Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 510.67

НЕСУЩЕСТВЕННЫЕ СОВМЕЩЕНИЯ И РАСКРАСКИ МОДЕЛЕЙ

С. В. Судоплатов

Аннотация: Определяются операции несущественного и почти несущественного совмещения моделей, а также теорий. Устанавливается базируемость (почти) несущественного совмещения теорий, а также сохранение свойств малости и λ-стабильности при переходе к (почти) несущественным совмещениям теорий. Определяются понятия раскраски модели, цветной модели, а также цветной теории и переносятся утверждения о совмещениях на случай раскраски. Дается характеризация несущественности раскраски полигонометрии.

Ключевые слова: несущественное совмещение моделей, несущественное совмещение теорий, цветная модель, цветная теория.

В настоящей работе (§ 1) определяются операции несущественного и почти несущественного совмещения моделей, а также теорий. Устанавливаются базируемость (почти) несущественного совмещения теорий (теоремы 1.6 и 1.7), а также сохранение свойств *малости* (т. е. счетности числа всех типов над $\varnothing$) и λ-стабильности при переходе к (почти) несущественным совмещениям теорий (теорема 1.8). Приводится достаточное условие несущественности совмещения теорий при несущественности совмещения их моделей (предложение 1.9).

В § 2 определяются понятия раскраски модели, цветной модели и цветной теории. Отмечается, что цветные модели и теории являются частными случаями совмещений, и переносятся результаты § 1 для (почти) несущественных раскрасок (теоремы 2.2 и 2.3). Приводится пример, показывающий, что несущественность раскраски модели не влечет несущественность раскраски соответствующей теории, а также пример, демонстрирующий отделимость класса теорий с почти несущественными раскрасками от класса теорий с несущественными раскрасками.

В § 3 рассматриваются раскраски полигонометрий и приводится характеризация их несущественности. На основе этой характеризации дается описание структуры цветной линии полигонометрии при несущественной раскраске последней.

В § 1, 2 без пояснений используются стандартные теоретико-модельные понятия и обозначения из [1], а в § 3 — терминология из [2].

Через $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$, … (возможно, с индексами) будут обозначаться бесконечные модели элементарных теорий, через M, N, … — их соответствующие носители. Через $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a})$ будет обозначаться тип кортежа $\bar{a}$ в модели $\mathscr{M}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00571, 02–01–00258).

§ 1. Совмещения моделей и теорий

Напомним [3], что теория T называется Δ-*базируемой*, где Δ — некоторое множество формул без параметров, если любая формула теории T эквивалентна в T некоторой булевой комбинации формул из Δ.

Теория T называется *почти* Δ-*базируемой*, где Δ — некоторое множество формул без параметров, если существует функция $f : \omega \to \omega$ такая, что любая формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ теории T эквивалентна в T формуле вида $\exists y_1 \ldots \exists y_{f(n)} \psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{f(n)})$, где $\psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{f(n)})$ — булева комбинация формул из Δ.

Аналогично [4] будем говорить, что тип $q(\bar{x}) \in {}^{\subseteq}S(A)$ *изолируется* или *определяется* множеством $\Phi(\bar{x}, A)$ формул из q, если $\Phi(\bar{x}, A) \vdash q(\bar{x})$.

Доказательство следующих двух утверждений очевидно.

Лемма 1.1. *Если тип* $q(\bar{x}) \in {}^{\subseteq}S(A)$ *изолируется множеством* $\Phi(\bar{x}, A)$, *а тип* $\Phi(\bar{x}, A)$ *изолируется множеством* $\Psi(\bar{x}, A)$, *то* $q(\bar{x})$ *изолируется множеством* $\Psi(\bar{x}, A)$.

Лемма 1.2. *Если* $\models \Phi(\bar{a}, \bar{b})$, *то тип* $\mathrm{tp}(\bar{a} \,\hat{}\, \bar{b})$ *изолируется множеством* $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ *тогда и только тогда, когда тип* $\mathrm{tp}(\bar{a})$ *изолируется множеством*

$$\Big\{\exists \bar{y}\Big(\bigwedge_i \varphi_i(\bar{x}, \bar{y})\Big) \mid \varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \in \Phi(\bar{x}, \bar{y})\Big\}.$$

Напомним, что модель $\mathscr{M}$ называется *слабо* ω-*универсальной*, если в $\mathscr{M}$ реализуется любой тип над пустым множеством теории $\mathrm{Th}(\mathscr{M})$:

$$\mathscr{M} \models S(\varnothing).$$

Пусть Δ — некоторое множество формул теории T, $p(\bar{x})$ — тип теории T, лежащий в $S(\varnothing)$. Тип $p(\bar{x})$ называется Δ-*базируемым*, если $p(\bar{x})$ изолируется некоторым множеством формул $\varphi^\delta \in p$, где $\varphi \in \Delta$, $\delta \in \{0, 1\}$.

