Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 515.125

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛУТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУРЕШЕТОК

Ю. Л. Ершов

Аннотация: Охарактеризованы пространства $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}$ простых замкнутых идеалов произвольной полутопологической полурешетки $\mathbb{S}$. Дана абстрактная характеризация естественного гомоморфизма такой полурешетки $\mathbb{S}$ в полурешетку $\langle T_*, \cup\rangle$ топологии T_* пространства $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}$.

Ключевые слова: полурешетка, полутопологическая полурешетка, простой идеал, простой фильтр, дистрибутивная полурешетка.

Полурешеткой (верхней) называется алгебра $\langle S, \vee\rangle$ с одной бинарной операцией такой, что отношение $\sigma_0 \le \sigma_1$, определенное условием $\sigma_1 = \sigma_0 \vee \sigma_1$, является (частичным) порядком на S, а $\sigma_0 \vee \sigma_1$ — точной верхней гранью элементов σ_0 и σ_1 относительно порядка $\le$. Это равносильно тому, что операция $\vee$ идемпотентна, коммутативна и ассоциативна (см. [1]).

Пусть $\langle S, \vee\rangle$ — полурешетка, T — топология на S. Тогда $\langle S, \vee, T\rangle$ — *полутопологическая полурешетка* (см. [2]), если для любого $\sigma \in S$ отображение $\Sigma_\sigma : \sigma' \mapsto \sigma' \vee \sigma$, $\sigma' \in S$, является непрерывным отображением S в себя. Заметим, что отображение Σ_σ будет и эндоморфизмом полурешетки $\langle S, \vee\rangle$.

Идеалом полурешетки $\langle S, \vee\rangle$ называется всякое непустое подмножество $I \subseteq S$, удовлетворяющее условиям

(i) $\sigma_0 \in I$, $\sigma_1 \le \sigma_0 \Longrightarrow \sigma_1 \in I$;

(ii) $\sigma_0, \sigma_1 \in I \Longrightarrow \sigma_0 \vee \sigma_1 \in I$.

Фильтром полурешетки $\langle S, \vee\rangle$ называется всякое непустое подмножество $\Phi \subseteq S$, удовлетворяющее условиям

(i) $\sigma_0 \in \Phi$, $\sigma_0 \le \sigma_1 \Longrightarrow \sigma_1 \in \Phi$;

(ii) $\sigma_0, \sigma_1 \in \Phi \Longrightarrow \exists \sigma \in \Phi\ (\sigma \le \sigma_0,\ \sigma \le \sigma_1)$.

Идеал I полурешетки $\langle S, \vee\rangle$ называется *простым,* если $S \setminus I$ является фильтром $\langle S, \vee\rangle$. Фильтр Φ полурешетки $\langle S, \vee\rangle$ называется *простым,* если $S \setminus \Phi$ — идеал.

Замечание. $I \subseteq S$ является простым идеалом тогда и только тогда, когда $S \setminus I$ — простой фильтр.

Спектром полутопологической полурешетки $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$ называется топологическое пространство $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}$, точками которого являются в точности замкнутые (в топологии T) простые идеалы полурешетки $\langle S, \vee\rangle$, а топология T_* на $\mathrm{Spec}\,\mathbb{S} \rightleftharpoons \{I \mid I \text{ — замкнутый простой идеал в } \langle S, \vee\rangle\}$ задается предбазисом множеств вида $V_\sigma \rightleftharpoons \{I \mid I \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{S}, \sigma \notin I\}$, $\sigma \in S$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ-DFG ННИОа (код проекта 01–01–04003).

Замечание. Следует иметь в виду, что полутопологическая полурешетка $\mathbb{S}$ может не иметь ни одного (замкнутого) простого идеала, т. е. пространство $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}$ может быть пустым.

Замечание. В работах [3, 4] пространство $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}$ определяется с помощью характеров и поэтому оно отличается от введенного выше. Хотя в [4, гл. III, разд. 1] изучается и множество $\mathrm{Prime}\,\widehat{S}$, которое можно естественно отождествить с $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}$.

Лемма 1. (i) $V_{\sigma_0} \cup V_{\sigma_1} = V_{\sigma_0 \vee \sigma_1}$;
(ii) $V_{\sigma_0} \cap V_{\sigma_1} = \bigcup\{V_\sigma \mid \sigma \leq \sigma_0, \sigma_1\}$.

Доказательство. (i) Включение $V_{\sigma_0} \cup V_{\sigma_1} \subseteq V_{\sigma_0 \vee \sigma_1}$ очевидно. Пусть $I \in V_{\sigma_0 \vee \sigma_1}$, т. е. $I \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{S}$ и $\sigma_0 \vee \sigma_1 \notin I$. Если бы $I \notin V_{\sigma_0}$ и $I \notin V_{\sigma_1}$, то $\sigma_0 \in I$, $\sigma_1 \in I$, $\sigma_0 \vee \sigma_1 \in I$ и $I \notin V_{\sigma_0 \vee \sigma_1}$; противоречие. Итак, $V_{\sigma_0 \vee \sigma_1} = V_{\sigma_0} \cup V_{\sigma_1}$.

(ii) Включение $\supseteq$ очевидно. Пусть $I \in V_{\sigma_0} \cap V_{\sigma_1}$. Тогда $\sigma_0 \notin I$, $\sigma_1 \notin I$; $\sigma_0, \sigma_1 \in S \setminus I$; но $S \setminus I$ — фильтр, следовательно, существует $\sigma \in S \setminus I$ такой, что $\sigma \leq \sigma_0, \sigma_1$. Тогда $I \in V_\sigma$ и включение $\subseteq$ установлено. $\square$

Лемма доказана.

Утверждение (ii) леммы показывает, что семейство V_σ, $\sigma \in S$, является на самом деле базисом топологии T_*.

1. Основная цель этой статьи — описать топологические пространства, которые могут быть представлены в виде $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}$ для подходящей полутопологической полурешетки $\mathbb{S}$.

Непустое подмножество Y топологического пространства $\langle X, T\rangle$ называется *неприводимым*, если для любых замкнутых подмножеств $F_0, F_1 \subseteq X$ из того, что $Y \subseteq F_0 \cup F_1$, следует, что $Y \subseteq F_0$ или $Y \subseteq F_1$.

Неприводимость Y равносильна тому, что для любых открытых U_0 и U_1 из того, что $U_0 \cap Y \neq \varnothing$ и $U_1 \cap Y \neq \varnothing$, следует, что $U_0 \cap U_1 \cap Y \neq \varnothing$.

Теорема 1. *Пусть F — собственное ($\neq \varnothing$, $\mathrm{Spec}\,\mathbb{S}$) замкнутое неприводимое подмножество $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}$. Тогда существует $I_* \in F$ такой, что*

$$F = \{I \mid I \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{S}, I \supseteq I_*\}.$$

Доказательство. Пусть $U \rightleftharpoons \mathrm{Spec}\,\mathbb{S} \setminus F$; так как F замкнуто, U открыто. Пусть $I_* \rightleftharpoons \{\sigma \mid V_\sigma \subseteq U\}$; из определения легко видеть, что $U = \bigcup\{V_\sigma \mid \sigma \in I_*\}$ и что I_* является идеалом полурешетки $\langle S, \vee\rangle$. Проверим, что $S \setminus I_*$ — фильтр. Пусть $\sigma_0, \sigma_1 \in S \setminus I_*$. Тогда $V_{\sigma_0} \nsubseteq U$, $V_{\sigma_1} \nsubseteq U$, что равносильно тому, что $V_{\sigma_0} \cap F \neq \varnothing$, $V_{\sigma_1} \cap F \neq \varnothing$. Неприводимость F влечет, что $V_{\sigma_0} \cap V_{\sigma_1} \cap F \neq \varnothing$. По лемме 1(ii) существует $\sigma \leq \sigma_0, \sigma_1$ такое, что $V_\sigma \cap F \neq \varnothing$; тогда $\sigma \in S \setminus I_*$. Отсюда и следует, что $S \setminus I_*$ — фильтр, а I_* — простой идеал.

Установим, что I_* замкнут (тогда $I_* \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{S}$). Пусть $\sigma \in S \setminus I_*$. Тогда $V_\sigma \nsubseteq U$, $V_\sigma \cap F \neq \varnothing$. Пусть $I \in V_\sigma \cap F$. Тогда $\sigma \notin I$, $\sigma \in S \setminus I$; $S \setminus I$ открыто (так как I — замкнутый простой идеал). Покажем, что $S \setminus I \subseteq S \setminus I_*$. Пусть $\sigma' \in S \setminus I$. Тогда $I \in V_{\sigma'}$ и $I \in V_{\sigma'} \cap F$, следовательно, $V_{\sigma'} \cap F \neq \varnothing$ и $\sigma' \in S \setminus I_*$. Итак, $S \setminus I_*$ открыто, $I_* \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{S}$.

Покажем, что $I_* \in F$. Если $I_* \notin F$, то $I_* \in U$ и, следовательно, существует $\sigma \in I_*$ такой, что $I_* \in V_\sigma$. Последнее означает, что $\sigma \notin I_*$; противоречие. Итак, $I_* \in F$.

Пусть $I \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{S}$; покажем, что $I \in F \iff I \supseteq I_*$. Пусть $I \supseteq I_*$, и предположим, что $I \notin F$. Тогда, как выше (для I_*), найдется $\sigma \in I_*$ такой, что

$I \in V_\sigma$ и $\sigma \notin I \supseteq I_*$; противоречие. Итак, $I \supseteq I_* \Longrightarrow I \in F$. Пусть $I \not\supseteq I_*$ и $\sigma \in I_* \setminus I$, тогда $I \in V_\sigma \subseteq U = \operatorname{Spec} \mathbb{S} \setminus F$ и $I \notin F$. $\square$

Теорема доказана.

Замечание. Если S содержит элемент $\sigma_\perp$, входящий в любой замкнутый простой идеал (в частности, если S содержит наименьший элемент $\perp$), то условие $F \neq \operatorname{Spec} \mathbb{S}$ можно опустить.

Действительно, пространство $\mathbf{Spec}\, \mathbb{S}$ неприводимо тогда и только тогда, когда пересечение любых двух непустых открытых множеств является непустым. Нетрудно видеть, что в этом случае множество $I_* \rightleftharpoons \{\sigma \mid V_\sigma = \varnothing\} \ni \sigma_\perp$ является простым замкнутым идеалом, $V_{\sigma_\perp} = \varnothing$ и

$$\operatorname{Spec} \mathbb{S} = \{I \mid I \in \operatorname{Spec} \mathbb{S},\ \sigma_\perp \in I_* \subseteq I\}.$$

Приведем ряд определений, чтобы переформулировать заключение теоремы в удобном для дальнейшего виде.

Для топологического пространства $\langle X, T\rangle$ *предпорядок специализации* $\leq_X$ — это бинарное отношение, определенное так: для $\xi_0, \xi_1 \in X$

$$\xi_0 \leq_X \xi_1 \Longleftrightarrow \forall U \in T(\xi_0 \in U \Longrightarrow \xi_1 \in U).$$

Нетрудно проверить, что отношение $\leq_X$ действительно является предпорядком на X (т. е. оно рефлексивно и транзитивно). Предпорядок $\leq_X$ будет (частичным) порядком (т. е. антисимметричным отношением) тогда и только тогда, когда $\langle X, T\rangle$ T_0-отделимо. Как правило, в дальнейшем будем это предполагать.

Замыкание точки $\operatorname{cl} \xi$ топологического пространства $\langle X, T\rangle$ может быть описано так: $\operatorname{cl} \xi = \downarrow \xi \rightleftharpoons \{\xi' \mid \xi' \in X, \xi' \leq_X \xi\}$.

Лемма 2. *Предпорядок специализации в топологическом пространстве* $\mathbf{Spec}\, \mathbb{S}$ *совпадает с отношением, обратным к отношению включения, т. е. для* $I_0, I_1 \in \operatorname{Spec} \mathbb{S}$

$$I_0 \leq_{\mathbf{Spec}\, \mathbb{S}} I_1 \Longleftrightarrow I_0 \supseteq I_1.$$

Доказательство. Пусть $I_0 \not\supseteq I_1$, и пусть $\sigma \in I_1 \setminus I_0$, тогда $I_0 \in V_\sigma$, $I_1 \notin V_\sigma$; следовательно, $I_0 \not\leq_{\mathbf{Spec}\, \mathbb{S}} I_1$. Отсюда получаем импликацию $\Longrightarrow$.

В определении предпорядка специализации в качестве открытых множеств достаточно брать множества из фиксированного (пред)базиса. Пусть $I_0 \supseteq I_1$ и $I_0 \in V_\sigma$ для некоторого $\sigma \in S$. Тогда $\sigma \notin I_0 \supseteq I_1$ и $\sigma \notin I_1$, $I_1 \in V_\sigma$, следовательно, $I_0 \leq_{\mathbf{Spec}\, \mathbb{S}} I_1$. $\square$

Лемма доказана.

Топологическое пространство $\langle X, T\rangle$ называется (*почти*) *уравновешенным,* если для любого непустого замкнутого неприводимого множества F ($F \neq X$) существует точка $\xi \in X$ такая, что $F = \downarrow \xi (= \operatorname{cl} \xi)$.

Теперь можно переформулировать теорему 1 следующим образом.

Теорема 1′. *Для любой полутопологической полурешетки* $\mathbb{S}$ *пространство* $\mathbf{Spec}\, \mathbb{S}$ *является почти уравновешенным.*

Замечание. Если в S существует элемент $\sigma_\perp$, содержащийся в любом замкнутом простом идеале, то $\mathbf{Spec}\, \mathbb{S}$ уравновешено.

Прежде чем доказывать обращение теоремы 1′, рассмотрим важные примеры полутопологических полурешеток.

Пусть $\langle X, T\rangle$ — топологическое пространство; топология T является дистрибутивной решеткой относительно операций объединения $\cup$ и пересечения $\cap$; в частности, $\langle T, \cup\rangle$ — (верхняя) полурешетка. Какие естественные топологии T_0 на T превращают ее в полутопологическую полурешетку? Приведем четыре из таких топологий.

1. Дискретная топология T_ω.

2. Топология Дэя — Келли T_{dk} [5] (или топология Скотта [2]). Открытыми множествами этой топологии являются все семейства $W \subseteq T$ открытых множеств X, удовлетворяющих следующим двум условиям:

(i) если $U_0 \in W$, $U_1 \in T$ и $U_0 \subseteq U_1$, то $U_1 \in W$;

(ii) если $U_\lambda, \lambda \in \Lambda,$ — направленное по включению семейство множеств из T и $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in W$, то существует $\lambda \in \Lambda$ такое, что $U_\lambda \in W$.

3. φ-топология T_φ определяется базисом, состоящим из фильтров Φ полурешетки $\langle T, \cup\rangle$, открытых в топологии Дэя — Келли.

4. π-топология T_π определяется предбазисом, состоящим из простых фильтров Φ полурешетки $\langle T, \cup\rangle$, открытых в топологии Дэя — Келли (или, что то же, в топологии T_φ).

Заметим, что $T_\omega \supseteq T_{dk} \supseteq T_\varphi \supseteq T_\pi$.

Лемма 3. (i) *Для любого $U \in T$ отображение $\Sigma_U : U' \mapsto U \cup U'$, $U' \in T$, непрерывно во всех топологиях T_ω, T_{dk}, T_φ и T_π.*

(ii) $\mathrm{Spec}\langle T, \cup, T_{dk}\rangle = \mathrm{Spec}\langle T, \cup, T_\varphi\rangle = \mathrm{Spec}\langle T, \cup, T_\pi\rangle$.

Доказательство нужно лишь для утверждения (i). Пусть $W \subseteq T$ и $W \in T_{dk}$, $U \in T$. Так как Σ_U — монотонное отображение, то $\Sigma_U^{-1}(W)$ удовлетворяет условию $U_0 \in \Sigma_U^{-1}(W)$, $U_0 \subseteq U_1 \in T$ влечет, что $U_1 \in \Sigma_U^{-1}(W)$. Пусть U_λ, $\lambda \in \Lambda$, — направленное семейство множеств из T, и пусть $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \Sigma_U^{-1}(W)$, т. е.

$$U \cup \Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U \cup U_\lambda) \in W.$$

Так как $W \in T_{dk}$, существует $\lambda \in \Lambda$ такой, что $U \cup U_\lambda \in W$, тогда $U_\lambda \in \Sigma_U^{-1}(W)$.

Если еще W является фильтром, то и $\Sigma_U^{-1}(W)$ будет фильтром, поскольку Σ_U — эндоморфизм решетки $\langle T, \cup, \cap\rangle$ и, следовательно, $\Sigma_U^{-1}(W) \in T_\varphi$.

Если W — простой фильтр, то $\Sigma_U^{-1}(W)$ либо равно T (если $U \in W$), либо является простым фильтром. В любом случае $\Sigma_U^{-1}(W) \in T_\pi$.

Лемма доказана. $\square$

Если пространство $\langle X, T\rangle$ неприводимо, то $T^\varnothing = T \setminus \{\varnothing\}$ — подрешетка T.

Теорема 2. (i) *Если $\langle X, T\rangle$ — уравновешенное пространство, то $\langle X, T\rangle$ гомеоморфно пространству $\mathbf{Spec}\langle T, \cup, T_{dk}\rangle$ $(= \mathbf{Spec}\langle T, \cup, T_\varphi\rangle = \mathbf{Spec}\langle T, \cup, T_\pi\rangle)$.*

(ii) *Если $\langle X, T\rangle$ — почти уравновешенное, но не уравновешенное пространство (в этом случае X неприводимо), то X гомеоморфно пространству $\mathbf{Spec}\langle T^\varnothing, \cup, T_{dk}\rangle = \mathbf{Spec}\langle T^\varnothing, \cup, T_\varphi\rangle = \mathbf{Spec}\langle T^\varnothing, \cup, T_\pi\rangle$.*

Установим сначала один общий результат.

Лемма 4. *Пусть $\langle X, T\rangle$ — произвольное T_0-пространство, $\xi \in X$, $W_\xi = \{U \mid U \in T, \xi \in U\}$. Тогда W_ξ является открытым простым фильтром в*

$\langle T, \cup, T_{dk}\rangle$, *а отображение* $\lambda : \xi \mapsto T \setminus W_\xi$, $\xi \in X$, *— гомеоморфным вложением* X *в* $\mathbf{Spec}\langle T, \cup, T_{dk}\rangle$.

Доказательство. То, что W_ξ является открытым простым фильтром, проверяется непосредственно. Проверим, что λ — непрерывное отображение. Базисными открытыми множествами в $\mathbf{Spec}\langle T, \cup, T_{dk}\rangle$ будут семейства

$$V_U = \{I \mid I \in \mathrm{Spec}\langle T, \cup, T_{dk}\rangle, U \notin I\}, \quad U \in T.$$

Проверим, что $\lambda^{-1}(V_U) = U$. Пусть $\xi \in U$, тогда $U \in W_\xi$, $U \notin T \setminus W_\xi = \lambda(\xi)$, $\lambda(\xi) \in V_U$; следовательно, $U \subseteq \lambda^{-1}(V_U)$. Пусть $\lambda(\xi) \in V_U$. Тогда $U \notin \lambda(\xi) = T \setminus V_\xi$, $U \in W_\xi$, $\xi \in U$, следовательно, $\lambda^{-1}(V_U) \subseteq U$ и $\lambda^{-1}(V_U) = U$. Итак, λ непрерывно. Для завершения доказательства достаточно установить соотношение $\lambda(U) = V_U \cap \lambda(X)$. Пусть $\xi \in X$. Тогда имеют место эквивалентности

$$\xi \in U \iff U \in W_\xi \iff U \notin \lambda(\xi) \iff \lambda(\xi) \in V_U.$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы. Для доказательства утверждения (i) теоремы достаточно показать, что $\lambda(X) = \mathrm{Spec}\langle T, \cup, T_{dk}\rangle$, т. е. что любой замкнутый идеал I имеет вид $T \setminus W_\xi$ для подходящей точки $\xi \in X$. Пусть $I \in \mathrm{Spec}\langle T, \cup, T_{dk}\rangle$, и пусть $U_I = \bigcup\{U \mid U \in I\}$. Так как I — направленное семейство, а семейство $T \setminus I$ является открытым в топологии T_{dk}, то $U_I \notin T \setminus I$, т. е. $U_I \in I$.

Итак, U_I — наибольшее (по включению) открытое множество в I. Проверим, что замкнутое множество $F_I \rightleftharpoons X \setminus U_I$ неприводимо. Пусть $U_0, U_1 \in T$ и $U_i \cap F_I \neq \varnothing$, $i = 0, 1$; тогда $U_0, U_1 \in T \setminus I$ и $U_0 \cap U_1 \in T \setminus I$, так как $T \setminus I$ является фильтром. Но $U_0 \cap U_1 \in T \setminus I$ означает, что $U_0 \cap U_1 \not\subseteq U_I$ и, следовательно, $U_0 \cap U_1 \cap F_I \neq \varnothing$. Итак, F_I — замкнутое неприводимое множество. Поскольку пространство X уравновешено, существует точка $\xi \in X$ такая, что $F_I = \downarrow \xi$. Из этого следует, что для любого $U \in T$ имеет место эквивалентность $U \cap F_I \neq \varnothing \iff \xi \in U$. Вместе с эквивалентностью $U \notin I \iff U \cap F_I \neq \varnothing$ это дает соотношение $I = T \setminus W_\xi = \lambda(\xi)$. Утверждение (i) теоремы установлено.

