Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 517.958

ПРИМЕР ОТСУТСТВИЯ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В. Г. Романов

Аннотация: Приводится пример обратной задачи для гиперболического уравнения, решение которой существует и единственно в малом, но не существует глобально.

Ключевые слова: обратная задача, гиперболическое уравнение, существование, единственность.

В теории обратных задач для линейных уравнений и систем гиперболического типа, связанных с определением коэффициентов этих уравнений, зависящих от одной переменной, имеется немало теорем однозначной локальной разрешимости задачи, а также единственности решения в целом при условии, что оно существует (см., например, книги [1, 2]). При этом типична ситуация, когда построенное на некотором конечном отрезке решение обратной задачи можно продолжить на некоторый больший отрезок. Возникает естественный вопрос: можно ли продолжить это решение на наперед заданный интервал? Ниже мы показываем, что ответ на этот вопрос отрицательный. Даже при гладких данных задачи решение обратной задачи может не существовать на любом наперед заданном интервале. Связано это явление с нелинейностью задачи. Ранее гипотеза о возможном отсутствии глобального решения обратной задачи высказывалась С. И. Кабанихиным.

Пусть $u(x,t)$ — решение следующей начально-краевой задачи:

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0, \quad x > 0,\ t > 0; \quad u|_{x=0} = f(t)\theta(t), \quad u|_{t<0} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\theta(t)$ — функция Хевисайда: $\theta(t) = 1$ для $t \geq 0$ и $\theta(t) = 0$ для $t < 0$.

Известно, что решение этой задачи обращается в нуль при $t < x$ и задание функции $f(t)$ на отрезке $[0,T]$, а функции $q(x)$ на $[0,T/2]$ однозначно определяет решение в области $\Delta(T) := \{(x,t) \mid 0 \leq x \leq T/2,\ 0 \leq t \leq T - x\}$ при любом $T > 0$. Гладкость решения определяется гладкостью функций $f(t)$ и $q(x)$, а также значениями функции $f(t)$ и ее производных при $t = 0$. В частности, если $f(0) \neq 0$, то решение разрывно вдоль характеристики $t = x$.

Рассмотрим *обратную задачу*: при заданной функции $f(t)$ на $[0,T]$ и заданном следе производной по x решения задачи (1) на $\{(x,t) \mid x = 0, 0 < t \leq T\}$:

$$u_x|_{x=0} = g(t), \quad t \in (0,T], \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00818).

найти $q(x)$ на $[0, T/2]$.

Определение. *Решением обратной задачи* будем называть такую функцию $q(x)$, что соответствующее ей решение задачи (1) удовлетворяет условию (2).

Приведем типичную теорему однозначной локальной разрешимости для задачи (1), (2). Доказательство ее может быть легко выполнено по схеме, изложенной в [1], и здесь не приводится.

Теорема 1. *Если для некоторого $T > 0$ функции $f(t)$, $g(t)$ удовлетворяют одному из следующих условий:*

1) $f(0) \neq 0$, $f(t) \in \mathbf{C}^2[0,T]$, $g(t) \in \mathbf{C}^1[0,T]$, $g(+0) = -f'(0)$;
2) $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$, $f^{(k)}(0) \neq 0$, $f(t) \in \mathbf{C}^{k+2}[0,T]$, $g(t) \in \mathbf{C}^{k+1}[0,T]$, $g^{(k)}(+0) = -f^{(k+1)}(0)$,

в которых $k \geq 1$ — целое число, то найдется такое положительное $T_0 \leq T$, что в классе функций $q(x) \in \mathbf{C}[0, T_0/2]$ решение обратной задачи (1), (2) *существует и единственно. Более того, если решение задачи существует в $\mathbf{C}[0, T/2]$, то оно в этом классе единственно.*

Сформулируем теперь в виде теоремы пример, показывающий, что решение обратной задачи на наперед заданном интервале может не существовать.

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1), (2) *функции $f(t)$, $g(t)$ определены равенствами*

$$f(t) = \frac{t^k}{k!} - \frac{\lambda t^{k+1}}{(k+1)!}, \quad g(t) = \frac{\lambda t^k}{k!} - \frac{\lambda^2 t^{k+1}}{(k+1)!} - \begin{cases} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, & k \geq 1, \\ 0, & k = 0, \end{cases} \tag{3}$$

в которых k — целое неотрицательное число, а λ — произвольная положительная постоянная. Тогда решение обратной задачи (1), (2) *в классе функций $q(x) \in \mathbf{C}[0, T/2]$ существует и единственно, если $T < 2/\lambda$, и не существует, если $T > 2/\lambda$.*

Доказательство. Будем искать решение задачи (1), (2) в виде

$$u(x,t) = \left(\frac{(t-x)^k}{k!} + \varphi(x) \frac{(t-x)^{k+1}}{(k+1)!} \right) \theta(t-x). \tag{4}$$

При этом начальные условия выполнены. Непосредственные вычисления показывают, что решение дифференциального уравнения (1) в виде (4) существует тогда и только тогда, когда выполняются следующие два равенства:

$$q(x) = -2\varphi'(x), \quad \varphi''(x) = q(x)\varphi(x). \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что при любом $\lambda > 0$ оба эти равенства выполнены, если

$$q(x) = 2\lambda^2(1 - x\lambda)^{-2}, \quad \varphi(x) = -\lambda(1 - x\lambda)^{-1}. \tag{6}$$

В то же время при таком выборе функций $q(x)$ и $\varphi(x)$ выполняется граничное условие в (1) и справедливо равенство (2). Следовательно, функция $q(x) = 2\lambda^2(1 - x\lambda)^{-2}$ является решением обратной задачи и принадлежит $\mathbf{C}[0, T/2]$ при любом $T < 2/\lambda$. В силу теоремы 1 это решение единственно в указанном классе. Отвечающее этой функции $q(x)$ решение задачи (1) в области $\Delta(T)$ дается формулой (4), в которой функция $\varphi(x)$ определяется формулой (6). Это решение является кусочно-гладким при $k = 0$, а при $k \geq 1$ принадлежит функциональному классу $\mathbf{C}^{k-1}(\Delta(T))$. При $T \to 2/\lambda$ решение обратной задачи неограниченно возрастает в окрестности точки $x = T/2$, и поэтому оно не существует в классе $\mathbf{C}[0, T/2]$ при любом $T > 2/\lambda$. $\square$

Замечание. С помощью того же набора (4), (6) функций $u(x,t)$, $\varphi(x)$, $q(x)$ легко построить пример отсутствия глобального решения обратной задачи для случая, когда в прямой задаче (1) задается более общее граничное условие, а именно линейная комбинация функции $u(x,t)$ и ее производной по x, а в качестве информации задается на множестве $\{(x,t) \mid x = 0,\ 0 < t \le T\}$ другая линейная комбинация этой функции и ее производной по x, линейно независимая с первой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
2. *Белишев М. И., Благовещенский А. С.* Динамические обратные задачи теории волн. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1999.

Статья поступила 16 июня 2003 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru