to \mathbb{C}$, $q : U \to \mathbb{C}$, U — открытое множество в поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x -$

---

[8] $B(x_0, r) = B_\nu(x_0, r)$ — шар $\{y \in \mathbb{R}^\nu, |y - x_0| < r\}$ в пространстве $\mathbb{R}^\nu$ с центром в точке x_0 и радиуса r.

[9] Суммирование в (12) осуществляется с использованием всех мультииндексов p_l порядка $|p_l| = l$.

$i\partial_y)$, $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, i — мнимая единица). К числу важных примеров систем (8), удовлетворяющих условиям (i)–(iii), относится и следующий (более общий в сравнении с системой Бельтрами) пример систем l-го порядка линейных дифференциальных уравнений с частными производными

$$\sum_{|p|\le l} a_p(x)\partial^p f(x) = h(x), \quad x \in U, \tag{11'}$$

где U — открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$, $h = (h_1, h_2, \dots, h_k) : U \to \mathbb{R}^k$, $a_p(x) = \big(a_p^{j\varkappa}(x)\big)_{\substack{j=1,2,\dots,k\\ \varkappa=1,2,\dots,m}}$ — вещественная $(k\times m)$-матрица. Пример этот представляет собой систему (11′) с измеримыми коэффициентами и правыми частями, для которой выполнены условия ($\circ$)–($\circ\circ\circ$) из введения.

Более того, в силу теоремы 1 (см. ниже) на локальном уровне любая эллиптическая система общего вида (11) нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, построенная на основе C^1-гладких функций $\mathfrak{L}_j$, при исследовании проблем регулярности ее C^l-гладких решений может рассматриваться как система вида (8), удовлетворяющая условиям (i)–(iii) с малым значением параметра ε!

Теорема 1. *Если $f : U \to \mathbb{R}^m$, U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, есть C^l-решение* (эллиптической) *системы* (11), *построенной на основе C^1-гладких функций $\mathfrak{L}_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, то тогда для каждой точки $x_0 \in U$ и для любых двух чисел ε и q_0 таких, что $0 \le \varepsilon < \frac{\chi(t)}{q_0\chi^1(t)}$ и $q_0 > n$, где χ и χ^1 — это функции, определенные соотношениями* (5) *и* (6), *и*

$$\begin{gathered} t = t(D) = t\Big(\sum_{|p|=l} a_p\partial^p\Big) = t\Big(\sum_{|p_l|=l}\Big\{\big(\partial_{v_{p_l,\varkappa}}\mathfrak{L}_j(y_0)\big)_{\substack{j=1,2,\dots,k\\ \varkappa=1,2,\dots,m}}\Big\}\partial^{p_l}\Big) = \max\{2,\tau\}, \\ y_0 = (x_0; \dots, \partial^{p_0} f_\varkappa(x_0), \dots; \dots, \partial^{p_1} f_\varkappa(x_0), \dots; \dots; \dots, \partial^{p_l} f_\varkappa(x_0), \dots), \end{gathered} \tag{13}$$

при этом τ представляет собой наименьшее из чисел λ, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{gathered} |a_p^{j\varkappa}| \le \lambda, \quad j = 1, 2, \dots, k, \ \varkappa = 1, 2, \dots, m, \ |p| = l, \\ \inf_{\zeta\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^m, |\zeta|=1, |u|=1} \Big|\sum_{|p|=l} \zeta^p a_p u\Big| \ge 1/\lambda \end{gathered}$$

($a_p^{j\varkappa}$ *— коэффициенты оператора D из соотношений* (13)), *можно указать окрестность U_{x_0} точки x_0, для которой выполнено следующее: ограничение $\big(f - P^l_{f,x_0}\big)\big|_{U_{x_0}}$ на U_{x_0} разности отображения f и его многочлена P^l_{f,x_0} Тейлора степени l в точке x_0 является решением системы вида* (8), *локально близкой к эллиптическим системам линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, причем эта близость измеряется на основе условий* (i)–(iii) *с указанными выше значениями параметров ε, q_0 и t.*

Замечание. Новая система, о которой идет речь в утверждении теоремы 1, получается перестройкой исходной системы (11) каноническим способом, предложенным в доказательстве теоремы 1′ статьи [6].

Доказательство теоремы 1[10]. Предполагая, что $f : U \to \mathbb{R}^m$ есть C^l-решение эллиптической системы (11), где $\mathfrak{L}_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, — C^1-гладкие

[10] Ср. с доказательством теоремы 1′ в [6].

функции, и рассматривая произвольную точку $x_0 \in U$, построим на основе системы (11) новую систему

$$\widetilde{\mathfrak{L}}(x; v_{l-1}(\widetilde{f}, x); v^l(\widetilde{f}, x)) = \mathfrak{L}\big(x; v_{l-1}(\widetilde{f}, x) + v_{l-1}\big(P^l_{f,x_0}, x\big); v^l(\widetilde{f}, x) + v^l\big(P^l_{f,x_0}, x\big)\big) = 0. \tag{14}$$

Ясно, что система (14) также образована с использованием C^1-гладкого отображения $\widetilde{\mathfrak{L}}$ и эллиптична и что отображение $\widetilde{f} = f - P^l_{f,x_0}$ является ее C^l-решением.

Пусть далее числа ε, q_0 и t те же, что и в условии теоремы (где f и x_0 сейчас — это выбранные выше решение системы (11) и точка из $U = \operatorname{dom} f$). Принимая во внимание C^1-гладкость отображения $\widetilde{\mathfrak{L}}$, рассмотрим множество

$$G = B_n(x_0, r_1) \times B_{N_{l-1}-n}(0, r_2) \times B_{mn_l}(0, r_3) \tag{15}$$

такое, что $\operatorname{cl} G \subset \widetilde{Y} = \operatorname{dom} \widetilde{\mathfrak{L}}$ и

$$\|\widetilde{\mathfrak{L}}'_{v^l}(x; v_{l-1}; v^l) - \widetilde{\mathfrak{L}}'_{v^l}(x_0; 0; 0)\| \le \varepsilon, \quad (x; v_{l-1}; v^l) \in \operatorname{cl} G \tag{16}$$

(в (15) и (16) $B_n(x_0, r_1)$, $B_{N_{l-1}-n}(0, r_2)$ и $B_{mn_l}(0, r_3)$ — n-мерный, $(N_{l-1} - n)$-мерный и mn_l-мерный шары: $B_n(x_0, r_1) \subset \mathbb{R}^n$, $B_{N_{l-1}-n}(0, r_2) \subset \mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$, $B_{mn_l}(0, r_3) \subset \mathbb{R}^{mn_l}$; $\widetilde{\mathfrak{L}}'_{v^l}$ — производная (частный дифференциал) отображения $\widetilde{\mathfrak{L}}$ по переменному v^l и $\|\lambda\|$ — операторная норма линейного отображения λ). А затем, учитывая, что $v_{l-1}(\tilde{f}, x_0) = 0$ и $v^l(\tilde{f}, x_0) = 0$, выберем число ρ, $0 < \rho < r_1$, так, чтобы для $x \in \operatorname{cl} B_n(x_0, \rho)$ выполнялись соотношения $v_{l-1}(\tilde{f}, x) \in B_{N_{l-1}-n}(0, r_2)$ и $v^l(\tilde{f}, x) \in B_{mn_l}(0, r_3)$, и построим отображения $V_\rho : \operatorname{cl} G_\rho \to \mathbb{R}^k$ и $T_\rho : \operatorname{cl}\{B_n(x_0, \rho) \times B_{N_{l-1}-n}(0, r_2)\} \to \mathbb{R}^k$, где $G_\rho = B_n(x_0, \rho) \times B_{N_{l-1}-n}(0, r_2) \times B_{mn_l}(0, r_3)$, полагая

$$V_\rho(x; v_{l-1}; v^l) = \widetilde{\mathfrak{L}}(x; v_{l-1}; v^l) - \widetilde{\mathfrak{L}}(x; v_{l-1}; 0)$$

и

$$T_\rho(x; v_{l-1}) = \widetilde{\mathfrak{L}}(x; v_{l-1}; 0)$$

при $(x; v_{l-1}; v^l) \in G_\rho$.