Обратимся к доказательству утверждения (ii) теоремы. Как отмечено в формулировке этого утверждения, пространство X неприводимо, а $\mathrm{Spec}\langle T, \cup, T_{dk}\rangle$ и $\mathrm{Spec}\langle T^\varnothing, \cup, T_{dk}\rangle$ «отличаются» на один элемент — простой замкнутый идеал

$$\{\{\varnothing\}\} \in \mathrm{Spec}\langle T, \cup, T_{dk}\rangle \setminus \mathrm{Spec}\langle T^\varnothing, \cup, T_{dk}\rangle,$$

и пространство $\mathbf{Spec}\langle T^\varnothing, \cup, T_{dk}\rangle$ «можно считать» подпространством пространства $\mathbf{Spec}\langle T, \cup, T_{dk}\rangle$ и $\lambda(X) \subseteq \mathrm{Spec}\langle T^\varnothing, \cup, T_{dk}\rangle$.

Замечание. Более точно нужно говорить о гомеоморфном вложении пространства $\mathbf{Spec}\langle T^\varnothing, \cup, T_{dk}\rangle$ в пространство $\mathbf{Spec}\langle T, \cup, T_{dk}\rangle$, определенном так:

$$I \mapsto I \cup \{\varnothing\}, \quad I \in \mathrm{Spec}\langle T^\varnothing, \cup, T_{dk}\rangle.$$

Остается заметить, что $\lambda(X) = \mathrm{Spec}\langle T^\varnothing, \cup, T_{dk}\rangle$. Пусть $I \in \mathrm{Spec}\langle T^\varnothing, \cup, T_{dk}\rangle$. Как в доказательстве утверждения (i), определяются открытое множество $U_I \rightleftharpoons \bigcup\{U \mid U \in I\}$ и замкнутое множество $F_I \rightleftharpoons X \setminus U_I$. Как и выше, проверяется, что F неприводимо. Далее, замечая, что $I \neq \varnothing$ (и $\varnothing \notin I$), видим, что $U_I \neq \varnothing$; кроме того, $F_I \neq \varnothing$. Почти уравновешенность пространства X влечет существование точки $\xi \in X$ такой, что $F_I = \downarrow \xi$. Проверка того, что $\lambda(\xi) = I$, проводится, как в доказательстве утверждения (i). Теорема доказана. □

2. Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$ — полутопологическая полурешетка, T_* — топология на $\operatorname{Spec}\mathbb{S}$, определенная в разд. 1. Лемма 1(i) показывает, что отображение

$$\mu : \sigma \mapsto V_\sigma \rightleftharpoons \{I \mid I \in \operatorname{Spec}\mathbb{S},\ \sigma \notin I\}, \quad \sigma \in S,$$

является гомоморфизмом полурешетки $\langle S, \vee\rangle$ в полурешетку $\langle T_*, \cup\rangle$.

Попробуем ответить на следующие два вопроса.

1. Когда гомоморфизм μ является вложением?

2. Можно ли описать гомоморфизм μ «абстрактно», т. е. не используя пространство $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}$?

Замечание. Вопрос 2 был поставлен профессором К. Хофманном во время доклада автора в техническом университете Дармштадта (Германия) в феврале 2002 г.

Прежде чем ответить на первый вопрос, заметим, что существует наименьшая топология $T^\pi \subseteq T$ такая, что $\mathbb{S}^\pi \rightleftharpoons \langle S, \vee, T^\pi\rangle$ — полутопологическая полурешетка и $\operatorname{Spec}\mathbb{S}^\pi = \operatorname{Spec}\mathbb{S}$ ($\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}^\pi = \mathbf{Spec}\,\mathbb{S}$). Действительно, пусть топология T^π определяется предбазисом, состоящим из всех открытых простых фильтров $\mathbb{S}$. Для проверки того, что $\mathbb{S}^\pi \rightleftharpoons \langle S, \vee, T^\pi\rangle$ — полутопологическая полурешетка, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть $\langle S, \vee\rangle$ — полурешетка, $\Phi \subseteq S$ — простой фильтр, $\sigma \in S$. Тогда $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi) = S$, если $\sigma \in \Phi$, и $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi) = \Phi$, если $\sigma \notin \Phi$.*

Доказательство. То, что $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi) = S$ для $\sigma \in \Phi$, очевидно из определения Σ_σ. Пусть $\sigma \in I \rightleftharpoons S \setminus \Phi$ и $\sigma' \in \Sigma_\sigma^{-1}(\Phi)$, т. е. $\sigma \vee \sigma' \in \Phi$. Если бы $\sigma' \notin \Phi$, т. е. $\sigma' \in I$, то $\sigma \vee \sigma' \in I = S \setminus \Phi$, так как I — идеал; следовательно, $\sigma' \in \Phi$ и $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi) \subseteq \Phi$. Но включение $\Phi \subseteq \Sigma_\sigma^{-1}(\Phi)$ справедливо всегда, значит, $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi) = \Phi$. $\square$

Следствие. *Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$ — полутопологическая полурешетка. Тогда $\mathbb{S}^\pi = \langle S, \vee, T^\pi\rangle$ — топологическая полурешетка, т. е. операция $\vee$ непрерывна в топологии T^π.*

Предложение 1. (i) *Гомоморфизм $\mu : \langle S, \vee\rangle \to \langle T_*, \cup\rangle$ является непрерывным открытым отображением пространства $\langle S, T^\pi\rangle$ в пространство*

$$\langle \mu(S), T_\pi \upharpoonright \mu(S)\rangle \subseteq \langle T_*, T_\pi\rangle.$$

(ii) *Гомоморфизм μ является вложением тогда и только тогда, когда пространство $\langle S, T^\pi\rangle$ T_0-отделимо, т. е. для любых $\sigma_0 \neq \sigma_1 \in S$ найдется открытый простой фильтр Φ такой, что $\sigma_0 \in \Phi$, $\sigma_1 \notin \Phi$ или $\sigma_0 \notin \Phi$, $\sigma_1 \in \Phi$.*

Доказательство. Установим утверждение (i) предложения (заметим, что $T_\pi = (T_{dk})^\pi$). Пусть $\Phi \subseteq T_*$ — простой фильтр, открытый в топологии T_{dk}. Для доказательства непрерывности μ достаточно показать, что $\mu^{-1}(\Phi)$ является простым фильтром полурешетки $\langle S, \vee\rangle$, открытым в топологии T. Так как $J \rightleftharpoons T_* \setminus \Phi$ — идеал, а μ — гомоморфизм, то $I_0 \rightleftharpoons \mu^{-1}(J)$ либо пусто, либо является идеалом полурешетки $\langle S, \vee\rangle$. Проверим, что $I_0 \neq \varnothing$. Пусть $U \in J$, тогда существует $\sigma \in S$ такое, что $V_\sigma \subseteq U$. Отсюда $V_\sigma = \mu(\sigma) \in J$, $\sigma \in \mu^{-1}(J)$; $\mu^{-1}(J) \neq \varnothing$.

Возможны два случая.

Случай 1. $\Phi = T_* \setminus \{\varnothing\}$. По доказанному выше существует $\sigma \in S$ такой, что $V_\sigma \in T_* \setminus \Phi$; следовательно, $V_\sigma = \varnothing$. Тогда по замечанию после теоремы $1'$ пространство $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}$ уравновешено.

Случай 2. $\Phi \neq T_* \setminus \{\varnothing\}$, т. е. существует $\sigma \in S$ такой, что $V_\sigma \neq \varnothing$, $V_\sigma \notin \Phi$.

