Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 510.51

ВЫЧИСЛИМЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАД ЭНДОМОРФИЗМАМИ НЕГАТИВНЫХ НУМЕРАЦИЙ

Э. Ф. Комбарро

Аннотация: Доказано, что системы уравнений довольно большого класса имеют эндоморфизмы негативных нумераций в качестве решений, а также что если эндоморфизмы нумерации равномерно решают этот класс систем уравнений и обладают дополнительным свойством отделимости, то нумерация является негативной.

Ключевые слова: нумерация, эндоморфизм, вычислимость.

Введение

Теория нумераций [1] занимается переносом на другие области, отличные от ω, хорошо известной теории вычислимых функций. Объекты произвольных (счетных) областей кодируются натуральными числами, а вычислимые функции, которые «конгруэнтны» этому кодированию (или кодированиям в случае, когда рассматривается несколько нумераций), называются «эндоморфизмами» и представляют собой эффективные преобразования относительно нумерации (нумераций).

Эндоморфизмы нумерации (т. е., морфизмы из нумерации в себя) образуют полугруппу с единицей и могут служить основой для одного из подходов к классификации нумераций.

С другой стороны, на основе эквивалентности

$$x \equiv_\nu y \iff \nu(x) = \nu(y)$$

можно определить некоторые интересные свойства.

Например, нумерация называется *разрешимой*, если отношение $\equiv_\nu$ вычислимо, *позитивной*, если оно принадлежит Σ_1 (в этом случае оно некоторым образом «позитивно вычислимо») и *негативной*, если оно принадлежит Π_1 («негативно вычислимо»).

Естественный и плодотворный способ соединить оба подхода — изучить полугруппы эндоморфизмов разрешимых, позитивных и негативных нумераций. Для (бесконечных) разрешимых нумераций этот вопрос почти тривиален, поскольку в таком случае их полугруппы эндоморфизмов вычислимо изоморфны полугруппе всюду определенных вычислимых функций. Несмотря на это, ситуации с позитивными и негативными нумерациями достаточно сильно отличаются. В [2] мы построили примеры бесконечных нумераций этих типов, у которых данные полугруппы в некотором смысле минимальны.

В настоящей работе мы пытаемся применить противоположный подход и изучать нумерации, которые допускают как минимум все эндоморфизмы, которыми обладают все бесконечные нумерации. Мы обнаружили, что если эти эндоморфизмы эффективно получаются из некоторых формальных спецификаций, которые фактически появляются как решения класса систем уравнений, то нумерация негативна при условии, что она удовлетворяет некоторому слабому условию на классы ее эквивалентности.

В § 1 мы определяем системы уравнений, используемые в этой работе (E-системы и редуцированные системы), и вводим некоторые обозначения. В § 2 изучаем *плотные нумерации,* эндоморфизмы которых решают все разрешимые E-системы уравнений. Мы также докажем важный тест на плотность. Материал § 3 посвящен эффективно отделимым нумерациям, т. е. таким нумерациям, у которых классы эквивалентности могут быть эффективно отделены. Мы покажем, что эффективно отделимые нумерации эффективно плотны. В § 4 мы обсудим все новые понятия в применении к негативным нумерациям, и в заключительном параграфе докажем главную теорему этой работы.

§ 1. Системы уравнений

В этом параграфе определим системы уравнений, которые мы собираемся изучать. Будем использовать некоторые хорошо известные понятия из математической логики (см. [3, 4]).

Для записи наших уравнений и систем уравнений мы будем использовать язык $\mathscr{L}$, содержащий

1) предметные переменные $x_1, x_2, \dots$,

2) переменные $f_1, f_2, \dots$ для унарных функций,

3) константы $c_1, c_2, \dots$, обозначающие элементы.

В нашем языке отсутствуют функциональные символы, а единственное отношение — это равенство $=$.

Будем обозначать множество $\{c_1, c_2, \dots\}$ через C.

Тогда моделями этого языка будут объекты вида

$$\langle A, \mathscr{F}; a_1, a_2, \dots \rangle,$$

где A — множество, $\mathscr{F}$ — семейство функций из A на себя и $a_1, a_2, \dots$ — элементы множества A.

Мы подошли к определению уравнений и систем уравнений.

Определение 1. *Функциональным уравнением* (в дальнейшем просто *уравнением*) называется правильно построенная формула языка $\mathscr{L}$, в которой нет свободного вхождения элементных переменных и ни одна функциональная переменная не связана квантором.

