Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 514.1

ОБ ОДНОМ ЭКВИВАЛЕНТНОМ УСЛОВИИ ПЛОСКОЙ МЕТРИКИ

Х. Ким, Дж. Ким

Аннотация: Доказано, что на 8-мерном многообразии с нулевой эйлеровой характеристикой каждая семиплоская метрика должна быть плоской.

Ключевые слова: 8-мерное многообразие, нулевая эйлерова характеристика, семиплоская метрика, плоская метрика.

1. Введение

Локальная геометрия многообразия дает информацию о его глобальной топологии. Так, обобщенная теорема Гаусса — Бонне [1, 2] утверждает, что эйлерова характеристика χ компактного ориентированного риманова многообразия M^{4k} может быть представлена интегралом

$$\chi = \frac{2}{V}\frac{[(2k)!]^2}{4k}\int\limits_M \operatorname{trace}(*R_{2k} * R_{2k})\, dV,$$

где V — объем евклидовой единичной $4k$-сферы, dV — элемент объема на M, звездочка означает $*$-оператор Ходжа и R_{2k} — $2k$-оператор кривизны. Если R_{2k} коммутирует с $*$, т. е. $R_{2k}* = *R_{2k}$, то будем говорить, что *выполнено условие Торпа*, метрику называть *торповой метрикой* или *метрикой Торпа*, а многообразие — *торповым многообразием* или *многообразием Торпа.* В 4-мерном случае торпова метрика эйнштейнова [3, 4], и в размерности $4k$, более высокой, чем 4, торповы многообразия изучались в [4]. С другой стороны, если R_{2k} антикоммутирует с $*$, т. е. $R_{2k}* = - * R_{2k}$, будем называть это условие *антиусловием Торпа*, метрику — *антиторповой метрикой*, а многообразие — *антиторповым многообразием.* Будем в дальнейшем риманову метрику называть *полуплоской*, если она скалярно-плоская и конформно-плоская, иными словами, ее скалярная кривизна и тензор Вейля равны нулю. В частности, в размерности 4 антиторпова метрика полуплоская, верно и обратное. В размерности $4k$, более высокой, чем 4, однако, антиторпова метрика не обязательно будет полуплоской, и обратно. Пусть, например, T^{2k+1} — плоский тор и M^{2k-1} — компактное ориентированное неплоское риманово многообразие. Тогда риманово произведение $T^{2k+1} \times M^{2k-1}$ будет антиторповым многообразием. Однако, вообще говоря, метрика произведения не будет полуплоской. С другой стороны, пусть S^{4k} — стандартная $4k$-сфера и H^{4k} — стандартное $4k$-гиперболическое многообразие. Тогда метрика произведения S^{4k} и H^{4k} полуплоская, но вместе с тем не антиторпова. Риманову метрику на компактном ориентированном многообразии M^{4k}

The authors wish to acknowledge the financial support of the Korea Research Foundation made in the program year of 1998.

назовем *семиплоской*, если она удовлетворяет условию полуплоской метрики и антиусловию Торпа. Семиплоская метрика не обязательно плоская. Например, метрика произведения S^{4k+2} и H^{4k+2} будет семиплоской, но не плоской метрикой. Цель настоящей работы — исследовать, когда семиплоская метрика будет плоской.

Теорема 1. *На компактном ориентированном* 8*-мерном многообразии с* $\chi = 0$ *всякая семиплоская метрика будет плоской.*

Важным составляющим в доказательстве этой теоремы является

Лемма 1. *Пусть* (M, g) *— риманово многообразие размерности* 8*. Тогда*

$$\operatorname{trace} R_4 = \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{30}{56}s^2 - \frac{10}{3}\left|\mathrm{ric}_o\right|^2 + 4\left|W\right|^2\right\},$$

где s *— скалярная кривизна* ric_o, *— тензор Риччи с нулевым следом, т. е.* $\mathrm{ric}_o = \mathrm{ric} - \frac{s}{8}g$, *и* W *— тензор Вейля.*

Из леммы 1 можно получить, что $\operatorname{trace} R_4$ неположителен, если метрика полуплоская.

2. p-Оператор кривизны

Пусть M — риманово многообразие размерности n. Через $\bigwedge^p(M)$ обозначим связку p-векторов из M. Это риманово векторное расслоение с внутренним произведением на слое $\bigwedge^p(x)$ над точкой x [2]. Пусть R означает ковариантный тензор кривизны M. Для каждого четного $p > 0$ определим p-тензор кривизны R_p на M как ковариантное тензорное поле порядка $2p$, задаваемое так:

$$\begin{aligned} &R_p(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p) \\ &= \frac{1}{2^{p/2}p!}\sum_{\alpha,\beta\in S_p} \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta)R(u_{\alpha(1)}, u_{\alpha(2)}, v_{\beta(1)}, v_{\beta(2)})\cdots R(u_{\alpha(p-1)}, u_{\alpha(p)}, v_{\beta(p-1)}, v_{\beta(p)}),\end{aligned}$$

где $u_i, v_j \in T_xM$, S_p — группа перестановок на $(1, \dots, p)$ и $\varepsilon(\alpha)$ для $\alpha \in S_p$ — знак перестановки α.