В любом случае по теореме $1'$ (и по замечанию после нее) существует $I \in \operatorname{Spec}\mathbb{S}$ такой, что $\Phi = W_I = \{U \mid U \in T_*,\ I \in U\}$. Проверим, что $\mu^{-1}(\Phi) = S \setminus I$. Пусть $V_\sigma = \mu(\sigma) \in \Phi$. Тогда $I \in V_\sigma$, $\sigma \notin I$, $\sigma \in S \setminus I$, т. е. $\mu^{-1}(\Phi) \subseteq S \setminus I$. Пусть $\sigma \in S \setminus I$, тогда $\sigma \notin I$, $I \in V_\sigma$, $V_\sigma = \mu(\sigma) \in \Phi$, $\sigma \in \mu^{-1}(\Phi)$, т. е. $S \setminus I \subseteq \mu^{-1}(\Phi)$ и $S \setminus I = \mu^{-1}(\Phi)$. Итак, $\mu^{-1}(\Phi)$ является открытым простым фильтром ($\in T_\pi$), и непрерывность μ установлена.

Докажем теперь, что μ — открытое отображение. Для этого достаточно установить для любого $I \in \operatorname{Spec}\mathbb{S}$, что $\mu(S \setminus I)$ открыто в $\mu(S) \subseteq T_*$. Рассмотрим семейство $W_I = \{U \mid U \in T_*,\ I \in U\} \subseteq T_*$. Это семейство открыто в топологии T_{dk} и является простым фильтром в $\langle T_*, \cup\rangle$, т. е. W_I открыто в топологии T_π. Проверим, что $\mu(S \setminus I) = \mu(S) \cap W_I$. Пусть $\sigma \in S \setminus I$. Тогда $\sigma \notin I$, $I \in V_\sigma$, $\mu(\sigma) = V_\sigma \in W_I$. Итак, $\mu(S \setminus I) \subseteq W_I \cap \mu(S)$. Пусть $\mu(\sigma) = V_\sigma \in W_I$, т. е. $I \in V_\sigma$, $\sigma \notin I$, $\sigma \in S \setminus I$. Тогда $\mu^{-1}(W_I) \subseteq S \setminus I$, $W_I \cap \mu(S) \subseteq \mu(S \setminus I)$ и, следовательно, $\mu(S \setminus I) = \mu(S) \cap W_I$, т. е. μ — открытое отображение. Утверждение (i) установлено.

Необходимость в утверждении (ii) предложения сразу следует из утверждения (i), так как пространство $\langle T_*, T_\pi\rangle$ T_0-отделимо.

Проверим достаточность. Пусть $\sigma_0 \neq \sigma_1 \in S$ и Φ — простой фильтр полурешетки $\langle S, \vee\rangle$, открытый в топологии T (T^π), такой, что $\sigma_0 \in \Phi$, $\sigma_1 \notin \Phi$. Тогда $I \rightleftharpoons S \setminus \Phi \in \operatorname{Spec}\mathbb{S}$ и $\sigma_0 \notin I$, $\sigma_1 \in I$. Отсюда $I \in V_{\sigma_0} = \mu(\sigma_0)$, $I \notin V_{\sigma_1} = \mu(\sigma_1)$ и, следовательно, $\mu(\sigma_0) \neq \mu(\sigma_1)$. Предложение доказано. $\square$

Следствие. *Если пространство $\langle S, T^\pi\rangle$ отделимо, то μ является гомеоморфным вложением $\langle S, T^\pi\rangle$ в $\langle T_*, T_\pi\rangle$.*

Предложение 1(ii) отвечает на вопрос 1, однако этот ответ не очень конструктивен. Хотелось бы иметь относительно легко проверяемые необходимые или достаточные условия того, что μ — вложение. В заключительном разд. 3 настоящей работы будет указан ряд таких условий.

Обратимся к ответу на вопрос 2, сначала предполагая, что μ является вложением и $T^\pi = T$.

Ответ будет получен в терминах существенных расширений топологических пространств (см. [6]).

Предложение 2. *Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$ — полутопологическая полурешетка такая, что $\mu : S \to T_*$ — вложение и $T^\pi = T$. Если отождествить S с $\mu(S) \subseteq T_*$, то $\langle T_*, T_\pi\rangle$ — максимальное (= наибольшее) существенное расширение $\langle S, T\rangle$.*

Доказательство. Для доказательства потребуются несколько лемм.

Лемма 6. *При сформулированных выше предположениях порядок специализации $\leq_T$ совпадает с порядком $\leq$, определенным полурешеткой $\langle S, \vee\rangle$.*

Доказательство. То, что $\sigma_0 \leq \sigma_1$ влечет $\sigma_0 \leq_T \sigma_1$, следует из того, что все предбазисные открытые множества являются (простыми) фильтрами. Пусть $\sigma_0 \not\leq \sigma_1$, тогда $\sigma_1 \leq \sigma_0 \vee \sigma_1$ и $\sigma_1 \neq \sigma_0 \vee \sigma_1$. Так как μ — вложение, то $\langle S, T(= T^\pi)\rangle$ T_0-отделимо и, следовательно, существует открытый простой фильтр Φ такой, что $\sigma_1 \notin \Phi$, $\sigma_0 \vee \sigma_1 \in \Phi$ или $\sigma_1 \in \Phi$, $\sigma_0 \vee \sigma_1 \notin \Phi$. Второй случай невозможен, поскольку $\sigma_1 \leq \sigma_0 \vee \sigma_1$. Итак, $\sigma_1 \notin \Phi$, $\sigma_0 \vee \sigma_1 \in \Phi$. Остается заметить, что $\sigma_0 \in \Phi$. Действительно, если $\sigma_0 \notin \Phi$, то и $\sigma_0 \vee \sigma_1 \notin \Phi$, так как $S \setminus \Phi$ — идеал. Итак, существует открытый простой фильтр $\Phi(\in T^\pi)$ такой, что $\sigma_0 \in \Phi$, $\sigma_1 \notin \Phi$; следовательно, $\sigma_0 \not\leq_T \sigma_1$. $\square$

Если полурешетка $\langle S, \vee\rangle$ имеет наименьший элемент $\perp$, то полагаем $S_\perp \rightleftharpoons S$. Если $\langle S, \vee\rangle$ не имеет наименьшего элемента, то пусть $S_\perp \rightleftharpoons S \cup \{\perp\}$, где $\perp \notin S$, операция $\vee_\perp$ продолжает $\vee$ так, что $\perp \vee_\perp \perp = \perp$, $\perp \vee_\perp \sigma = \sigma$ для всех $\sigma \in S$. Тогда $\langle S_\perp, \vee_\perp\rangle$ — верхняя полурешетка с наименьшим элементом $\perp$. Полагаем $T_\perp \rightleftharpoons T \cup \{S_\perp\}$; $\mathbb{S}_\perp \rightleftharpoons \langle S_\perp, \vee_\perp, T_\perp\rangle$.

Лемма 7. *$\mathbb{S}_\perp$ — полутопологическая полурешетка, $(T_\perp)^\pi = T_\perp$, $\operatorname{Spec}\mathbb{S}_\perp = \{I \cup \{\perp\} \mid I \in \operatorname{Spec}\mathbb{S}\}$, если $\langle S, \vee\rangle$ имеет наименьший элемент или $\langle S, \vee\rangle$ не является фильтром; $\operatorname{Spec}\mathbb{S}_\perp = \{I \cup \{\perp\} \mid I \in \operatorname{Spec}\mathbb{S}\} \cup \{\{\perp\}\}$, если $\perp \notin S$ и $\langle S, \vee\rangle$ является фильтром* (*конаправленно*), *и $S_\perp$ отделимо в топологии $T_\perp$.*

Доказательство. Проверяется непосредственно. $\square$

Лемма 8. *Расширение $\langle S_\perp, T_\perp\rangle$ топологического пространства $\langle S, T\rangle$ удовлетворяет свойствам 1–4 расширения $H_0^\vee$, указанным в* [6]. *В частности, $\langle S_\perp, T_\perp\rangle$ является существенным расширением топологического пространства $\langle S, T\rangle$.*

Доказательство. Проверить нужно лишь свойство 4 для случая, когда $S_\perp \neq S$. В этом случае $\langle S, \vee\rangle$ не имеет наименьшего элемента. Для любого $U \in T$ если $U \neq S$, то наибольшее открытое U^* в $T_\perp$ такое, что $U^* \cap S = U$, совпадает с U. Для S имеем $S^* = S_\perp$. Для доказательства того, что семейство $\{U^* \mid U \in T\}$ образует базис топологии $T_\perp$, достаточно установить, что $S = \bigcup\{U \mid U \in T,\ U \neq S\}$. Пусть $\sigma \in S$. Так как σ — не наименьший элемент $\langle S, \vee\rangle$, найдется элемент $\sigma' \in S$ такой, что $\sigma \not\leq \sigma'$. Тогда найдется открытое $U_\sigma \in T$ такое, что $\sigma \in U_\sigma$, $\sigma' \notin U_\sigma$. Следовательно, $U_\sigma \neq S$ и $S = \bigcup\limits_{\sigma \in S} U_\sigma$. $\square$

Лемма 9. *Пространство $\langle T_*, T_\pi\rangle$ является существенно полным* (*т. е. не допускает собственных существенных расширений*).

Доказательство. В соответствии с предложением 2 из [6] достаточно установить, что $\langle T_*, T_\pi\rangle$ является d-пространством, т. е. для любого направленного (относительно порядка специализации, который на $\langle T_*, T_\pi\rangle$ совпадает с отношением включения) семейства $W \subseteq T_*$ в T_* существует $\sup W$, и $\sup W$ является предельной точкой семейства W. Итак, пусть $W \subseteq T_*$ — направленное семейство, тогда $U \rightleftharpoons \bigcup W = \bigcup\{U' \mid U' \in W\} \in T_*$ и, очевидно, $U = \sup W$. Покажем, что U — предельная точка W даже в топологии T_{dk}. Пусть V — T_{dk}-открытое семейство такое, что $U \in V$. Так как $U = \bigcup W$ и W направленно, то по определению топологии T_{dk} найдется $U' \in W$ такой, что $U' \in V$. $\square$

Для завершения доказательства предложения достаточно заметить, что для любого $\varnothing \neq U \in T_*$ имеет место $U = \bigcup\{V_\sigma \mid \sigma \in S, V_\sigma \subseteq U\}$. Семейство $\{V_\sigma \mid \sigma \in S,\ V_\sigma \subseteq U\}$ направленно, следовательно, U — предельная точка для этого семейства. Отсюда и из предыдущей леммы следует, что $\langle T_*, T_\pi\rangle$ является d-пополнением $\langle S_\perp, T_\perp\rangle$. Тогда следствие 1 к предложению 3 из [6] и устанавливает окончательный результат. $\square$

Обратимся к общему случаю. Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$ — произвольная полутопологическая полурешетка. Топология T^π определяет на S отношение эквивалентности $\sim_\pi$ так:

$$\sigma_0 \sim_\pi \sigma_1 \Longleftrightarrow \sigma_0 \leq_{T^\pi} \sigma_1 \quad \text{и} \quad \sigma_1 \leq_{T^\pi} \sigma_0.$$

Лемма 10. *Отношение* $\sim_\pi$ *является отношением конгруентности на полурешетке* $\langle S, \vee\rangle$; *топология* T^π *индуцирует на* $\langle S/_{\sim_\pi}, \vee\rangle$ *структуру (полу)топологической полурешетки* $\mathbb{S}^\pi \rightleftharpoons \langle S/_{\sim_\pi}, \vee, \overline{T}^\pi\rangle$, *которая отделима в топологии* $\overline{T}^\pi = (\overline{T}^\pi)^\pi$.

Доказательство. Пусть $\sigma_0 \leq_{T^\pi} \sigma_0'$, $\sigma_1 \leq_{T^\pi} \sigma_1'$; покажем, что тогда $\sigma_0 \vee \sigma_1 \leq_{T^\pi} \sigma_0' \vee \sigma_1'$. Пусть $\Phi \subseteq S$ — открытый простой фильтр и $\sigma_0 \vee \sigma_1 \in \Phi$; тогда $\sigma_0 \in \Phi$ или $\sigma_1 \in \Phi$. Если $\sigma_0 \in \Phi$, то и $\sigma_0' \in \Phi$ (так как $\sigma_0 \leq_{T^\pi} \sigma_0'$); следовательно, и $\sigma_0' \vee \sigma_1' \in \Phi$, так как $\sigma_0' \leq \sigma_0' \vee \sigma_1'$. Отсюда и следует, что если $\sigma_0 \sim_\pi \sigma_0'$, $\sigma_1 \sim_\pi \sigma_1'$, то $\sigma_0 \vee \sigma_1 \sim_\pi \sigma_0' \vee \sigma_1'$, т. е. $\sim_\pi$ — отношение конгруентности на $\langle S, \vee\rangle$.

Если $\Phi \subseteq S$ — открытый простой фильтр, то Φ замкнуто относительно $\sim_\pi$ (т. е. если $\sigma \in \Phi$ и $\sigma \sim_\pi \sigma'$, то $\sigma' \in \Phi$), и легко проверить, что $\overline{\Phi} \rightleftharpoons \Phi/_{\sim_\pi} \subseteq S/_{\sim_\pi}$ — простой фильтр полурешетки $\langle S/_{\sim_\pi}, \vee\rangle$, открытый в топологии $\overline{T}^\pi$. Тогда семейство $\{\overline{\Phi} \mid \Phi$ — открытый простой фильтр $\mathbb{S}\}$ является предбазисом топологии $\overline{T}^\pi$ (и $(\overline{T}^\pi)^\pi = \overline{T}^\pi$). Лемма 5 (и ее следствие) показывает, что $\mathbb{S}^\pi$ — (полу)топологическая полурешетка. $\square$

Отображение $\varphi_\pi : \sigma \mapsto [\sigma]_\pi \rightleftharpoons \{\sigma' \mid \sigma' \in S, \sigma \sim_\pi \sigma'\}$, $\sigma \in S$, является непрерывным гомоморфизмом $\mathbb{S}$ на $\mathbb{S}^\pi$, а индуцированное отображение $\varphi_\pi^* : \operatorname{Spec}\mathbb{S}^\pi \to \operatorname{Spec}\mathbb{S}$, определенное так: $\varphi_\pi^*(\overline{I}) \rightleftharpoons \varphi_\pi^{-1}(\overline{I})$ для $\overline{I} \in \operatorname{Spec}\mathbb{S}^\pi$, как нетрудно проверить, является гомеоморфизмом пространств $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}^\pi$ и $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}$. Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} & \xrightarrow{\mu_{\mathbb{S}}} & \langle T_*, T_\pi\rangle \\ {\scriptstyle\varphi_\pi}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\varphi_\pi^+} \\ \mathbb{S}^\pi & \xrightarrow{\mu_{\mathbb{S}^\pi}} & \langle \overline{T}_*, \overline{T}_\pi\rangle, \end{array}$$

здесь T_* — топология пространства $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}$, $\overline{T}_*$ — топология пространства $\mathbf{Spec}\,\mathbb{S}^\pi$, а φ_π^+ — изоморфизм (гомеоморфизм), индуцированный гомеоморфизмом φ_π^*.

Проведенные рассмотрения вместе с предложением 2 показывают, что непрерывное отображение $\mu(= \mu_{\mathbb{S}}) : \langle S, T\rangle \to \langle T_*, T_\pi\rangle$ можно представить в виде композиции $\mu = (\varphi_\pi^+ \circ \mu_{\mathbb{S}^\pi}) \circ \varphi_\pi$, где $\varphi_\pi : \langle S, T\rangle \to \langle S^\pi, \overline{T}^\pi\rangle$ — отображение отделимости для топологии T^π, а $\varphi_\pi^+ \circ \mu_{\mathbb{S}^\pi} : \langle S^\pi, \overline{T}^\pi\rangle \to \langle T_*, T_\pi\rangle$ — вложение в наибольшее существенное расширение.

Имеется еще одно естественное отображение топологических пространств.

Пусть $\langle X, T\rangle$ — топологическое пространство. Тогда $\langle T, \cup, T_\pi\rangle$ — полутопологическая полурешетка и для любого $\xi \in X$ семейство $I_\xi \rightleftharpoons \{U \mid U \in T, \xi \notin U\}$ является T_π-замкнутым простым идеалом, т. е. $I_\xi \in \operatorname{Spec}\langle T, \cup, T_\pi\rangle$. Таким образом определено отображение $\lambda : X \to \operatorname{Spec}\langle T, \cup, T_\pi\rangle$ ($\lambda(\xi) \rightleftharpoons I_\xi$, $\xi \in X$).

Для любого $U \in T$ семейство $V_U \rightleftharpoons \{I \mid I \in \operatorname{Spec}\langle T, \cup, T_\pi\rangle, U \notin I\}$ является базисным открытым в топологии пространства $\mathbf{Spec}\langle T, \cup, T_\pi\rangle$. Нетрудно проверить, что $\lambda^{-1}(V_U) = U$ и $\lambda(U) = V_U \cap \lambda(X)$. Следовательно, λ является непрерывным отображением из $\langle X, T\rangle$ в $\mathbf{Spec}\langle T, \cup, T_\pi\rangle$. Если $\langle X, T\rangle$ отделимо, то λ — гомеоморфное вложение; в этом случае оно является ничем иным, как переходом к наименьшему уравновешенному расширению $\langle X, T\rangle$ (sobrification, [2]). Если $\langle X, T\rangle$ неотделимо, то λ является композицией отображения (функтора) отделимости и перехода к наименьшему уравновешенному расширению полученного отделимого пространства.

3. В этом разделе укажем некоторые достаточные (или необходимые) условия отделимости полутопологической полурешетки в топологии T^π. В основном будет рассмотрен случай дискретной топологии.

Следующее предложение, по существу, является подходящей переформулировкой известных свойств дистрибутивных решеток.

Предложение 3. *Пусть $\langle S, \vee\rangle$ является решеткой, T_ω — дискретная топология на S. Тогда S отделимо в топологии T_ω^π в том и только в том случае, если $\langle S, \vee\rangle$ является дистрибутивной решеткой.*

Необходимость будет следовать из характеризации дистрибутивных решеток, указанной в [1, теорема II.1.1], замечания о том, что из T^π-отделимости решетки $\langle S, \vee\rangle$ следует T^π-отделимость любой подрешетки $\langle S, \vee\rangle$, и простой проверки того, что элементы a и b пентагона или диаманта не могут быть разделены простым идеалом (см. [1, с. 87, рис. 1]).

Достаточность будет установлена в значительно большей общности.

Напомним (см. [7]), что полурешетка $\langle S, \vee\rangle$ называется *дистрибутивной,* если из соотношения $\sigma \le \sigma_0 \vee \sigma_1$ следует существование элементов σ_0' и σ_1' таких, что $\sigma_0' \le \sigma_0$, $\sigma_1' \le \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_0' \vee \sigma_1'$.

Лемма 11. *Если $\langle S, \vee\rangle$ — дистрибутивная полурешетка, то $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi)$ является фильтром для любых $\sigma \in S$ и фильтра $\Phi \subset S$.*

Доказательство. Пусть $\Phi \subseteq S$ — фильтр $\sigma \in S$; $\sigma_0, \sigma_1 \in \Sigma_\sigma^{-1}(\Phi)$, т. е. $\sigma_0 \vee \sigma$, $\sigma_1 \vee \sigma \in \Phi$. Так как Φ — фильтр, то существует элемент $\sigma' \in \Phi$ такой, что $\sigma' \le \sigma_0 \vee \sigma$, $\sigma' \le \sigma_1 \vee \sigma$. Тогда существуют элементы $\sigma_0', \sigma'' \in S$ такие, что $\sigma_0' \le \sigma_0$, $\sigma'' \le \sigma$ и $\sigma' = \sigma_0' \vee \sigma''$. Поскольку $\sigma_0'(\le \sigma') \le \sigma_1 \vee \sigma$, существуют элементы $\sigma_1', \sigma''' \in S$ такие, что $\sigma_1' \le \sigma_1$, $\sigma''' \le \sigma$ и $\sigma_0' = \sigma_1' \vee \sigma'''$. Тогда $\sigma_1' \le \sigma_0' \le \sigma_0$, $\sigma_1' \le \sigma_1$ и $\sigma_1' \vee \sigma = \sigma_1' \vee \sigma''' \vee \sigma = \sigma_0' \vee \sigma \ge \sigma_0' \vee \sigma'' = \sigma' \in \Phi$; следовательно, $\sigma_1' \in \Sigma_\sigma^{-1}(\Phi)$ и $\sigma_1' \le \sigma_0, \sigma_1$, т. е. $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi)$ является фильтром. $\square$

Справедлива следующая абстрактная форма теоремы Хофманна — Мислова.

Предложение 4. *Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$ — полутопологическая дистрибутивная полурешетка. Тогда любой собственный ($\ne S$) открытый фильтр является пересечением простых открытых фильтров.*

Это предложение будет сразу вытекать из следующей леммы.

Лемма 12. *Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$ — полутопологическая дистрибутивная полурешетка, Φ — открытый фильтр, I — идеал и $\Phi \cap I = \varnothing$. Тогда существует открытый простой фильтр Φ_* такой, что $\Phi_* \supseteq \Phi$ и $\Phi_* \cap I = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть Φ_* — максимальный открытый фильтр такой, что $\Phi_* \supseteq \Phi$ и $\Phi_* \cap I = \varnothing$. Существование такого фильтра легко следует из леммы Цорна.