Например,

$$\exists x_1, x_2 (x_1 \neq x_2 \wedge f_1(x_1) = x_2) \ \forall x_1 (f_2(x_1) = c_1) \ \forall x_1 (f_1(f_2((x_1)) = f_2(f_1(x_1))))$$

— (функциональные) уравнения, в то время как

$$\exists f_1 (f_1(c_2) = c_1) \ \forall f_2 (f_2(x_1) \neq x_1)$$

таковыми не являются.

Определение 2. Назовем *простыми* уравнения следующего вида:

1) $f_k(c_i) = c_j$,

2) $c_i = c_j$,
3) $c_i \neq c_j$.

Определение 3. *Класс позитивных формул* — это наименьший класс, содержащий все атомные формулы языка $\mathscr{L}$ и их отрицания и замкнутый относительно конъюнкции, дизъюнкции и экзистенциальной квантификации по элементам. *Позитивное уравнение* — это позитивная формула, которая является также уравнением.

Например,

$$\exists x_1, x_2(x_1 \neq x_2 \wedge f_1(x_1) = x_2)\ f(c_1) = c_2 \vee f(c_2) \neq c_1$$

— позитивные уравнения, а

$$\forall x_1(f_2(x_1) = c_1)\ \forall x_1(f_1(f_2((x_1)) = f_2(f_1(x_1))))$$

таковыми не являются.

Определение 4. *Система уравнений* — это конечное множество уравнений. *Редуцированная система уравнений* — это конечное множество простых уравнений. Конечное множество позитивных уравнений назовем *E-системой уравнений*.

Замечание 1. Ясно, что системы уравнений можно эффективно кодировать натуральными числами (детальные определения можно найти, например, в [5] или [6].) Для дальнейшего зафиксируем какое-нибудь такое кодирование.

Напомним также некоторые обычные обозначения из теории вычислимости. Множество натуральных чисел обозначается как первый бесконечный ординал ω, а n-я вычислимая функция (см. [7]) — через ψ_n.

§ 2. Плотные нумерации

В этом параграфе будет определено понятие решения системы уравнений. Мы дадим определение в теоретико-модельном духе (см. [4]).

Определим важное понятие плотной нумерации. *Плотная нумерация* — это нумерация, эндоморфизмы которой содержатся среди решений всех систем, у которых решение существует (см. [1]). Соответствующее понятие с дополнительными алгоритмическими свойствами будет называться *однородно плотной нумерацией*.

Определение 5. Пусть A — бесконечное множество и $a_1, \dots, a_n, \dots$ — перечисление его элементов. Обозначим через $\mathscr{F}$ множество всех всюду определенных функций из A в себя. Пусть

$$S = S(f_1, \dots, f_m)$$

— система уравнений, у которой свободные (функциональные) переменные содержатся среди $f_1, \dots, f_m$. Будем говорить, что функции $g_1, \dots, g_m \in \mathscr{F}$ являются *решением* S, если они удовлетворяют S при интерпретации констант $c_1, c_2, \dots$ элементами $a_1, a_2, \dots$, т. е.

$$\langle \mathscr{F}; a_1, a_2, \dots \rangle \models S(g_1, \dots, g_m).$$

Определение 6. Пусть $\nu : \omega \to A$ — бесконечная нумерация. Пусть также $\mathscr{F}$ — множество всех всюду определенных функций из A в себя, и пусть $\mathscr{M}$ — множество всех эндоморфизмов ν.

Будем говорить, что нумерация ν *плотна* для класса $\mathfrak{S}$ систем уравнений если существует перечисление без повторений $a_1, \dots, a_n, \dots$ всех элементов из A такое, что

$$\langle A, \mathscr{F}; a_1, a_2, \dots \rangle$$

и

$$\langle A, \mathscr{M}; a_1, a_2, \dots \rangle$$

удовлетворяют тем же самым системам уравнений из $\mathfrak{S}$.

Будем говорить, что нумерация ν *однородно плотна* для класса $\mathfrak{S}$ систем уравнений, если существует нумерация без повторений $a_1, \dots, a_n, \dots$ всего множества A вместе с алгоритмом, который по коду системы $S(f_1, \dots, f_n)$ из $\mathfrak{S}$:

1) определяет, имеет ли S решение (т. е. реализует ли $\langle A, \mathscr{F}; a_1, a_2, \dots \rangle$ множество S),

2) если да, то он выдает индексы $m_1, \dots, m_n$ вычислимых функций такие, что задаваемые ими эндоморфизмы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ нумерации ν являются решением S.