Тензор R_p обладает следующими свойствами. Он альтернирующий по первым p переменным, альтернирующий по последним p переменным и инвариантен относительно операции перестановки первых p переменных с последними p переменными. Однако для каждой точки $x \in M$ можно рассматривать R_p как симметричную билинейную форму на $\bigwedge^p(x)$. Используя внутреннее произведение на $\bigwedge^p(x)$, можно R_p в x отождествить с самосопряженным линейным оператором R_p на $\bigwedge^p(x)$. Такое отождествление дается формулой

$$\langle R_p(u_1 \wedge \dots \wedge u_p), v_1 \wedge \dots \wedge v_p\rangle \equiv R_p(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p),$$

где $u_i, v_j \in T_xM$. В дальнейшем мы будем использовать одно и то же обозначение для p-операторов кривизны и для p-тензоров кривизны. Для $p = n$ пространство $\bigwedge^n(x)$ одномерно, и тем самым самосопряженный линейный оператор $R_n : \bigwedge^n(x) \longrightarrow \bigwedge^n(x)$ представляет собой умножение скаляра на тождественный оператор. Точнее, гомоморфизм линейных расслоений $R_n : \bigwedge^n(M) \longrightarrow \bigwedge^n(M)$ есть

$$R_n = KI,$$

где I — тождественный автоморфизм на $\bigwedge^n(M)$ и K — кривизна Липшица — Киллинга на M [5]. Более того, для $x \in M$

$$K(x) = R_n(e_1, \dots, e_n, e_1, \dots, e_n),$$

где $\{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормальный базис на T_xM.

Обобщенная теорема Гаусса — Бонне [1] дает выражение эйлеровой характеристики χ компактного ориентированного риманова многообразия четной размерности n через интеграл:

$$\chi = \frac{2}{c_n} \int\limits_M K\,dV,$$

где K — кривизна Липшица — Киллинга на M, c_n — мера евклидовой n-мерной сферы и dV — элемент объема на M.

Покажем, что кривизна Липшица — Киллинга K на M может быть выражена в терминах R_p и оператора Ходжа $*$.

Пусть M — ориентированное риманово многообразие четной размерности n. Тогда согласно [2] кривизна Липшица — Киллинга K на M может также быть представлена как функция, значение которой в точке $x \in M$ находится по формуле

$$\frac{p!(n-p)!}{n!} \operatorname{trace}(*R_{n-p} * R_p),$$

где $p = 2, 4, 6, \dots, (n-2)$. Для ориентированного риманова многообразия размерности $n = 4k$ можно рассмотреть оператор средней кривизны R_{2k}, и если он удовлетворяет антиусловию Торпа

$$R_{2k}* = - * R_{2k},$$

то, поскольку $*^2 = \mathrm{Id}$, формула следа для K сводится к такой:

$$K = -\frac{[(2k)!]^2}{(4k)!} \operatorname{trace} R_{2k}^2 \leq 0,$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда $R_{2k} = 0$. Из предыдущих утверждений легко выводится необходимое условие существования антиторповой метрики.

Теорема 2. *Пусть M — компактное ориентируемое $4k$-мерное риманово многообразие, допускающее антиторпову метрику. Тогда*

$$\chi \leq 0,$$

где χ — эйлерова характеристика M. Более того, $\chi = 0$ тогда и только тогда, когда $R_{2k} \equiv 0$.

Далее мы увидим, что в 4-мерном случае антиторпова метрика полуплоская, верен также и обратный факт.

Теорема 3. *На 4-мерном римановом многообразии (M, g) метрика g будет полуплоской тогда и только тогда, когда g — антиторпова метрика.*

Доказательство. Рассматривая $R_{2k} \equiv R$ в $S^2 \bigwedge^2 T^*M^4$ как линейное отображение на $\bigwedge^2 T^*M^4$ и записывая разложение

$$\bigwedge\nolimits^2 T^*M^4 = \bigwedge\nolimits^+ T^*M^4 \oplus \bigwedge\nolimits^- T^*M^4,$$

где $\bigwedge^+ T^*M^4$ — $(+1)$-собственное (автодуальное) пространство, $\bigwedge^- T^*M^4$ — (-1)-собственное (антиавтодуальное) пространство $*$-оператора Ходжа соответственно, приходим к следующему выражению для R [3]:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{автодуальное} & \text{антиавтодуальное}\end{array} \\ R = & \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12}\,\mathrm{Id} & \mathrm{ric}_o \\ \hline {}^t\,\mathrm{ric}_o & W^- + \frac{s}{12}\,\mathrm{Id} \end{array}\right) \begin{array}{c}\text{автодуальное}\\ \text{антиавтодуальное}\end{array}\end{array}$$

где W^+, W^- — автодуальная и антиавтодуальная части тензора Вейля W соответственно.