Для отображения V_ρ имеем

$$\begin{aligned} V_\rho(x; v_{l-1}; v^l) &= \widetilde{\mathfrak{L}}(x; v_{l-1}; v^l) - \widetilde{\mathfrak{L}}(x; v_{l-1}; 0) \\ &= \widetilde{\mathfrak{L}}'_{v^l}(x_0; 0; 0)v^l + \left[\int_0^1 \big\{\widetilde{\mathfrak{L}}'_{v^l}(x; v_{l-1}; \tau v^l) - \widetilde{\mathfrak{L}}'_{v^l}(x_0; 0; 0)\big\}\, d\tau\right] v^l. \end{aligned}$$

Поэтому в силу (16)

$$|V_\rho(x; v_{l-1}; v^l) - \widetilde{\mathfrak{L}}'_{v^l}(x_0; 0; 0)v^l| \le \varepsilon |v^l|, \tag{17}$$

если $(x; v_{l-1}; v^l) \in \operatorname{cl} G_\rho$.

Далее, если $|x - x_0| \le \rho$, $|v'_{l-1}| \le r_2$ и $|v''_{l-1}| \le r_2$, то

$$|T_\rho(x; v''_{l-1}) - T_\rho(x; v'_{l-1})| = |\widetilde{\mathfrak{L}}(x; v''_{l-1}; 0) - \widetilde{\mathfrak{L}}(x; v'_{l-1}; 0)| \le E_\rho(x)|v''_{l-1} - v'_{l-1}|, \tag{18}$$

где

$$E_\rho(x) = \max_{|x-x_0| \le \rho, |v_{l-1}| \le r_2} \|\widetilde{\mathfrak{L}}'_{v_{l-1}}(x; v_{l-1}; 0)\| = C_1 < +\infty.$$

Кроме того, при $x \in B_n(x_0;\rho)$

$$|T_\rho(x;0)| = |\widetilde{\mathfrak{L}}(x;0;0)| \le \max_{|x-x_0|\le\rho} |\widetilde{\mathfrak{L}}(x;0;0)| = C_2 < +\infty. \tag{19}$$

Продолжим теперь отображения V_ρ и T_ρ в цилиндрическую область $B_n(x_0, \rho) \times \mathbb{R}^{N_l-n} \subset \mathbb{R}^{N_l}$ (второе отображение достаточно продолжить в N_{l-1}-мерную область $B_n(x_0,\rho)\times\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$) следующим образом. Продолжение $\widehat{V}_\rho$ отображения V_ρ есть отображение

$$\widehat{V}_\rho : B_n(x_0,\rho) \times \mathbb{R}^{N_l-n} \to \mathbb{R}^k$$

такое, что $\widehat{V}_\rho(y) = V_\rho(y)$, если $y \in \{\operatorname{cl} G_\rho\} \cap \{B_n(x_0,\rho) \times \mathbb{R}^{N_l-n}\}$. А в том случае, когда $y = (x; v_{l-1}; v^l) \in \{B_n(x,\rho) \times \mathbb{R}^{N_l-n}\} \setminus \operatorname{cl} G_\rho$,

$$\widehat{V}_\rho(y) = \widehat{V}_\rho(x; v_{l-1}; v^l) = V_\rho(x; v^*_{l-1}; v^{l*}) + \widetilde{\mathfrak{L}}'_{v^l}(x_0;0;0)(v^l - v^{l*}),$$

где $(v^*_{l-1}; v^{l*})$ — точка пересечения (в $\mathbb{R}^{N_l-n}$) границы множества $B_{N_{l-1}-n}(0,r_2) \times B_{mn_l}(0,r_3)$ и луча, выходящего из точки $(v_{l-1}(\tilde f, x_0); v^l(\tilde f, x_0)) = (0;0) \in \mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$ в направлении точки $(v_{l-1}; v^l)$.

Что же касается отображения T_ρ, то его продолжение

$$\widehat{T}_\rho : B_n(x_0,\rho) \times \mathbb{R}^{N_{l-1}-n} \to \mathbb{R}^k$$

строится так. Для $(x; v_{l-1}) \in B_n(x_0,\rho) \times \operatorname{cl} B_{N_{l-1}-n}(0,r_2)$ мы полагаем $\widehat{T}_\rho(x;v_{l-1}) = T_\rho(x;v_{l-1})$. Если же $(x;v_{l-1}) \in \{B_n(x_0,\rho)\times\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}\} \setminus \{B_n(x_0,\rho)\times \operatorname{cl} B_{N_{l-1}-n}(0, r_2)\}$, то тогда

$$\widehat{T}_\rho(x;v_{l-1}) = T_\rho(x; v^{**}_{l-1}),$$

где $v^{**}_{l-1} = r_2 \frac{v_{l-1}}{|v_{l-1}|}$ — точка пересечения (в $\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$) граничной сферы шара $B_{N_{l-1}-n}(0,r_2)$ и луча, выходящего из центра этого шара в направлении точки v_{l-1}.

Не составляет труда проверить, что $\widehat{V}_\rho$ и $\widehat{T}_\rho$ наследуют следующие свойства отображений V_ρ и T_ρ.

Во-первых, эти отображения непрерывны, и для первого из них остается справедливым неравенство (17):

$$|\widehat{V}_\rho(x;v_{l-1};v^l) - \widetilde{\mathfrak{L}}'_{v^l}(x_0;0;0)v^l| \le \varepsilon |v^l|, \quad (x; v_{l-1}; v^l) \in B_n(x_0,\rho) \times \mathbb{R}^{N_{l-1}-n}.$$

И, во-вторых, для отображения $\widehat{T}_\rho$ сохраняют свою силу соотношения (18) и (19), причем с прежними постоянными C_1 и C_2:

$$|\widehat{T}_\rho(x;v''_{l-1}) - \widehat{T}_\rho(x;v'_{l-1})| \le C_1 |v''_{l-1} - v'_{l-1}|$$

и

$$|\widehat{T}_\rho(x;0)|\,(= |T_\rho(x;0)|) \le C_2,$$

если $x \in B_n(x_0,\rho)$, $v'_{l-1}, v''_{l-1} \in \mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$.

Тем самым ограничение $\tilde f|_{B_n(x_0,\rho)}$ отображения $\tilde f$ на шар $B_n(x_0,\rho)$ представляет собой C^l-гладкое решение системы

$$\widehat{V}_\rho(x;v_{l-1};v^l) + \widehat{T}_\rho(x;v_{l-1}) = 0$$

вида (8), удовлетворяющей условиям (i)–(iii), в которых ε, q_0 и t — это числа из условия теоремы. Доказательство завершено.

Пусть теперь система (11) является линейной, т. е. имеет вид (11′). Тогда теорему 1 можно усилить следующим образом.

Теорема 1$'$. *Предположим, что коэффициенты $a_p^{j\varkappa}$ и правые части h_j системы $(11')$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, m$, $|p| \leq l$, являются непрерывными функциями, а сама эта система — эллиптической (т. е. $\operatorname{rank}\{\sum_{|p|=l} \zeta^p a_p(x)\} = m$ для каждой пары точек $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $x \in U$). Тогда для любого ограниченного открытого множества $U_0 \subset \mathbb{R}^n$, содержащегося в U вместе со своим замыканием $\operatorname{cl} U_0$, существует число $t = t_{U_0} > 1$, для которого выполнено следующее: если $n < q_0 < \infty$ и $0 \leq \varepsilon < \frac{\chi(t)}{q_0 \chi^1(t)}$, то в $U_0 \times \prod_{\nu=0}^{l} (\mathbb{R}^m)^{n_\nu}$ система $(11')$ удовлетворяет условиям $(\circ)$–$(\circ\circ\circ)$ с указанными значениями параметров ε, q_0 и t.*

Теорема $1'$ вытекает непосредственно из условий эллиптичности системы $(11')$ и непрерывности ее коэффициентов $a_p^{j\varkappa}$ и правых частей h_j.

2°. Имеет место

Теорема 2. *Пусть параметры ε (≥ 0), q_0 $(> n)$ и t (> 1) связаны соотношением*

$$\varepsilon < \frac{\chi(t)}{q_0 \chi^1(t)},$$

где функции χ и χ^1 (как и в теореме 1) определяются соотношениями (5) и (6). Предположим, что система (8) удовлетворяет условиям (i)–(iii) с этими значениями параметров ε, q_0 и t. Тогда каждое $W^l_{2,\mathrm{loc}}$-решение рассматриваемой системы является ее $W^l_{q_0,\mathrm{loc}}$-решением.

Замечание. Теорема 2 представляет (существенное) усиление теоремы 1 из [1, 2] и уточненного ее варианта — теоремы 4 статьи [3]. Напомним, что в последних утверждениях вместо $W^l_{2,\mathrm{loc}}$-решений системы (8) рассматриваются решения пространства $W^l_{q,\mathrm{loc}}$, где $q > n$. Отметим также, что в случае, когда (8) — система первого порядка, теорема 2 была получена в статье [3], причем в несколько более общей форме (см. теорему 3 в [3]).

Доказательство теоремы 2 осуществляется по схеме, использованной нами ранее в [2, 3] для доказательства упомянутых в замечании теорем из статей [1–3] с внесением в рассуждения необходимых изменений и дополнений. Поэтому мы не будем приводить его в полном объеме, а сосредоточим внимание на вносимых изменениях.

Итак, полагая $l \geq 2$ и рассматривая $W^l_{2,\mathrm{loc}}$-решение системы (8), удовлетворяющей условиям теоремы, и следуя ходу доказательства теоремы 1 статьи [2], мы приходим к отображению $\tilde f : B \to \mathbb{R}^m$ (B — единичный шар в $\mathbb{R}^n$), определяемому соотношением (19) в [2], т. е. к отображению

$$\tilde f(y) = \beta^{-1}(f(\omega^{-1}(\tau y + z_0))), \quad y \in B \quad (z_0 = \omega(x_0)), \tag{20}$$

которое в нашем случае является W^l_2-решением системы (12) в работе [2]. Заметим, что в действительности отображение $\tilde f$ естественным образом (т. е. посредством соотношений (20)) продолжается до $W^l_{2,\mathrm{loc}}$-решения системы (12) из [2] в области $\widetilde U = \tau^{-1}(\omega(U) - z_0)$. При этом мы будем полагать далее τ столь малым, что

$$\operatorname{cl} B(0, 2) \subset \widetilde U. \tag{21}$$

Следующим этапом доказательства теоремы 1 в статье [2] является построение системы интегродифференциальных уравнений (20) (см. [2]). В рассматриваемом в настоящей статье случае на этом этапе вносится главное изменение в доказательство. Суть его состоит в том, что вместо разложения Тейлора с интегральной формой остатка для отображения $\tilde{f}$, использованного при построении системы (20) в [2], мы будем исходить из разложения, которое доставляет

Лемма 1. *Пусть $h : V \to \mathbb{R}$, где V — открытое, ограниченное и достаточно регулярно устроенное множество в $\mathbb{R}^n$ (например, V — это компактное n-мерное C^1-гладкое многообразие с краем, ориентированное внешней нормалью ν к краю ∂V), является функцией пространства Соболева $W_1^1(V,\mathbb{R})$. Тогда для $x \in V$ имеет место представление*

$$h(x) = \frac{1}{S_n}\int\limits_{\partial V} \frac{\langle y-x, \nu(y)\rangle}{|y-x|^n}\big(h|_{\partial V}\big)(y)\,ds_y - \frac{1}{S_n}\int\limits_{V} \frac{\langle y-x, \operatorname{grad} h(y)\rangle}{|y-x|^n}\,dy. \tag{22}$$

Здесь S_n — площадь $(n-1)$-мерной единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, второй из интегралов справа понимается в смысле главного значения по Коши (и почти во всех точках $x \in V$ — как обычный интеграл Лебега), первый интеграл вычисляется относительно поверхностной меры на ∂V, причем $h|_{\partial V}$ в нем означает след на ∂V в смысле теории пространств Соболева функции h, наконец, символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 1 типична для представлений значений функции внутри ее области определения через значения частных производных первого порядка и граничные значения этой функции. Она непосредственно вытекает, например, из следствия 3.2.2 теоремы 3.2.2 из [11, гл. 3], если в качестве эллиптического линейного дифференциального оператора D рассмотреть в нем оператор М. Рисса

$$D_R = D_R(H_1,\dots,H_n) = \left(\sum_{s=1}^n \partial_s H_s, \dots, \partial_i H_j - \partial_j H_i, \dots\right).$$

Действительно, предположим, что в формуле (3.2.6) в [11, гл. 3] D и f — это оператор D_R и отображение $H = (H_1,\dots,H_n) = (h,0,\dots,0)$. Тогда несложными, хотя и громоздкими выкладками можно убедиться в том, что для первой компоненты h отображения H формула (3.2.6) из [11, гл. 3] превращается в формулу (22) леммы 1[11)].

Далее мы будем рассматривать тот случай, когда множество V в лемме 1 — это шар $B_r = B(0,r)$. В этом случае формула (22) обретает вид

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{rS_n}\int\limits_{|y|=r} \frac{r^2-\langle x,y\rangle}{|y-x|^n}\big(h|_{\partial B_r}\big)(y)\,ds_y - \frac{1}{S_n}\int\limits_{|y|\le r}\sum_{s=1}^n \frac{y_s-x_s}{|y-x|^n}\partial_s h(y)\,dy \\ &= \big(\Gamma_{\partial B_r}\big(h|_{\partial B_r}\big)\big)(x) + \big(\Omega_{B_r}(\operatorname{grad} h)\big)(x) = \big(\Gamma_r\big(h|_{\partial B_r}\big)\big)(x) + (\Omega_r(\operatorname{grad} h))(x) \\ &= \Gamma_r(x) + \Omega_r(x), \end{aligned} \tag{22$'$}$$

$x \in B_r$.

Отметим следующие, необходимые для дальнейшего свойства интегральных операторов Γ_r и Ω_r.

[11)] Доказательство леммы 1 можно осуществить и прямыми выкладками, основывающимися на формуле Гаусса — Остроградского в случае гладких функций h и на последующем использовании предельного перехода от гладких функций в случае $h \in W_1^1$.

Лемма 2. *Если $h = (h_1, \dots, h_M) : \operatorname{fr} B_r \to \mathbb{R}^M$ — интегрируемое относительно поверхностной лебеговой меры на границе $\operatorname{fr} B_r$ шара B_r отображение и*

$$(\Gamma_r h)(x) = \frac{1}{rS_n} \int\limits_{|y|=r} \frac{r^2 - \langle x, y\rangle}{|y-x|^n} h(y)\, dy, \quad x \in B_r,$$

то для $x \in \operatorname{cl} B_{r_0}$, где $r_0 < r$, имеют место неравенства

$$|(\Gamma_r h)(x)| \le (\Gamma_r(|h|))(x) \le \frac{r + r_0}{(r - r_0)^n} \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y|=r} |h(y)|\, ds$$

($|h| : \operatorname{fr} B_r \to \mathbb{R}$ — это функция, определяемая соотношениями $|h|(y) = |h(y)| = \left\{\sum\limits_{i=1}^{M} h_i^2(y)\right\}^{1/2}$, $y \in \operatorname{fr} B_r$).

Лемма 3. *Предположим, что $H = (H_1, H_2, \dots, H_n) : B_r \to \mathbb{R}^n$ — измеримое и ограниченное в существенном отображение $(\operatorname*{ess\,sup}\limits_{z \in B_r} |H(z)| < +\infty)$. Тогда для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются соотношения*

$$|(\Omega_r H)(x)| = \left| \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y| \le r} \frac{\langle y - x, H(y)\rangle}{|y-x|^n}\, dy \right| = \left| \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y| \le r} \sum_{s=1}^{n} \frac{y_s - x_s}{|y-x|^n} H_s(y)\, dy \right|$$
$$\le \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y| \le r} \frac{|H(y)|}{|y-x|^{n-1}}\, dy \le \{\operatorname*{ess\,sup}_{z \in B_r} |H(z)|\} \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y| \le r} \frac{dy}{|y-x|^{n-1}}$$
$$\le (r + |x|) \operatorname*{ess\,sup}_{z \in B_r} |H(z)|. \quad (23)$$

Доказательства лемм 2 и 3 не составляют труда, поэтому мы их опускаем.

Замечание. Неравенство (23) распространяется и на случай отображений $H = (H_1, H_2, \dots, H_n) : B_r \to (\mathbb{R}^M)^n$, где $H_s(y) = \sum\limits_{i=1}^{M} H_{si}(y) e_\mu$ $(e_1, e_2, \dots, e_M$ — канонический базис в $\mathbb{R}^M$):

$$\left| \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y| \le r} \sum_{s=1}^{n} \frac{y_s - x_s}{|y-x|^n} H_s(y)\, dy \right| \le \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y| \le r} \sum_{s=1}^{n} \frac{|y_s - x_s|}{|y-x|^n} |H_s(y)|\, dy$$
$$\le \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y| \le r} \frac{|H(y)|}{|y-x|^{n-1}} \le (r + |x|) \operatorname*{ess\,sup}_{z \in B_r} |H(z)|, \quad (23')$$

$|H(z)| = \left\{\sum\limits_{s=1}^{n} |H_s(z)|^2\right\}^{1/2} = \left\{\sum\limits_{s=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{M} (H_{si}(z))^2\right\}^{1/2}$.