Замечание 2. Очевидно, что если нумерация однородно плотна для класса систем $\mathfrak{S}$, то она и плотна для $\mathfrak{S}$.

Мы собираемся доказать важную лемму, которая является тестом на плотность. Но сначала введем некоторые технические понятия, необходимые для ее доказательства.

Определение. По данному терму t языка $\mathscr{L}$ по индукции определим множество его подтермов $T(t)$:

1) если t — константа или переменная, то

$$T(t) = \{t\};$$

2) если t равно $f_i(s)$, где s — терм, то

$$T(t) = \{t\} \cup T(s).$$

Множество всех подтермов уравнения p (обозначаемое через $T(p)$) также определяется по индукции:

1) если p — атомное уравнение $t_1 = t_2$, то

$$T(p) = T(t_1) \cup T(t_2);$$

2) если p — конъюнкция $q \wedge r$ или дизъюнкция $q \vee r$, то

$$T(p) = T(q) \cup T(r);$$

3) если p имеет вид $\exists x q$, то

$$T(p) = T(q) - \{x\}.$$

Определим для системы уравнений S множество всех термов, входящих в нее, как

$$T(S) = \bigcup_{p \in S} T(p)$$

(заметим, что множество термов, содержащихся в системе, не содержит переменных). Определим также множество релевантных термов, входящих в S, как

$$\widehat{T}(S) = \bigcup_{i < \omega} \widehat{T}_i(S),$$

где $\widehat{T}_i(S) = \{t \in T(S) : f_i(t) \in T(S)\}$ — множество термов, входящих в S, которые релевантны f_i.

Множество переменных, входящих в S, — это

$$V(S) = \{x : \text{существует уравнение } p \in S \text{ такое, что } \exists x \text{ входит в него}\}.$$

Множество констант, входящих в уравнение p, — это

$$C(p) = T(p) \cap C;$$

множество констант, входящих в систему S, — это

$$C(S) = T(S) \cap C.$$

Наконец, определим множество функций, входящих в уравнение p, как

$$F(p) = \{f_i : \text{существует терм } t \text{ такой, что } f_i(t) \in T(p)\}$$

и множество функций, входящих в S, как

$$F(S) = \{f_i : \text{существует терм } t \text{ такой, что } f_i(t) \in T(S)\}.$$

Лемма 1. *Всякая E-система уравнений S может быть эффективно преобразована в конечное семейство редуцированных систем уравнений таких, что для любого бесконечного множества A и любого перечисления $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ множества A без повторений выполнены следующие утверждения:*

1) *любое решение одной из редуцированных систем (при интерпретации c_i как a_i) является также решением исходной системы S;*

2) *если система S имеет решение (при интерпретации c_i как a_i), то как минимум одна из редуцированных систем имеет решение.*

Доказательство леммы состоит из нескольких частей. Сначала мы покажем, как элиминировать $\exists$-кванторы, затем, как элиминировать конъюнкции и дизъюнкции и, наконец, как преобразовывать нетривиальные атомные уравнения.

Зафиксируем бесконечное множество A и произвольное перечисление $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ множества A без повторений.

Первый шаг состоит в том, чтобы переименовать элементные переменные в системе S таким образом, чтобы они все были попарно различны и образовывали начальный сегмент множества $\{x_i : i < \omega\}$. Это можно сделать, поскольку все эти переменные находятся в области действия $\exists$-квантора. Переименуем также функциональные переменные так, чтобы они образовывали начальный сегмент множества $\{f_i : i < \omega\}$ (конечно, это возможно сделать без изменения множества решений системы S).

Пусть $C(S) = \{c_{i_j} : j = 1, \ldots, k\}$ — множество констант, входящих в S, $V(S) = \{x_i : i = 1, \ldots, n\}$ — множество элементных переменных, входящих в S, и пусть $F(S) = \{f_i : i = 1, \ldots, m\}$ будет множеством всех функциональных переменных, входящих в S. С каждым элементом $x_i \in V(S)$ мы свяжем новый символ константы $b_i \notin C$ и константу $d_i = c_{k_i} \in C - C(S)$ такую, что $x_i \neq x_j$ влечет $d_i \neq d_j$.