Нетрудно заметить, что антиусловие Торпа влечет одновременно R (автодуальное пространство) $=$ антиавтодуальное пространство и R (антиавтодуальное пространство) $=$ автодуальное пространство. Отсюда вытекает, что антиусловие Торпа равносильно одновременному обращению в нуль скалярной кривизны и тензора Вейля, так что любая антиторпова метрика полуплоская и обратно. Это завершает доказательство.

3. Эквивалентное условие плоской метрики

Метрика риманова произведения S^{4k+2} и H^{4k+2} полуплоская, но не плоская. С другой стороны, мы докажем, что на компактном ориентированном многообразии размерности 8 с $\chi = 0$ каждая полуплоская метрика плоская.

Следующая лемма вносит существенный вклад в доказательство основного результата.

Лемма 1. *Пусть* (M, g) *— риманово многообразие размерности* 8. *Тогда*

$$\operatorname{trace} R_4 = \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{30}{56}s^2 - \frac{10}{3}|\,\mathrm{ric}_o\,|^2 + 4|W|^2\right\},$$

где s *— скалярная кривизна,* ric_o *— тензор Риччи с нулевым следом, т. е.* $\mathrm{ric}_o = \mathrm{ric} - \frac{s}{8}g$ *и* W *— тензор Вейля.*

Доказательство. Для 4-формы $\{e_a \wedge e_b \wedge e_c \wedge e_d\}$ с учетом эйнштейнова суммирования имеем

$$\operatorname{trace} R_4 = \frac{1}{2^2} R^{[ab}_{[ab}\ R^{cd]}_{cd]} = \frac{1}{2^2} R^{ab}_{[ab}\ R^{cd}_{cd]} = \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{6}\right)\bigl\{R^{ab}_{ab}\ R^{cd}_{cd} + R^{ab}_{ac}\ R^{cd}_{db} + R^{ab}_{ad}\ R^{cd}_{bc} + R^{ab}_{bc}\ R^{cd}_{ad} + R^{ab}_{bd}\ R^{cd}_{ca} + R^{ab}_{cd}\ R^{cd}_{ab}\bigr\},$$

где $[\ ]$ — кососимметризация и $\{e_k\}_{k=1}^{8}$ — ортонормальный репер. Проанализируем члены этой суммы по отдельности:

(i) $R^{ab}_{ab}\ R^{cd}_{cd} = \frac{30}{56}s^2 - \frac{10}{3}\,\mathrm{ric}^c_{oc}\,\mathrm{ric}^c_{oc} + 2W^{cd}_{cd}\ W^{cd}_{cd}$;

(ii) $R^{ab}_{ac}\ R^{cd}_{db} = -\frac{5}{6}\,\mathrm{ric}^b_{oc}\,\mathrm{ric}^c_{ob} + W^{db}_{dc}\ W^{dc}_{db}$;

(iii) $R^{ab}_{cd}\ R^{cd}_{ab} = W^{ab}_{cd}\ W^{cd}_{ab}$,

откуда

$$\operatorname{trace} R_4 = \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{30}{56}s^2 - \frac{10}{3}\,\mathrm{ric}^c_{oc}\,\mathrm{ric}^c_{oc} - \frac{10}{3}\,\mathrm{ric}^b_{oc}\,\mathrm{ric}^c_{ob} + 2W^{cd}_{cd}\ W^{cd}_{cd} + 4W^{db}_{dc}\ W^{dc}_{db} + W^{ab}_{cd}\ W^{cd}_{ab}\right\},$$

что завершает доказательство.

Теорема 4. *На компактном ориентированном многообразии размерности* 8 *с* $\chi = 0$ *каждая полуплоская метрика плоская.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $R_4 = 0$, в частности, $\operatorname{trace} R_4 = 0$, откуда легко вытекает, что тензор Риччи будет нулевым тензором при выполнении условия полуплоской метрики и леммы 1. Теорема доказана.

Следствие 1. *На торе размерности* 8 *каждая семиплоская метрика будет плоской.*

Следствие 2. *На произведении сфер* $S^p \times S^q$ *с нечетным* p *и* $p + q = 8$ *не существует семиплоской метрики.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chern S. S.* A simple intrinsic proof of the Gauss–Bonnet theorem for closed Riemannian manifolds // Ann. Math. 1944. V. 45. P. 747–752.
2. *Thorpe J. A.* Some remarks on the Gauss–Bonnet integral // J. Math. Mech. 1969. V. 18. P. 779–786.
3. *Besse A. L.* Einstein manifolds. Berlin etc.: Springer Verl., 1986.
4. *Kim J. m.* Einstein–Thorpe manifolds: PhD Thes. in S.U.N.Y at stony brook, 1998.
5. *Kuiper H. N.* On conformally flat spaces in the large // Ann. Math. 1949. V. 50. P. 916–924.

Статья поступила 28 июля 2002 г.

Hobum Kim, *Jaeman Kim*
Department of mathematics, Yonsei University, Shinchon 134, Seoul, Korea
kimbh@math.yonsei.ac.kr, jaeman@math.yonsei.ac.kr