Возвращаясь к доказательству теоремы 2, отметим прежде всего, что непосредственно из определения понятия обобщенной производной по Соболеву [12] вытекает следующее. Если $0 \le l_0 < l$, то каждая из частных производных $\partial^p \tilde{f}_\varkappa$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, порядка $|p| = \sum\limits_{s=1}^{n} p_s = l_0$, каждой из функций $\tilde{f}_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \dots, m$, принадлежит пространству $W_{2,\mathrm{loc}}^{l-l_0}(\widetilde{U}, \mathbb{R})$ и тем самым пространству $W_{2,\mathrm{loc}}^1(\widetilde{U}, \mathbb{R})$. Кроме того, при $s = 1, 2, \dots, n$ обобщенная производная $\partial_s(\partial^p \tilde{f}_\varkappa)$ функции $\partial^p \tilde{f}_\varkappa$ вычисляется по формуле

$$\partial_s(\partial^p \tilde{f}_\varkappa) = \partial^{\bar{p}(s,p)} \tilde{f}_\varkappa,$$

где $\bar{p}(s,p)$ — мультииндекс порядка l_0+1, определяемый по числу s и мультииндексу p следующим способом[12]:

$$\bar{p}(s,p)=(p_1,\dots,p_{s-1},p_s+1,p_{s+1},\dots,p_n).$$

Учитывая последние замечания, исходя из множества чисел $r_\nu=2-\frac{\nu-1}{l-1}$, $\nu=1,2,\dots,l-1$, представляя соотношения (25) из [2] в виде

$$F_{p_{l-1},\varkappa}=\partial^{p_{l-1}}\tilde{f}_\varkappa,\quad F_{\tilde{f}}=\{F_{p_{l-1},\varkappa},\ |p_{l-1}|=l-1,\ \varkappa=1,2,\dots,m\},\tag{24}$$

и используя формулу (22′), включение (21), лемму 1, теорему Фубини и математическую индукцию, последовательно получаем[13] при $x\in B(=B(0,1))$

$$\begin{aligned}\partial^{p_{l-2}}\tilde{f}_\varkappa(x)&=(\Gamma_{r_1}(\partial^{p_{l-2}}\tilde{f}_\varkappa))(x)+(\Omega_{r_1}(\mathrm{grad}(\partial^{p_{l-2}}\widetilde{f}_\varkappa)))(x)\\&=(\Gamma_{r_1}(\partial^{p_{l-2}}\tilde{f}_\varkappa))(x)-\frac{1}{S_n}\int\limits_{|y|\le r_1}\sum_{s=1}^n\frac{y_s-x_s}{|y-x|^n}(\partial^{\bar{p}(s,p_{l-2})}\tilde{f}_\varkappa)(y)\,dy\\&=(\Gamma_{r_1}(\partial^{p_{l-2}}\tilde{f}_\varkappa))(x)-\frac{1}{S_n}\int\limits_{|y|\le r_1}\sum_{s=1}^n\frac{y_s-x_s}{|y-x|^n}F_{\bar{p}(s,p_{l-2}),\varkappa}(y)\,dy;\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}\partial^{p_{l-3}}\tilde{f}_\varkappa(x)&=\big(\Gamma_{r_2}\big(\partial^{p_{l-3}}\tilde{f}_\varkappa\big)\big)(x)+\big(\Omega_{r_2}\big(\mathrm{grad}\big(\partial^{p_{l-3}}\widetilde{f}_\varkappa\big)\big)\big)(x)\\&=\big(\Gamma_{r_2}\big(\partial^{p_{l-3}}\tilde{f}_\varkappa\big)\big)(x)-\frac{1}{S_n}\int\limits_{|y|\le r_2}\sum_{s=1}^n\frac{y_s-x_s}{|y-x|^n}\partial_s\big(\partial^{p_{l-3}}\tilde{f}_\varkappa\big)(y)\,dy\end{aligned}$$

$$=\big(\Gamma_{r_2}\big(\partial^{p_{l-3}}\tilde{f}_\varkappa\big)\big)(x)-\frac{1}{S_n}\int\limits_{|y|\le r_2}\sum_{s=1}^n\frac{y_s-x_s}{|y-x|^n}\partial^{\bar{p}(s,p_{l-3})}\tilde{f}_\varkappa(y)\,dy=\big(\Gamma_{r_2}\big(\partial^{p_{l-3}}\tilde{f}_\varkappa\big)\big)(x)$$

$$-\frac{1}{S_n}\int\limits_{|y|\le r_2}\sum_{s=1}^n\frac{y_s-x_s}{|y-x|^n}\big\{\big(\Gamma_{r_1}\big(\partial^{\bar{p}(s,p_{l-3})}\tilde{f}_\varkappa\big)\big)(y)+\big(\Omega_{r_1}\big(\mathrm{grad}\big(\partial^{\bar{p}(s,p_{l-3})}\tilde{f}_\varkappa\big)\big)\big)(y)\big\}\,dy$$

$$\begin{aligned}&=\big(\Gamma_{r_2}\big(\partial^{p_{l-3}}\tilde{f}_\varkappa\big)\big)(x)-\frac{1}{S_n}\int\limits_{|y|\le r_2}\sum_{s=1}^n\frac{y_s-x_s}{|y-x|^n}\big(\Gamma_{r_1}\big(\partial^{\bar{p}(s,p_{l-3})}\tilde{f}_\varkappa\big)\big)(y)\,dy\\&\quad+\frac{1}{S_n^2}\int\limits_{|y|\le r_2}\sum_{s=1}^n\frac{y_s-x_s}{|y-x|^n}\int\limits_{|z|\le r_1}\sum_{j=1}^n\frac{z_j-y_j}{|z-y|^n}\partial_j\big(\partial^{\bar{p}(s,p_{l-3})}\tilde{f}_\varkappa\big)(z)\,dz\\&=\big(\Gamma_{r_2}\big(\partial^{p_{l-3}}\tilde{f}_\varkappa\big)\big)(x)-\frac{1}{S_n}\int\limits_{|y|\le r_2}\sum_{s=1}^n\frac{y_s-x_s}{|y-x|^n}\big(\Gamma_{r_1}\big(\partial^{\bar{p}(s,p_{l-3})}\tilde{f}_\varkappa\big)\big)(y)\,dy\\&\quad+\frac{1}{S_n^2}\int\limits_{\substack{|y|\le r_2,\\|z|\le r_1}}\sum_{s,j=1}^n\frac{y_s-x_s}{|y-x|^n}\frac{z_j-y_j}{|z-y|^n}\partial^{\bar{p}(s,j,p_{l-3})}\tilde{f}_\varkappa(z)\,dydz\end{aligned}$$

---

[12] В частности, $\bar{p}(s,p)=(\underbrace{0,\dots,0}_{s-1},1,0,\dots,0)$ в случае $p=p_0$ $(=(0,0,\dots,0))$. Ниже мы используем также следующее обобщение операции $\bar{p}$: $\bar{p}(s_1,s_2,\dots,s_\nu,p)=\bar{p}(s_1,\bar{p}(s_2,\dots$ $\dots,\bar{p}(s_\nu,p))\dots)$, если $s_\lambda=1,2,\dots,n$, $\lambda=1,2,\dots,\nu$.

[13] Всюду далее p_ν — мультииндекс порядка ν и при построении интегралов по сферам используются следы (в смысле теории пространств Соболева) функций $\tilde{f}_\varkappa$ и их производных $\partial^p\tilde{f}_\varkappa$, $|p|=1,2,\dots,l-2$.

$$= \big(\Gamma_{r_2}\big(\partial^{p_{l-3}}\tilde f_\varkappa\big)\big)(x) - \frac{1}{S_n}\int\limits_{|y|\le r_2}\sum_{s=1}^{n}\frac{y_s-x_s}{|y-x|^n}\big(\Gamma_{r_1}\big(\partial^{\bar p(s,p_{l-3})}\tilde f_\varkappa\big)\big)(y)\,dy$$

$$+\frac{1}{S_n^2}\int\limits_{\substack{|y|\le r_2,\\ |z|\le r_1}}\sum_{s,j=1}^{n}\frac{y_s-x_s}{|y-x|^n}\frac{z_j-y_j}{|z-y|^n}F_{\bar p(s,j,p_{l-3}),\varkappa}(z)\,dydz; \qquad (26)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

$$\tilde f_\varkappa(x) = \big(\Gamma_{r_{l-1}}(\widetilde{f}_\varkappa)\big)(x^1) + \sum_{\zeta=1}^{l-2}\left(\frac{-1}{S_n}\right)^{\zeta}$$

$$\times\int\limits_{\substack{|x^2|\le r_{l-1},\\ |x^3|\le r_{l-2},\\ \dots\dots\dots,\\ |x^{\zeta+1}|\le r_{l-\zeta}}}\sum_{s_1,\dots,s_\zeta=1}^{n}\prod_{\nu=1}^{\zeta}\frac{x_{s_\nu}^{\nu+1}-x_{s_\nu}^{\nu}}{|x^{\nu+1}-x^\nu|^n}(\Gamma_{r_{l-1-\zeta}}(\partial^{\bar p(s_1,\dots,s_\zeta,p_0)}\widetilde{f}_\varkappa))(x^{\zeta+1})\,dx^2\dots dx^{\zeta+1}$$

$$+\left(\frac{-1}{S_n}\right)^{l-1}\int\limits_{\substack{|x^2|\le r_{l-1},\\ |x^3|\le r_{l-2},\\ \dots\dots\dots,\\ |x^l|\le r_1}}\sum_{s_1,\dots,s_{l-1}=1}^{n}\prod_{\nu=1}^{l-1}\frac{x_{s_\nu}^{\nu+1}-x_{s_\nu}^{\nu}}{|x^{\nu+1}-x^\nu|^n}F_{\bar p(s_1,\dots,s_{l-1},p_0),\varkappa}(x^l)\,dx^2\dots dx^l, \qquad (27)$$

$x^1 = x$.