Рассмотрим систему S^*, полученную из S путем преобразования всех уравнений из S согласно следующим правилам:

1) если t_1 и t_2 — термы, то

$$(t_1 = t_2)^* \to (t_1 = t_2), \quad (t_1 \neq t_2)^* \to (t_1 \neq t_2);$$

2) если p и q — уравнения, то

$$(p \wedge q)^* \to p^* \wedge q^*, \quad (p \vee q)^* \to p^* \vee q^*;$$

3) если p — формула, то

$$(\exists x_i p(x_i))^* \to \bigvee_{j=1}^{i} p^*(d_j) \vee \bigvee_{j=1}^{k} p^*(c_{i_j}).$$

Очевидно, что любое решение S^* является также решением S, и мы покажем, что если S имеет решение, то также и S^* имеет решение.

Чтобы это доказать, рассмотрим систему $\overline{S}$, полученную из S по правилам, приводимым ниже:

1) если t_1 и t_2 — термы, то

$$\overline{t_1 = t_2} \to t_1 = t_2, \quad \overline{t_1 \neq t_2} \to t_1 \neq t_2;$$

2) если p и q — уравнения, то

$$\overline{p \wedge q} \to \overline{p} \wedge \overline{q}, \quad \overline{p \vee q} \to \overline{p} \vee \overline{q};$$

3) если p — формула, то

$$\overline{\exists x_i p(x_i)} \to \overline{p}(b_i).$$

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — решение S. Очевидно, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — решение $\overline{S}$, если мы интерпретируем b_i как один из элементов множества A, скажем e_i, удовлетворяющий уравнению $\exists x_i p(x_i)$ из S (такой элемент существует, поскольку $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — решение S).

Заметим, что если функции $g_1, \ldots, g_m$ заданы, то мы можем вычислить значение $v_{g_1,\ldots,g_m}(t)$ из A любого терма из $t \in T(\overline{S})$ следующим образом:

1) если $t = c_i$, то $v_{g_1,\ldots,g_m}(t) = a_i$;
2) если $t = b_i$, то $v_{g_1,\ldots,g_m}(t) = e_i$;
3) если $t = f_i(t_1)$, то $v_{g_1,\ldots,g_m}(t) = g_i(v_{g_1,\ldots,g_m}(t_1))$.

Теперь $v_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}$ определяет отношение эквивалентности на множестве $T(\overline{S})$:

$$t_1 \equiv t_2 \quad \text{тогда и только тогда, когда } v_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}(t_1) = v_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}(t_2).$$

Обозначим класс терма $t \in T(\overline{S})$ через $[t]$. Также обозначим $D = \{[t] : t \in T(\overline{S})\}$, $\widehat{D}_i = \{[t] : t \in \widehat{T}_i(\overline{S})\}$ для $i = 1, \ldots, m$, $\widehat{D} = \{[t] : t \in \widehat{T}(\overline{S})\}$. Зафиксируем биекцию $r : D \to A$ такую, что

$$r([c_{i_j}]) = a_{i_j} \quad \text{для } j = 1, \ldots, k,$$

$$r([b_i]) = a_{k_i}, \quad \text{если } b_i \not\equiv c_{i_j} \text{ для } j = 1, \ldots, k \text{ и } b_i \equiv b_j \text{ влечет } i \leq j,$$

где $d_i = c_{k_i}$ (остальные значения r не играют никакой роли, поскольку мы имеем дело с биекцией). Такая биекция может быть выбрана, поскольку для различных b_i мы получаем различные d_i, и никакие различные c_i не эквивалентны.

Теперь для каждого $i = 1, \ldots, m$ определим функцию

$$\varphi_i' : A \to A.$$

Покажем, что функции $\varphi_1', \ldots, \varphi_m'$ образуют решение системы S^*. Фактически мы только явно определим значения φ_i' над $r(\widehat{D}_i)$; другие значения нам будут не нужны. Тогда по данным i и $a \in r(\widehat{D}_i)$ выберем $t \in \widehat{T}_i(\overline{S})$ так, чтобы $r([t]) = a$. Так как $t \in \widehat{T}_i(\overline{S})$, имеем $f_i(t) \in T_i(\overline{S})$ и можем определить

$$\varphi_i'(a) = r([f_i(t)]).$$

Это определение корректно, поскольку $r([t_1]) = r([t_2]) = a$ влечет $[t_1] = [t_2]$ (ввиду того, что r взаимно однозначна). Отсюда получим

$$v_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}(f(t_1)) = \varphi_i(v_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}(t_1)) = \varphi_i(v_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}(t_2)) = v_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}(f_i(t_2))$$

и, наконец, $[f_i(t_1)] = [f_i(t_2)]$.