Проверим, что Φ_* — простой фильтр. Пусть $\sigma_0 \in S \setminus \Phi_*$, тогда $\sigma_0 \notin \Sigma_{\sigma_0}^{-1}(\Phi_*)$. Из условий леммы вытекает, что $\Sigma_{\sigma_0}^{-1}(\Phi_*)$ — открытый фильтр. Так как $\Phi_* \subseteq \Sigma_{\sigma_0}^{-1}(\Phi_*)$, то либо $\Phi_* = \Sigma_{\sigma_0}^{-1}(\Phi_*)$, либо $\Sigma_{\sigma_0}^{-1}(\Phi_*) \cap I \ne \varnothing$. Покажем, что второй случай невозможен. Предположим противное, и пусть $\sigma_1 \in \Sigma_{\sigma_0}^{-1}(\Phi_*) \cap I$, т. е. $\sigma_0 \vee \sigma_1 \in \Phi_*$. Тогда $\sigma_0 \in \Sigma_{\sigma_1}^{-1}(\Phi_*)$ и, следовательно, открытый фильтр $\Sigma_{\sigma_1}^{-1}(\Phi_*)$ собственно содержит Φ_*. Но тогда $\Sigma_{\sigma_1}^{-1}(\Phi_*) \cap I \ne \varnothing$. Пусть $\sigma_2 \in \Sigma_{\sigma_1}^{-1}(\Phi_*) \cap I$; значит, $\sigma_1 \vee \sigma_2 \in \Phi_*$, но $\sigma_1, \sigma_2 \in I$ и тем самым $\sigma_1, \sigma_2 \in I \cap \Phi_*$; противоречие. Итак, для любого $\sigma_0 \in S \setminus \Phi_*$ имеет место равенство $\Phi_* = \Sigma_{\sigma_0}^{-1}(\Phi_*)$. Если еще

$\sigma_1 \in S \setminus \Phi_*$, то $\Phi_* = \Sigma_{\sigma_1}^{-1}(\Phi_*) = \Sigma_{\sigma_1}^{-1}(\Sigma_{\sigma_0}^{-1}(\Phi_*)) = \Sigma_{\sigma_1 \vee \sigma_0}^{-1}(\Phi_*)$. Отсюда сразу следует, что $\sigma_1 \vee \sigma_0 \in S \setminus \Phi_*$ (так как $\sigma \in \Phi_*$ влечет, что $\Sigma_\sigma^{-1}(\Phi_*) = S \neq \Phi_*$) и $S \setminus \Phi_*$ является идеалом, а Φ_* — простым фильтром. $\square$

Следствие. *Пусть $\langle S, \vee\rangle$ — дистрибутивная полурешетка, T_ω — дискретная топология на S. Тогда S отделима в топологии T_ω^π.*

Так как решетка является дистрибутивной полурешеткой тогда и только тогда, когда она является дистрибутивной решеткой (см. [7]), из леммы 12 и следствия вытекает достаточность в предложении 3.

Из леммы 7 легко следует

Лемма 13. *Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$ — полутопологическая полурешетка. S отделима в топологии T^π тогда и только тогда, когда $S_\perp$ отделима в топологии $(T_\perp)^\pi$.*

Из предложения 3 и леммы 13 вытекает

Следствие. *Пусть $\langle S, \vee\rangle$ — конечная полурешетка, T — дискретная топология на $\langle S, \vee\rangle$. Тогда S отделима в топологии T^π в том и только в том случае, если $\langle S_\perp, \vee_\perp\rangle$ — дистрибутивная решетка.*

Доказательство. Действительно, если $\langle S, \vee\rangle$ — конечная полурешетка, то $\langle S_\perp, \vee_\perp\rangle$ является решеткой. $\square$

Итак, для случая конечной полурешетки (с дискретной топологией) ответ найден полностью. Для бесконечного случая ситуация до конца не ясна. Ниже приведен пример T^π-отделимой полурешетки (с наименьшим элементом), не являющейся дистрибутивной.

Пример. Рассмотрим дистрибутивную решетку, изображенную на рис. 1. Полурешетка $\langle S_0, \vee_0\rangle$ получается из нее удалением элемента b. Полурешетка $\langle S_0, \vee_0\rangle$ такова, что главные простые идеалы $\downarrow a$, $\downarrow a_n$, $\downarrow c$ разделяют все элементы S_0. Проверим, что $\langle S_0, \vee_0\rangle$ не является дистрибутивной полурешеткой. Действительно, имеем $a \leq \top = a_0 \vee c$ и $\downarrow a \cap \downarrow c = \{\top, b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$, но $a_0 \vee b_n = b_{n+1} < a$ для любого $n \in \omega$. Следовательно, не существует элементов $a' \leq a_0$, $c' \leq c$ таких, что $a = a' \vee c'$.

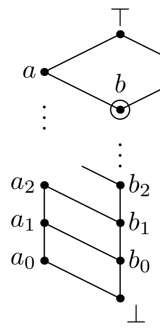

Рис. 1.

Замечание. Этот пример отвечает на вопрос, оставленный открытым на с. XIII в [4].

В заключение укажем следующую простую (но не конструктивную) характеризацию полурешеток $\langle S, \vee\rangle$ таких, что S отделимо в топологии T_ω^π.

Если $\langle X, T\rangle$ — топологическое пространство, то базис $B \subseteq T$ топологии T называется *аддитивным*, если $V_0, V_1 \in B$ влечет $V_0 \cup V_1 \in B$.

Предложение 5. *Пусть $\langle S, \vee \rangle$ — полурешетка, T_ω — дискретная топология на S. S отделимо в топологии T_ω^π тогда и только тогда, когда существуют топологическое пространство $\langle X, T \rangle$ и аддитивный базис B топологии T такие, что полурешетки $\langle S, \vee \rangle$ и $\langle B, \cup \rangle$ изоморфны.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности нужно лишь заметить, что множество $W_\xi^B = \{V \mid V \in B, \xi \in V\}$ является простым фильтром полурешетки $\langle B, \cup \rangle$ для любой точки ξ, не являющейся наибольшей относительно предпорядка $\leq_X$. $\square$

Добавление при корректуре. Удалось найти следующее элементарное условие, характеризующее отделимые полурешетки.

Предложение 6. *Пусть $\langle S, \vee \rangle$ — полурешетка, T_ω — дискретная топология на S. Тогда S отделимо в топологии T_ω^π в том и только в том случае, если полурешетка $\langle S, \vee \rangle$ удовлетворяет условию*

$$\forall \sigma_0 \sigma_0' \sigma_1 \ \exists \sigma ((\sigma_0 \not\leq \sigma_1) \wedge (\sigma_0 \leq \sigma_1 \vee \sigma_0') \to (\sigma \leq \sigma_0) \wedge (\sigma \leq \sigma_0') \wedge (\sigma \not\leq \sigma_1)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
2. *Gierz G., Hofmann K. H., Keimel K., Lawson J. D., Mislove M., Scott D.* A Compendium of Continuous Lattices. Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verl., 1980.
3. *Hofmann K. H., Keimel K.* A general charater theory for partially ordered sets and lattices. Providence: Amer. Math. Soc., 1972. (Mem. Amer. Math. Soc.; 122).
4. *Hofmann K. H., Mislove M., Stralka A.* The Pontryagin duality of compact 0-dimensional semilattices and its applications. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1974. (Lectures Nots in Math.; 396).
5. *Day B. J., Kelly G. M.* On topological quotient maps preserved by pull-backs on products // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1970. V. 67. P. 553–558.
6. *Ершов Ю. Л.* О существенных расширениях T_0-пространств // Докл. РАН. 1999. Т. 368, № 3. С. 299–302.
7. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 9 июля 2003 г.

Ершов Юрий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
ershov@math.nsc.ru