Отправляясь от полученных соотношений, примем в качестве оператора K_{l-2} из работы [2] (см. соотношения (22)–(24) в [2]) оператор с компонентами

$$\left(\frac{-1}{S_n}\right)^{\gamma}\int\limits_{\substack{|x^2|\le r_\gamma,\\ |x^3|\le r_{\gamma-1},\\ \dots\dots\dots,\\ |x^{\gamma+1}|\le r_1}}\sum_{s_1,\dots,s_\gamma=1}^{n}\prod_{\nu=1}^{\gamma}\frac{x_{s_\nu}^{\nu+1}-x_{s_\nu}^{\nu}}{|x^{\nu+1}-x^\nu|^n}F_{\bar p(s_1,\dots,s_\gamma,p_{l-\gamma-1}),\varkappa}(x^{\gamma+1})\,dx^2\dots dx^{\gamma+1}, \qquad (28)$$

$|p_{l-\gamma-1}| = l-\gamma-1$, $\varkappa = 1,2,\dots,m$, $\gamma = 1,2,\dots,l-1$, а в качестве оператора $\Lambda_{l-2,\tilde f}$ из той же статьи — оператор с компонентами

$$(\Gamma_{r_1}(\partial^{p_{l-2}}\tilde f_\varkappa))(x^1) \qquad (29)$$

и

$$\big(\Gamma_{r_\gamma}\big(\partial^{p_{l-\gamma-1}}\tilde f_\varkappa\big)\big)(x^1) + \sum_{\zeta=1}^{\gamma-1}\left(\frac{-1}{S_n}\right)^{\zeta}\int\limits_{\substack{|x^2|\le r_\gamma,\\ |x^3|\le r_{\gamma-1},\\ \dots\dots\dots,\\ |x^{\zeta+1}|\le r_{\gamma-\zeta+1}}}\sum_{s_1,\dots,s_\zeta=1}^{n}\prod_{\nu=1}^{\zeta}\frac{x_{s_\nu}^{\nu+1}-x_{s_\nu}^{\nu}}{|x^{\nu+1}-x^\nu|^n}$$

$$\times(\Gamma_{r_{\gamma-\zeta}}(\partial^{\bar p(s_1,\dots,s_\zeta,p_{l-\gamma-1})}\tilde f_\varkappa))(x^{\zeta+1})\,dx^2\dots dx^{\zeta+1}, \qquad (30)$$

$$|p_{l-\gamma-1}| = l-\gamma-1, \quad \varkappa = 1,2,\dots,m, \quad \gamma = 2,3,\dots,l-1.$$

Для этих операторов при $|y| < 1$ выполняются следующие неравенства:

$$|\Lambda_{l-2,\tilde f}(y)| \le \frac{3(l-1)^n}{S_n} \sum_{\iota=1}^{l-1} \left(\frac{(16n)^{l-\iota} - 1}{16n - 1} \right)^{1/2} \int\limits_{|x|=r_\iota} \Big\{ \sum_{|p|=l-\iota-1} |\partial^p \tilde f(x)|^2 \Big\}^{1/2} ds \tag{31}$$

и

$$\{|(K_{l-2}H)(y)|^2 + |H(y)|^2\}^{1/2} \le \left\{ 9n \frac{(16n)^{l-1} - 1}{16n - 1} + 1 \right\}^{1/2} \operatorname*{ess\,sup}_{|x| \le r_1} |H(x)|, \tag{32}$$

где отображение

$$H : \mathrm{cl}\, B(0,2) \to \mathbb{R}^{mn_{l-1}}, \quad H = \{H_{p_{l-1},\varkappa},\ |p_{l-1}| = l-1,\ \varkappa = 1,2,\dots,m\}$$

($n_{l-1} = \frac{(n+l-2)!}{(l-1)!(n-1)!}$), измеримо и в существенном ограничено.

Действительно, применяя лемму 3 (точнее, неравенства (23′) из замечания к этой лемме), теорему Тонелли и математическую индукцию и отправляясь от определения (28) оператора K_{l-2}, мы приходим при $x^1 \in B(0,1)$ к соотношениям

$$|K_{l-2}H(x^1)| \le \Bigg\{ \sum_{\gamma=1}^{l-1} \Bigg| \left(\frac{-1}{S_n} \right)^{\gamma} \int\limits_{\substack{|x^2| \le r_\gamma, \\ |x^3| \le r_{\gamma-1}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ |x^{\gamma+1}| \le r_1}} \sum_{s_1,\dots,s_\gamma=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{\gamma} \frac{x^{\nu+1}_{s_\nu} - x^{\nu}_{s_\nu}}{|x^{\nu+1} - x^\nu|^n}$$

$$\times \sum_{|p|=l-\gamma-1} \sum_{\varkappa=1}^{m} H_{\bar p(s_1,\dots,s_\gamma,p),\varkappa}(x^{\gamma+1}) e_{p,\varkappa}\, dx^2 \dots dx^{\gamma+1} \Bigg|^2 \Bigg\}^{1/2}$$

$$\le \Bigg\{ \sum_{\gamma=1}^{l-1} \Bigg[\frac{1}{S_n^\gamma} \int\limits_{\substack{|x^2| \le r_\gamma, \\ |x^3| \le r_{\gamma-1}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ |x^{\gamma+1}| \le r_1}} \Bigg| \sum_{s_1,\dots,s_\gamma=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{\gamma} \frac{x^{\nu+1}_{s_\nu} - x^{\nu}_{s_\nu}}{|x^{\nu+1} - x^\nu|^n}$$

$$\times \sum_{|p|=l-\gamma-1} \sum_{\varkappa=1}^{m} H_{\bar p(s_1,\dots,s_\gamma,p),\varkappa}(x^{\gamma+1}) e_{p,\varkappa} \Bigg| dx^2 \dots dx^{\gamma+1} \Bigg]^2 \Bigg\}^{1/2}$$

$$\le \Bigg\{ \sum_{\gamma=1}^{l-1} \Bigg[\frac{1}{S_n^\gamma} \int\limits_{\substack{|x^2| \le r_\gamma, \\ |x^3| \le r_{\gamma-1}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ |x^{\gamma+1}| \le r_1}} \prod_{\nu=1}^{\gamma} \frac{1}{|x^{\nu+1} - x^\nu|^{n-1}}$$

$$\times \left(\sum_{s_1,\dots,s_\gamma=1}^{n} \sum_{|p|=l-\gamma-1} \sum_{\varkappa=1}^{m} H^2_{\bar p(s_1,\dots,s_\gamma,p),\varkappa}(x^{\gamma+1}) \right)^{1/2} dx^2 \dots dx^{\gamma+1} \Bigg]^2 \Bigg\}^{1/2}$$

$$\le \Bigg\{ \sum_{\gamma=1}^{l-1} \Bigg[\frac{1}{S_n^\gamma} \int\limits_{\substack{|x^2| \le r_\gamma, \\ |x^3| \le r_{\gamma-1}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ |x^{\gamma+1}| \le r_1}} \prod_{\nu=1}^{\gamma} \frac{1}{|x^{\nu+1} - x^\nu|^{n-1}} \left(n^\gamma \sum_{|p|=l-1} \sum_{\varkappa=1}^{m} H^2_{p,\varkappa}(x^{\gamma+1}) \right)^{1/2}$$