Преобразуем термы над

$$C \cup \{b_i : i = 1, \ldots, n\} \cup \{f_1, \ldots, f_m\}$$

в термы над

$$C \cup \{f_1, \ldots, f_m\}$$

по следующим правилам:

1) если $t = c_{i_j}$, то $t' = c_{i_j}$,
2) если $t = b_i$, то $t' = c_j$, где $r([b_i]) = a_j$,
3) если $t = f_i(t_1)$, то $t' = f_i(t_1')$.

Мы собираемся показать, что для всех $t_1, t_2 \in T(\overline{S})$ справедливо

$$v_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}(t_1) = v_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}(t_2) \iff v_{\varphi_1',\ldots,\varphi_m'}(t_1') = v_{\varphi_1',\ldots,\varphi_m'}(t_2'). \qquad (*)$$

Сначала докажем, что если $t \in T(\overline{S})$, то

$$v_{\varphi_1',\ldots,\varphi_m'}(t') = r([t]).$$

Мы докажем это индукцией по $t \in T(\overline{S})$:

(a) если $t = c_{i_j}$, то $t' = c_{i_j}$, и мы получим

$$v_{\varphi_1',\ldots,\varphi_m'}(t') = a_{i_j} = r([c_{i_j}]);$$

(b) если $t = b_i$, то $t' = c_j$ с $r([b_i]) = a_j$, откуда

$$v_{\varphi_1',\ldots,\varphi_m'}(t') = v_{\varphi_1',\ldots,\varphi_m'}(c_j) = a_j = (r[b_i]));$$

(c) если $t = f_i(t_1)$, то $t' = f_i(t_1')$, и по предположению индукции и определению φ_i' имеем

$$v_{\varphi_1',\ldots,\varphi_m'}(t') = v_{\varphi_1',\ldots,\varphi_m'}(f(t_1')) = \varphi_i'(v_{\varphi_1',\ldots,\varphi_m'}(t_1')) = \varphi_i'(r([t_1])) = r([f_i(t_1)]) = r([t]).$$

Доказательство $(*)$ теперь становится достаточно простым. Поскольку r взаимно однозначно, имеем

$$v_{\varphi_1',\ldots,\varphi_m'}(t_1') = v_{\varphi_1',\ldots,\varphi_m'}(t_2') \iff r([t_1]) = r([t_2]) \iff [t_1] = [t_2] \\ \iff v_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}(t_1) = v_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}(t_2).$$

Рассмотрим теперь следующее преобразование бескванторных формул с термами над $C \cup \{b_i : i = 1, \ldots, n\} \cup \{f_1, \ldots, f_m\}$. Пусть t_1, t_2 — термы над $C \cup \{b_i : i = 1, \ldots, n\}$, и пусть p, q — формулы над $C \cup \{b_i : i = 1, \ldots, n\}$. Тогда

1) $(t_1 = t_2)' \to t_1' = t_2'$,
2) $(t_1 \neq t_2)' \to t_1' \neq t_2'$,
3) $(p \wedge q)' \to p' \wedge q'$,
4) $(p \vee q)' \to p' \vee q'$.

Индукцией получим, что если p — бескванторная формула, у которой все подтермы лежат в $T(\overline{S})$, то $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ удовлетворяет p (при интерпретации b_i как e_i) тогда и только тогда, когда $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_m$ удовлетворяет p'. Тогда поскольку $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — решение $\overline{S}$ (при интерпретации b_i как e_i), получаем, что $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_m$ — решение $\overline{S}'$ (где $\overline{S}'$ получено из $\overline{S}$ преобразованием каждой формулы в соответствии с $'$), ибо все формулы в $\overline{S}$ бескванторные. Ясно, что любое решение $\overline{S}'$ является решением и S^*. Таким образом, доказано, что от каждой системы уравнений S мы можем эффективно перейти к другой системе S^*, в которой все формулы бескванторны и выполнены следующие свойства:

1) если S имеет решение, то и S^* имеет решение;

2) любое решение S^* является одновременно решением S.

В дальнейшем мы используем этот результат еще раз при доказательстве леммы. Но сначала мы рассмотрим конъюнкции и дизъюнкции формул.

Рассмотрим систему уравнений S, не содержащую кванторов. Эффективно найдем конечное множество систем атомных уравнений такое, что все решения этих систем являются также решениями S и по крайней мере одна из них имеет решение в случае, когда S имеет решение. Опишем процедуру получения этого множества.

В данной системе бескванторных уравнений T исследуем первое неатомное уравнение p. Если это конъюнкция $q \wedge r$, то рассмотрим систему $T_0 = T - \{p\} \cup \{q, r\}$, если p — дизъюнкция $q \vee r$, то — системы $T_1 = T - \{p\} \cup \{q\}$ и $T_2 = T - \{p\} \cup \{r\}$. Применяя это преобразование то к одной, то к другой системе (T_0 или T_1 и T_2), получим системы, в которых все формулы атомны. Если выберем $T = S$, то придем к желаемому множеству систем атомных уравнений.

Теперь мы хотим получить систему, содержащую только простые уравнения. Будем рассматривать только такие системы T, в которых все бескванторные уравнения атомны. Возьмем в нем первое непростое атомное уравнение p. Рассмотрим четыре случая:

1) если p имеет вид $c_i = f_l(t)$, то мы заменим его на $f_l(t) = c_i$;

2) если p имеет вид $c_i \neq f_l(t)$, то мы заменим его на $f_l(t) \neq c_i$;

3) если p имеет вид

$$f_{l_1}(f_{l_2}(\cdots(f_{l_n}(c_i))\cdots)) = t,$$

то мы заменим его на

$$\exists x (f_{l_n}(c_i) = x \wedge f_{l_1}(f_{l_2}(\cdots(f_{l_{n-1}}(x))\cdots)) = t);$$

4) если p имеет вид

$$f_{l_1}(f_{l_2}(\cdots(f_{l_n}(c_i))\cdots)) \neq t,$$

то мы заменим его на

$$\exists x \exists y (f_{l_n}(c_i) = x \wedge f_{l_1}(f_{l_2}(\cdots(f_{l_{n-1}}(x))\cdots)) = y \wedge y \neq t).$$

Итерируем этот процесс до тех пор, пока в T не останется непростых атомных формул. Тогда если T содержит формулы с кванторами, то рассмотрим T^* и повторим процесс элиминации конъюнкции и дизъюнкций и затем элиминации непростых атомных формул.

Очевидно, что, начав с S и повторив этот процесс достаточное число раз, получим требуемое множество редуцированных систем. $\square$

Следующая лемма теперь достаточно очевидна.

Лемма 2. *Если нумерация плотна для редуцированных систем, то она также плотна и для E-систем. Если она однородно плотна для редуцированных систем, то она также однородно плотна для E-систем.*

§ 3. Отделимые нумерации

Любая нумерация $\nu : \omega \to A$ индуцирует следующую эквивалентность на множестве натуральных чисел:

$$x \equiv_\nu y \iff \nu(x) = \nu(y).$$

Ее классы эквивалентности — это множества натуральных чисел, которые нумеруют один и тот же элемент из A. В этом параграфе мы изучаем нумерации, у которых классы эквивалентности имеют некоторые свойства рекурсивной отделимости и плотности относительно E-систем уравнений (в [7] можно познакомиться с обычными понятиями рекурсивной отделимости и неотделимости).

Определение 7. Пусть $\nu : \omega \to A$ — бесконечная нумерация. Будем говорить, что элементы $a, b \in A$ *эффективно отделимы*, если существуют вычислимо перечислимые множества B_1 и B_2 такие, что

1) $\nu^{-1}(a) \subseteq B_1$;
2) $\nu^{-1}(b) \subseteq B_2$;
3) множества B_1 и B_2 не пересекаются.

Определение 8. Пусть $\nu : \omega \to A$ — бесконечная нумерация. Будем говорить, что ν *эффективно отделима*, если существуют перечисление без повторений $a_1, \dots, a_n, \dots$ всех элементов множества A и алгоритм, который по различным номерам $i_1, \dots, i_n$ выдает индексы $m_1, \dots, m_n$ вычислимо перечислимых множеств такие, что

1) каждое W_{m_i} является объединением классов эквивалентности нумерации ν;
2) $\nu^{-1}(a_{i_j}) \subseteq W_{m_j}$ для $j = 1, \dots, n$;
3) $W_{m_i} \cap W_{m_j} = \varnothing$, если $i \neq j$;
4) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_{m_i} = \omega$,

а также существует алгоритм, который по данному номеру i выдает x_i такое, что $\nu(x_i) = a_i$.

Лемма 3. *Каждая эффективно отделимая нумерация однородно плотна для E-систем.*

Пусть $\nu : \omega \to A$ — бесконечная нумерация. Пусть $a_1, \dots, a_n, \dots$ — перечисление без повторений всех элементов множества A, с которым ν эффективно отделима.