$$\times\, dx^2\dots dx^{\gamma+1}\Biggr]^2\Biggr\}^{1/2} \le \Biggl\{\sum_{\gamma=1}^{l-1}\Biggl[\frac{n^{\gamma/2}}{S_n^\gamma}\int\limits_{|x^2|\le r_\gamma}\frac{dx^2}{|x^2-x^1|^{n-1}}\int\limits_{|x^3|\le r_{\gamma-1}}\frac{dx^3}{|x^3-x^2|^{n-1}}\dots$$

$$\dots\int\limits_{|x^{\gamma+1}|\le r_1}\frac{|H(x^{\gamma+1})|\,dx^{\gamma+1}}{|x^{\gamma+1}-x^\gamma|^{n-1}}\Biggr]^2\Biggr\}^{1/2} \le \Biggl\{\sum_{\gamma=1}^{l-1}\Biggl[n^{\gamma/2}(r_\gamma+1)\prod_{\nu=1}^{\gamma-1}(r_\nu+r_{\nu+1})$$

$$\times \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B(0,r_1)}|H(x)|\Biggr]^2\Biggr\}^{1/2} \le \Biggl\{\sum_{\gamma=1}^{l-1}9n(16n)^{\gamma-1}\Biggr\}^{1/2}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B(0,r_1)}|H(x)|$$

$$= 3n^{1/2}\biggl\{\frac{(16n)^{l-1}-1}{16n-1}\biggr\}^{1/2}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B(0,r_1)}|H(x)| \qquad (33)$$

($e_{p,\varkappa}$, $|p|=\nu$, $\varkappa=1,2,\dots,m$, — канонический базис пространства $(\mathbb{R}^m)^{n_\nu}$, где, как и в (8), $n_\nu=\frac{(n+\nu-1)!}{\nu!(n-1)!}$). Тем самым в силу (33) неравенство (32) доказано.

Приступая к доказательству неравенства (31), заметим прежде всего, что непосредственно из определения оператора $\Lambda_{l-2,\tilde f}$ (см. (29), (30)) вытекает следующее неравенство:

$$|\Lambda_{l-2,\tilde f}(x^1)| \le \sum_{\iota=1}^{l-2}\Biggl\{\Biggl|\Biggl(\sum_{|p|=l-1-\iota}\sum_{\varkappa=1}^m(\Gamma_{r_\iota}(\partial^p\tilde f_\varkappa))e_{p,\varkappa}\Biggr)(x^1)\Biggr|^2$$

$$+\sum_{\eta=1}^{l-1-\iota}\Biggl|\biggl(\frac{-1}{S_n}\biggr)^\eta\int\limits_{\substack{|x^2|\le r_{\eta+\iota},\\ |x^3|\le r_{\eta+\iota-1},\\ \dots\dots\dots,\\ |x^{\eta+1}|\le r_{\iota+1}}}\sum_{s_1,\dots,s_\eta=1}^n\prod_{\nu=1}^\eta\frac{x_{s_\nu}^{\nu+1}-x_{s_\nu}^\nu}{|x^{\nu+1}-x^\nu|^n}$$

$$\times\Biggl(\sum_{|p|=l-1-\iota-\eta}\sum_{\varkappa=1}^m(\Gamma_{r_\iota}(\partial^{\bar p(s_1,\dots,s_\eta,p)}\tilde f_\varkappa))e_{p,\varkappa}\Biggr)(x^{\eta+1})\,dx^2\dots dx^{\eta+1}\Biggr|^2\Biggr\}^{1/2}$$

$$+\Biggl|\Biggl(\sum_{\varkappa=1}^m(\Gamma_{r_{l-1}}\tilde f_\varkappa)e_\varkappa\Biggr)(x^1)\Biggr| = \sum_{\iota=1}^{l-2}\Biggl\{\delta_{1,\iota}^2+\sum_{\eta=1}^{l-1-\iota}\delta_{2,\iota,\eta}^2\Biggr\}^{1/2}+\delta_3, \qquad (34)$$

$|x^1|<1$. Далее, рассуждая аналогично тому, как это было сделано при выводе неравенств (33), и используя при этом лемму 2, последовательно получаем[14)]

$$\delta_{2,\iota,\eta} = \frac{1}{S_n^\eta}\Biggl|\int\limits_{\substack{|x^2|\le r_{\eta+\iota},\\ |x^3|\le r_{\eta+\iota-1},\\ \dots\dots\dots,\\ |x^{\eta+1}|\le r_{\iota+1}}}\Biggl(\Gamma_{r_\iota}\Biggl(\sum_{s_1,\dots,s_\eta=1}^n\prod_{\nu=1}^\eta\frac{x_{s_\nu}^{\nu+1}-x_{s_\nu}^\nu}{|x^{\nu+1}-x^\nu|^n}$$

$$\times\sum_{|p|=l-1-\iota-\eta}\sum_{\varkappa=1}^m(\partial^{\bar p(s_1,\dots,s_\eta,p)}\tilde f_\varkappa)e_{p,\varkappa}\Biggr)\Biggr)(x^{\eta+1})\,dx^2\dots dx^{\eta+1}\Biggr|$$

14) Как и в (34), в следующих ниже соотношениях (35)–(37) мы полагаем $|x^1|<1$.

$$\le \frac{1}{S_n^\eta} \int\limits_{\substack{|x^2|\le r_{\eta+\iota},\\ |x^3|\le r_{\eta+\iota-1},\\ \dots\dots\dots\dots,\\ |x^{\eta+1}|\le r_{\iota+1}}} \left|\left(\Gamma_{r_\iota}\left(\sum_{s_1,\dots,s_\eta=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{\eta} \frac{x_{s_\nu}^{\nu+1}-x_{s_\nu}^{\nu}}{|x^{\nu+1}-x^\nu|^n}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times \sum_{|p|=l-1-\iota-\eta} \sum_{\varkappa=1}^{m} (\partial^{\bar p(s_1,\dots,s_\eta,p)} \tilde f_\varkappa) e_{p,\varkappa}\right)\right)(x^{\eta+1})\right| dx^2 \dots dx^{\eta+1}$$

$$\le \frac{1}{S_n^\eta} \int\limits_{\substack{|x^2|\le r_{\eta+\iota},\\ |x^3|\le r_{\eta+\iota-1},\\ \dots\dots\dots\dots,\\ |x^{\eta+1}|\le r_{\iota+1}}} \left(\Gamma_{r_\iota}\left(\left|\sum_{s_1,\dots,s_\eta=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{\eta} \frac{x_{s_\nu}^{\nu+1}-x_{s_\nu}^{\nu}}{|x^{\nu+1}-x^\nu|^n}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times \sum_{|p|=l-1-\iota-\eta} \sum_{\varkappa=1}^{m} (\partial^{\bar p(s_1,\dots,s_\eta,p)} \tilde f_\varkappa) e_{p,\varkappa}\right|\right)\right)(x^{\eta+1})\, dx^2 \dots dx^{\eta+1}$$

$$\le \frac{1}{S_n^\eta} \int\limits_{\substack{|x^2|\le r_{\eta+\iota},\\ |x^3|\le r_{\eta+\iota-1},\\ \dots\dots\dots\dots\\ |x^{\eta+1}|\le r_{\iota+1}}} \left(\Gamma_{r_\iota}\left(\prod_{\nu=1}^{\eta} \frac{1}{|x^{\nu+1}-x^\nu|^{n-1}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \left[\sum_{s_1,\dots,s_\eta=1}^{n} \sum_{|p|=l-1-\iota-\eta} \sum_{\varkappa=1}^{m} (\partial^{\bar p(s_1,\dots,s_\eta,p)} \tilde f_\varkappa)^2\right]^{1/2}\right)\right)(x^{\eta+1})\, dx^2 \dots dx^{\eta+1}$$

$$\le \frac{1}{S_n^\eta} \int\limits_{\substack{|x^2|\le r_{\eta+\iota},\\ |x^3|\le r_{\eta+\iota-1},\\ \dots\dots\dots\dots\\ |x^{\eta+1}|\le r_{\iota+1}}} \prod_{\nu=1}^{\eta} \frac{1}{|x^{\nu+1}-x^\nu|^{n-1}} \left(\Gamma_{r_\iota}\left(\left\{n^\eta \sum_{|p|=l-1-\iota} \sum_{\varkappa=1}^{m} (\partial^p \tilde f_\varkappa)^2\right\}^{1/2}\right)\right)(x^{\eta+1})$$

$$\times dx^2 \dots dx^{\eta+1} \le n^{\eta/2}(r_{\eta+1}+1) \prod_{\nu=1}^{\eta-1} (r_{\iota+\nu}+r_{\iota+\nu+1})$$

$$\times \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B(0,r_{\iota+1})} \left[\left(\Gamma_{r_\iota}\left(\left\{\sum_{|p|=l-1-\iota} |\partial^p \tilde f|^2\right\}^{1/2}\right)\right)(x)\right] \le 3n^{\eta/2} 4^{\eta-1} \frac{r_\iota + r_{\iota+1}}{(r_\iota - r_{\iota+1})^n}$$

$$\times \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y|=r_\iota} \left\{\sum_{|p|=l-1-\iota} |\partial^p \tilde f(y)|^2\right\}^{1/2} ds = 3(l-1)^n (4n^{1/2})^\eta$$

$$\times \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y|=r_\iota} \left\{\sum_{|p|=l-1-\iota} |\partial^p \tilde f(y)|^2\right\}^{1/2} ds. \tag{35}$$