Достаточно доказать, что ν однородно плотна для редуцированных систем (см. лемму 2).

Пусть S — редуцированная система. Ясно, что S имеет решение тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям:

1) $f_n(c_i) = c_j, f_n(c_i) = c_k \in S$ влечет $j = k$;
2) $c_i = c_j \in S$ влечет $i = j$;
3) $c_i \neq c_j \in S$ влечет $i \neq j$,

и эти условия могут быть эффективно проверены. Поэтому предположим, что S имеет решение. Покажем, как вычислять индексы функций, индуцирующих эндоморфизмы, составляющие решение для S.

Мы можем считать, что

$$F(S) = \{f_1, \dots, f_n\}$$

(если это не так, то просто переименуем функциональные переменные, что не изменит множества S). Определим для $1 \le i \le m$ множества

$$B_i = \{k < \omega : \exists j < \omega\ (f_i(c_k) = c_j) \in S\},$$

которые, очевидно, конечны. Обозначим

$$B_i = \{j^i_1, \dots, j^i_{n_i}\}.$$

Поскольку ν эффективно отделима, можно для каждого $1 \le i \le m$ найти разбиение $\{A^i_1, \dots, A^i_{n_i}\}$ множества ω на вычислимые множества такие, что каждое A^i_k является объединением классов эквивалентности и

$$\nu^{-1}(a_{j^i_k}) \subseteq A^i_k$$

для $k = 1, \dots, n_i$. Мы можем также для любого натурального числа k эффективно найти элемент $b_k < \omega$ такой, что $\nu(b_k) = a_k$. Теперь для $1 \le i \le m$ определим функции

$$h_i(x) = \begin{cases} b_{k_{j^i_1}}, & \text{если } x \in A^i_1 \text{ и } (f_i(a_{j^i_1}) = a_{k_{j^i_1}}) \in S, \\ \vdots & \\ b_{k_{j^i_{n_i}}}, & \text{если } x \in A^i_{n_i} \text{ и } (f_i(a_{j^i_{n_i}}) = a_{k_{j^i_{n_i}}}) \in S, \end{cases}$$

которые, как легко видеть, всегда определены и вычислимы.

Поскольку каждое A^i_k является объединением классов эквивалентности, каждое h_i индуцирует эндоморфизм φ_i нумерации ν. Легко проверяется, что $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ является решением S. $\square$

§ 4. Негативные нумерации

Нумерации, у которых множество

$$\{\langle x, y\rangle : \nu(x) \ne \nu(y)\}$$

вычислимо перечислимо, называются *негативными* и представляют особый интерес для теории нумераций (см. [1]). В этом параграфе мы покажем, что каждая негативная нумерация эффективно отделима и, следовательно, однородно плотна для E-систем.

Лемма 4. *Все бесконечные негативные нумерации эффективно отделимы.*

Доказательство. Пусть $\nu : \omega \to A$ — бесконечная негативная нумерация. Мы знаем, что она имеет бесконечное вычислимо перечислимое множество B представителей всех классов эквивалентности (см. [1]), т. е. для каждого $a \in A$ существует ровно одно $b \in B$ такое, что $\nu(b) = a$. Тогда существует всюду определенная вычислимая функция f, которая нумерует множество B без повторений. Пусть $a_i = \nu(f(i))$. Заметим, что тем самым мы обеспечиваем выполнение третьего условия эффективной отделимости для нумерации.

Пусть $i_1, \dots, i_n$ — различные натуральные числа. Мы собираемся построить разбиение ω на рекурсивные множества $A_1, \dots, A_n$. Будем перечислять их по шагам.

Шаг 0. $A^0_j = \{f(i_j)\}$ для $j = 1, \dots, n$.

Шаг t. Если t уже перечислено в одно из множеств A_j, то определим $A^{t+1}_i = A^t_i$ для всех $i = 1, \dots, n$ и перейдем к шагу $t + 1$. Если нет, перечисляем натуральные числа, не эквивалентные t, до тех пор, пока не найдем такое j, что $\nu(t) \neq \nu(x)$ для всех $x \in A_k^t$ с $k \neq j$, и положим

$$A_j^{t+1} = A_j^t \cup \{t\}$$

и $A_k^{t+1} = A_k^t$ для $k \neq j$.

Определим $A_i = \bigcup\limits_{k<\omega} A_i^k$. Ясно, что

1) каждое A_i вычислимо и является объединением классов эквивалентности;

2) $\nu^{-1}(a_{i_j}) \subseteq A_j$ для $j = 1, \dots, n$;

3) $A_i \cap A_j = \varnothing$, если $i \neq j$;

4) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \omega$,

тем самым эта нумерация эффективно отделима. □

Лемма 5. *Бесконечные негативные нумерации однородно плотны для E-систем.*

Доказательство следует из предыдущей леммы и леммы 3. □

Теперь можно дать альтернативное и более простое доказательство одного результата из [1].

Следствие. *Всякая негативная нумерация имеет нетривиальные морфизмы.*

Доказательство. Очевидно, что существуют разрешимые E-системы, решения которых нетривиальны, и любая негативная бесконечная нумерация плотна для таких систем. □

§ 5. Теорема об эквивалентности

Здесь покажем, что понятия, введенные в предыдущих параграфах, могут быть использованы для характеризации негативных нумераций.

Теорема 1. *Пусть $\nu : \omega \to A$ — бесконечная нумерация. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *нумерация ν негативна;*

(2) *нумерация ν эффективно отделима;*

(3) *нумерация ν однородно плотна для E-систем и имеет два эффективно отделимых элемента.*

Доказательство. Нужно только доказать, что (3) влечет (1) (см. леммы 3 и 4).

Пусть $d_1, d_2 \in A$ — два отделимых элемента, и пусть $D_1, D_2 \subseteq \omega$ — вычислимо перечислимые множества такие, что $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ и $\nu^{-1}(d_1) \subseteq D_1$, $\nu^{-1}(d_2) \subseteq D_2$. Рассмотрим семейство редуцированных систем

$$S_{i,j} = \begin{cases} f(c_i) = e_1, \\ f(c_j) = e_2, \end{cases}$$

где e_1, e_2 — константы из C, интерпретированные как d_1, d_2.

Ясно, что $S_{i,j}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $i \neq j$. Поэтому ввиду однородной плотности ν в случае $i \neq j$ система $S_{i,j}$ имеет решение $\varphi_{i,j}$, которое является эндоморфизмом ν. Фактически существует вычислимая функция g двух переменных такая, что если $i \neq j$, то $g(i,j)$ — индекс всюду определенной вычислимой функции, которая поддерживает $\varphi_{i,j}$.

Перечисляем множество

$$E = \{\langle x, y\rangle : \nu(x) \neq \nu(y)\}$$

следующим образом. Одновременно перечисляем D_1,D_2 и графики вычислимых функций $\psi_{g(i,j)}$ для $i \neq j$. В случае, когда мы встретим элемент x такой, что $\psi_{g(i,j)}(x) \in D_1$, и элемент y такой, что $\psi_{g(i,j)}(y) \in D_2$ для некоторого $i \neq j$, то добавляем (x, y) к E.

Легко видеть, что мы перечисляем в E пары элементов, которые неэквивалентны относительно ν (поскольку $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ и $\nu^{-1}(d_1) \subseteq D_1$, $\nu^{-1}(d_2) \subseteq D_2$ и функции $\psi_{g(i,j)}$ поддерживают морфизмы). Более того, если $\nu(x) \neq \nu(y)$, то существует $i \neq j$ такой, что $\nu(x) = a_i$ и $\nu(y) = a_j$. Тогда $\psi_{g(i,j)}(x) \in D_1$ и $\psi_{g(i,j)}(y) \in D_2$, поэтому (x, y) будет перечислено в E. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ershov Yu. L.* Theory of numberings. M.: Наука, 1977.
2. *Combarro E. F.* On the endomorphisms of positive and negative numberings // Siberian Adv. in Math. 2001. V. 11, N 1. P. 34–44.
3. *Hamilton A. G.* Logic for Mathematicians. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978.
4. *Chang C. C., Keisler H. J.* Model Theory. Amsterdam; London; New York: Elsevier, 1998.
5. *Cutland N. J.* Computability. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
6. *Odifreddi P.* Classical recursion theory. Amsterdam; New York; Oxford; Tokio: Noth Holland, 1989. V. 1.
7. *Rogers R.* Theory of recursive functions and effective computability. New York; St. Louis; San Francisco; Toronto; London; Sydney: McGraw-Hill, 1967.

Статья поступила 18 июня 2001 г.

Elías Fernández-Combarro Álvarez
Department of Computer Science, University of Oviedo (Spain)
elias@aic.uniovi.es