Оценим теперь величину $\delta_{1,\iota}$:

$$\delta_{1,\iota} = \left| \left(\Gamma_{r_\iota} \left(\sum_{|p|=l-1-\iota} \sum_{\varkappa=1}^{m} (\partial^p \widetilde{f}_\varkappa) e_{p,\varkappa} \right) \right)(x^1) \right|$$

$$\leq \left(\Gamma_{r_\iota} \left(\left| \sum_{|p|=l-1-\iota} \sum_{\varkappa=1}^{m} (\partial^p \tilde{f}_\varkappa) e_{p,\varkappa} \right| \right) \right)(x^1)$$

$$\leq \frac{r_\iota + 1}{(r_\iota - 1)^n} \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y|=r_\iota} \left\{ \sum_{|p|=l-1-\iota} \sum_{\varkappa=1}^{m} (\partial^p \tilde{f}_\varkappa(y))^2 \right\}^{1/2} ds$$

$$\leq 3(l-1)^n \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y|=r_\iota} \left\{ \sum_{|p|=l-1-\iota} |\partial^p \tilde{f}(y)|^2 \right\}^{1/2} ds. \quad (36)$$

Наконец, в случае величины δ_3 имеем

$$\delta_3 = \left| \left(\Gamma_{r_{l-1}} \tilde{f}\right)(x^1) \right| \leq \left(\Gamma_{r_{l-1}}(|\tilde{f}|)\right)(x^1) \leq \frac{r_{l-1}+1}{(r_{l-1}-1)^n} \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y|=r_{l-1}} |\tilde{f}(y)| \, ds$$

$$\leq \frac{3(l-1)^n}{S_n} \int\limits_{|y|=r_{l-1}} |\tilde{f}(y)| \, ds. \quad (37)$$

Принимая во внимание оценки (35)–(37), мы легко убеждаемся в том, что неравенство (31) непосредственно вытекает из соотношений (34).

С учетом того, что в силу (25)–(27) отображение $F_{\tilde{f}}$ из соотношений (24) является W_2^1-решением (в смысле определения 2 из [2]) системы (20) интегро-дифференциальных уравнений работы [2], завершение доказательства нашей теоремы осуществляется почти дословным повторением соответствующей части доказательства теоремы 1 упомянутой статьи[15)]. Подробности изложения мы опускаем.

В заключение пункта отметим, что внося незначительные изменения в доказательство теоремы 2[16)], можно получить следующее ее усиление.

Теорема 2′. *Пусть $r > 1$. Если выполнены условия теоремы 2, в которых сейчас функция χ^1 заменена функцией*

$$\chi_r^1(t) = \sup_{D \in \mathscr{O}_t} \left\{ \sup_{r \leq q < \infty} \left[\frac{1}{q} \Upsilon_q \left(\frac{D^0}{\Lambda(D^0)} \right) \right] \right\}, \quad (6')$$

то каждое $W^l_{r,\mathrm{loc}}$-решение рассматриваемой в ее формулировке системы вида (8) *является $W^l_{q_0,\mathrm{loc}}$-решением этой системы.*

3°**.** Непосредственно из теоремы 2 и теорем вложения для пространств Соболева вытекает такой результат (ср. с теоремой 2 в [6]).

[15)] При этом неравенства (31) и (32) для операторов $\Lambda_{l-2,\tilde{f}}$ и K_{l-2} играют ту же роль, что и оценки $|\Lambda_{l-2,\tilde{f}}(y)| \leq C < +\infty$ и $\{|(K_{l-2}(R_\mu h))(y)|^2 + |(R_\mu h)(y)|^2\}^{1/2} \leq c_l |(R_\mu h)(y)|$, $C = \mathrm{const}$, $y \in B(0,1)$, для соответствующих операторов в доказательстве теоремы 1 в [2] (см. неравенства (46), (49) и (50) в [2]). Напомним также, что обращаясь к доказательству теоремы 1 в работе [2], необходимо принять во внимание замечания, высказанные по поводу него на с. 99 и 100 статьи [6].

[16)] Эти изменения соответствуют соображениям, использованным в доказательствах теорем 2.1.4 и 3.2.6 монографии [11, гл. 2, 3].

Теорема 3. *В условиях теоремы* 2 *каждое* $W^l_{2,\mathrm{loc}}$*-решение* $f : U \to \mathbb{R}^m$ (U — *открытое множество в* $\mathbb{R}^n$) *системы* (8) *принадлежит пространству* $C^{(l-1)+\alpha}_{\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$, *где* $\alpha = 1 - \frac{n}{q_0}$.

Теорема 2′ данной работы и теорема 3 статьи [3] позволяют усилить теорему 3 следующим образом.

Теорема 3′. *Если выполнены условия теоремы* 2′, *то каждое* $W^l_{r,\mathrm{loc}}$*-решение системы* (8) *принадлежит пространству* $C^{(l-1)+\alpha}_{\mathrm{loc}}$, $\alpha = 1 - \frac{n}{q_0}$.

Теорема 3″. *Если* $l = 1$, $r > 1$ *и выполнены условия теоремы* 2′, *причем отображения* β *и* ω *в* (iii) — *это квазиизометрии, то каждое* $W^l_{r,\mathrm{loc}}$*-решение* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *системы* (8) *удовлетворяет локально в* U *условию Гёльдера с показателем* $\alpha = 1 - \frac{n}{q_0}$.

Теорему 3 естественным образом дополняет теорема 4, согласно которой в случае $l = 1$ условие $q_0 > n$ в теореме 3 является точным.[17)]

Теорема 4 (см. замечание 3.4.1 в [11, с. 179]). *Если* $l = 1$ *и* $q_0 = n$, *то для каждой пары чисел* t *и* ε *такой, что* $t > 1$ *и* $\varepsilon \geq 0$, *существует система вида* (8), *для которой выполнены условия* (i)–(iii) *с указанными значениями параметров* ε, q_0 *и* t *и у которой есть* (*неустранимо*) *разрывное* $W^1_{n,\mathrm{loc}}$*-решение.*

Напомним доказательство теоремы 4.

Пусть $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : B \to \mathbb{R}^m$ — отображение единичного шара $B = B(0,1)$ пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что при $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$

$$f_1(x) = \ln\ln\frac{1}{|x|} \tag{38}$$

и

$$f_s(x) = 0, \quad s = 2, 3, \ldots, m. \tag{39}$$

Учитывая, что отображение (38), (39) принадлежит пространству Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(B, \mathbb{R}^m)$, рассмотрим число $t > 1$ и произвольный эллиптический линейный дифференциальный оператор D 1-го порядка из множества $\mathscr{O}_t = \mathscr{O}^{n,m,k,1}_t$, определенного выше соотношениями (4), и затем построим следующую систему уравнений с частными производными:

$$\mathfrak{L}g = Dg - G = 0, \tag{40}$$

где $G = Df \in L_{n,\mathrm{loc}}(B, \mathbb{R}^k)$.

Для системы (40) имеем $V = D$, поэтому отклонение оператора V от линейных эллиптических операторов из $\mathscr{O}_t$, подсчитанное способом, предложенным в (iii), равно 0 (т. е. $\varepsilon = 0$).

Нам осталось заметить, что в силу сказанного выше отображение f является неустранимо разрывным $W^1_{n,\mathrm{loc}}$-решением системы (40). Теорема 4 доказана.

Замечание. Идея строить контрпримеры, относящиеся к проблеме регулярности решений систем дифференциальных уравнений с частными производными, на основе функции $x \mapsto \ln\ln\frac{1}{|x|}$ использовалась ранее (и, по-видимому, впервые) в [13, 14].

В завершение п. 3° отметим, что из теорем 1′, 2–4 вытекают следующие утверждения.

[17)] Теорема 4 — это теорема с тем же номером в [15]. Обращаем внимание читателя на то, что в формулировке теоремы 4 в [15] допущена неточность в записи: параметр l в ней должен быть равен 1.

Теорема 5. *Предположим, что функции $\mathfrak{L}_j$ в (11) принадлежат классу $C^1(Y)$, т. е. являются непрерывными и обладают непрерывными частными производными 1-го порядка относительно всех своих аргументов в Y. Тогда частные производные l-го порядка любого эллиптического C^l-решения $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, системы (11) локально в U удовлетворяют условию Гёльдера с любым показателем α, принадлежащим интервалу $]0,1[$: если $0 < \alpha < 1$ и E — компактное подмножество U, то существует число $C_{\alpha,E} \geq 0$ такое, что*

$$|\partial^{p_l} f_\varkappa(x') - \partial^{p_l} f_\varkappa(x'')| \leq C_{\alpha,E}|x' - x''|^\alpha,$$

$x', x'' \in E$, $|p_l| = l$, $\varkappa = 1, 2, \dots, m$.

Теорема 6. *Если коэффициенты $a_p^{j\varkappa}$ и правые части h_j ($j = 1, 2, \dots, k$; $\varkappa = 1, 2, \dots, m$; $|p| \leq l$) системы ($11'$) линейных дифференциальных уравнений с частными производными — непрерывные функции, а сама система эллиптична, то тогда каждое ее $W^l_{2,\mathrm{loc}}$-решение при любом $q \in [1,\infty[$ является $W^l_{q,\mathrm{loc}}$-решением и, следовательно, принадлежит каждому из пространств $C^{(l-1)+\alpha}_{\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$, $\alpha \in\ ]0,1[$.*

Теорема 7. *Предположим, что старшие коэффициенты $a_p^{j\varkappa}$, $|p| = l$ ($j = 1, 2, \dots, k$; $\varkappa = 1, 2, \dots, m$), системы ($11'$) являются непрерывными функциями. Пусть далее существует число $q_0 \geq 1$ такое, что все остальные ее коэффициенты $a_p^{j\varkappa}$, $|p| < l$, и правые части h_j (j и $\varkappa$ те же, что и выше) принадлежат пространству $L_{q_0,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R})$. Наконец допустим, что эта система эллиптическая (т. е.*

$$\operatorname{rank}\Big\{\sum_{|p|=l} \zeta^p a_p(x)\Big\} = m$$

для каждой пары точек $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $x \in U$). Тогда в случае $q_0 > n$ каждое $W^l_{2,\mathrm{loc}}$-решение этой системы является ее $W^l_{q_0,\mathrm{loc}}$-решением и тем самым принадлежит пространству $C^{(l-1)+\alpha}_{\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$, где $\alpha = 1 - \frac{n}{q_0}$, а в случае $1 \leq q_0 \leq n$ существует система ($11'$) первого порядка и обсуждаемого сейчас вида, которая обладает неустранимо разрывным $W^1_{q_0,\mathrm{loc}}$-решением.

Теорема 8. *Пусть числа t и q_0 удовлетворяют неравенствам $1 < t < \infty$ и $n < q_0 < \infty$. Тогда существует положительное число $\varepsilon_{t,q_0} = \varepsilon^{n,m,k,l}_{t,q_0}$ такое, что если система ($11'$) с измеримыми коэффициентами и правыми частями равномерно эллиптическая, точнее, удовлетворяет условию ($\circ$) из введения с указанным выше значением параметра t, старшие ее коэффициенты $a_p^{j\varkappa}$, $|p| = l$, удовлетворяют условию медленного изменения ($\circ\circ$) с $\varepsilon < \varepsilon_{t,q_0}$, а остальные коэффициенты $a_p^{j\varkappa}$, $|p| < l$, и правые части h_j локально суммируемы в U в степени q_0, то каждое $W^l_{2,\mathrm{loc}}$-решение этой системы является ее $W^l_{q_0,\mathrm{loc}}$-решением и, следовательно, принадлежит пространству $C^{(l-1)+(1-n/q_0)}_{\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$. В то же время если $q_0 \in [1, n]$, то для любой пары чисел $t > 1$ и $\varepsilon \geq 0$ существует система ($11'$) первого порядка, для которой условия ($\circ$)–($\circ\circ\circ$) выполнены с этими значениями параметров t, q_0 и ε и которая обладает неустранимо разрывным $W^1_{q_0,\mathrm{loc}}$-решением.*

За доказательством теоремы 5 мы отсылаем читателя к работе [6]. Что касается теорем 6 и 7, то первая из них является непосредственным следствием второй, а вторая, в свою очередь, вытекает из теоремы 8 (при доказательстве теорем 6 и 7 необходимо также принять во внимание теорему $1'$ и ее естественный аналог в случае систем из формулировки теоремы 7). Наконец, так как система ($11'$), удовлетворяющая условиям ($\circ$)–($\circ\circ\circ$), является частным случаем систем (8), для которых выполнены условия (i)–(iii), то первая часть утверждений теоремы 8 следует из теорем 2 и 3, а доказательство второй — это (фактически) приведенное выше доказательство теоремы 4.

Замечание 1. Сама нелинейная система (8), удовлетворяющая условиям (i)–(iii), представляет собой прямой аналог линейной системы ($11'$) с измеримыми коэффициентами и правыми частями, для которой выполнены условия ($\circ$)–($\circ\circ\circ$). Такая тесная связь между этими системами позволяет в формулировке теоремы 8 положить, например,

$$\varepsilon_{t,q_0} = \frac{\chi(t)}{\sqrt{kmn_l}\, q_0\, \chi^1(t)}. \tag{41}$$

Замечание 2. В силу теорем $2'$ и $3'$ можно усилить теорему 8, заменяя в первом из ее утверждений $W^l_{2,\mathrm{loc}}$-решения $W^l_{r,\mathrm{loc}}$-решениями, где r — любое число, большее 1 При этом в случае любого $r > 1$ (как и в случае $r = 2$) роль числа ε_{t,q_0} может играть число, определяемое формулой (41), в которой в качестве функции χ^1 принимается функция χ^1_r из ($6'$). Данное замечание распространяется и на теоремы 6 и 7, причем в случае последних возможна формальная замена $W^l_{2,\mathrm{loc}}$-решений на $W^l_{r,\mathrm{loc}}$-решения, $r > 1$, без внесения каких-либо других изменений.

В заключение статьи отметим, что некоторые из ее основных результатов анонсированы в [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копылов А. П.* О W^l_q-регулярности решений систем уравнений с частными производными, локально близких к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 1999. Т. 368, № 3. С. 303–306.
2. *Копылов А. П.* О регулярности решений систем уравнений с частными производными, локально близких к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами. I // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 861–879.
3. *Копылов А. П.* О регулярности решений систем уравнений с частными производными, локально близких к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами. II // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 98–117.
4. *Кордес Г. О.* О первой краевой задаче для квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка более чем с двумя переменными // Математика. 1959. Т. 3, № 2. С. 75–108.
5. *Копылов А. П.* Устойчивость классов отображений и непрерывность по Гёльдеру старших производных решений эллиптических систем нелинейных уравнений с частными производными произвольного порядка // Докл. РАН. 2001. Т. 379, № 4. С. 442–446.
6. *Копылов А. П.* Устойчивость классов отображений и гёльдеровость старших производных эллиптических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 90–107.
7. *Nirenberg L.* On a generalization of quasi-conformal mappings and its application to elliptic partial differential equations // Contributions to the theory of partial differential equations. Ann. Math. Stud. 1954. N 33. P. 95–100.
8. *Morrey C. B., Jr.* Second order elliptic systems of differential equations // Contributions to the theory of partial differential equations. Ann. Math. Stud. 1954. N 33. P. 101–159.
9. *Шварц Л.* Комплексные аналитические многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
10. *Копылов А. П.* Устойчивость в C^l-норме классов решений систем линейных уравнений с частными производными эллиптического типа // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 352–371.

11. *Копылов А. П.* Устойчивость в C-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.

12. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СОАН СССР, 1962.

13. *Frehse J.* A discontinuous solution of a mildly nonlinear elliptic system // Math. Z. 1973. Bd 134. S. 229–230.

14. *Frehse J.* A note on the Hölder continuity of solutions of variational problems // Abhandlung. Math. Sem. Hamburg. 1975. Bd 43. S. 59–63.

15. *Копылов А. П.* Об одном достаточном условии всюду $C_{\mathrm{loc}}^{(l-1)+\alpha}$-регулярности решений систем нелинейных дифференциальных уравнений l-го порядка // Докл. РАН. 2002. Т. 385, № 2. С. 151–155.

Статья поступила 12 апреля 2002 г.

Копылов Анатолий Павлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kopylov@math.nsc.ru