Из теоремы компактности и [3, лемма 2.1,*б*] вытекает

Лемма 1.3. *Теория* T Δ-*базируема тогда и только тогда, когда для любого кортежа* $\bar{a}$ *слабо* ω-*универсальной модели теории* T *тип* $\mathrm{tp}(\bar{a})$ Δ-*базируем.*

Лемма 1.4. *Теория* T *почти* Δ-*базируема тогда и только тогда, когда для любого кортежа* $\bar{a}$ *слабо* ω-*универсальной модели* $\mathscr{M}$ *теории* T *найдется кортеж* $\bar{b} \in M$, *содержащий все координаты кортежа* $\bar{a}$ *и такой, что тип* $\mathrm{tp}(\bar{b})$ Δ-*базируем.*

Доказательство. Предположим, что теория T почти Δ-базируема и $\bar{a}$ — кортеж из слабо ω-универсальной модели $\mathscr{M}$ теории T. По условию тип $\mathrm{tp}(\bar{a})$ изолируется некоторым множеством $\big\{\exists \bar{y}\big(\bigwedge_i \varphi_i(\bar{x}, \bar{y})\big) \mid \varphi_i^{\delta_i}(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta\big\}$. Тогда по теореме компактности и слабой ω-универсальности модели $\mathscr{M}$ найдется кортеж $\bar{b} \in M$, расширяющий кортеж $\bar{a}$ и удовлетворяющий всем формулам $\varphi_i^{\delta_i}(\bar{x}, \bar{y})$. В силу леммы 1.2 получаем Δ-базируемость типа $\mathrm{tp}(\bar{b})$.

Предположим теперь, что для любого кортежа $\bar{a}$ слабо ω-универсальной модели $\mathscr{M}$ теории T найдется кортеж $\bar{b} \in M$, расширяющий кортеж $\bar{a}$ и такой, что тип $\mathrm{tp}(\bar{b})$ Δ-базируем. Тогда по теореме компактности найдется функция $f : \omega \to \omega$, ограничивающая минимальные длины кортежей $\bar{b}$ через длины кортежей $\bar{a}$. С другой стороны, по условию каждая совместная формула $\varphi(\bar{x})$ выводится из некоторой формулы вида $\exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$, где $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ — конъюнкция формул и отрицаний формул из Δ, $l(\bar{y}) \le f(l(\bar{x}))$. По теореме компактности получаем, что формула $\varphi(\bar{x})$ эквивалентна дизъюнкции формул вида $\exists\bar{y}\psi(\bar{x},\bar{y})$, а значит, и формуле вида $\exists\bar{y}\psi(\bar{x},\bar{y})$, где $\psi(\bar{x},\bar{y})$ — булева комбинация формул из Δ. Таким образом, теория T почти Δ-базируема. $\square$

Пусть $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ — модели некоторых непересекающихся сигнатур Σ_1 и Σ_2 соответственно такие, что $M_1 = M_2$. Модель $\mathscr{M}$ сигнатуры $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ называется *совмещением моделей* $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$, если $M = M_1$ и интерпретации сигнатурных символов модели $\mathscr{M}$ совпадают с соответствующими интерпретациями в моделях $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$. В дальнейшем модель $\mathscr{M}$ будем обозначать через $\mathrm{Comb}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)$.

Теория T называется *совмещением теорий* T_1 и T_2 над моделями $\mathscr{M}_i \models T_i$, $i = 1,2$, если $T = \mathrm{Th}(\mathrm{Comb}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2))$.

Пусть $\bar{a}$ — кортеж из модели $\mathrm{Comb}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)$. Тип $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a})$ называется *несущественным совмещением типов* $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}_1}(\bar{a})$ и $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}_2}(\bar{a})$, если $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a})$ изолируется множеством $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}_1}(\bar{a}) \cup \mathrm{tp}_{\mathscr{M}_2}(\bar{a})$. Множество кортежей $\bar{a} \in M$, для которых тип $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a})$ является несущественным совмещением типов $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}_1}(\bar{a})$ и $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}_2}(\bar{a})$, обозначим через $\mathrm{IECT}_{\mathscr{M}}$.

Совмещение моделей $\mathscr{M} = \mathrm{Comb}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)$ называется *несущественным* (обозначается через $\mathscr{M} = \mathrm{IEC}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)$), если $\mathrm{IECT}_{\mathscr{M}}$ состоит из всех кортежей модели $\mathscr{M}$. Совмещение моделей $\mathscr{M} = \mathrm{Comb}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)$ называется *почти несущественным* (обозначается через $\mathscr{M} = \mathrm{AIEC}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)$), если для любого кортежа $\bar{a} \in M$ существует кортеж $\bar{b} \in \mathrm{IECT}_{\mathscr{M}}$, расширяющий кортеж $\bar{a}$.

Совмещение T теорий T_1 и T_2 называется (*почти*) *несущественным*, если для любой модели $\mathscr{M} \models T$ имеет место равенство $\mathscr{M} = \mathrm{IEC}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)$ ($\mathscr{M} = \mathrm{AIEC}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)$), где $\mathscr{M}_i$ — обеднение модели $\mathscr{M}$ до сигнатуры $\Sigma(T_i)$, $i = 1,2$.

Очевидно, что любое несущественное совмещение теорий почти несущественно.

Лемма 1.5. *Пусть T — совмещение теорий T_1 и T_2, $\mathscr{M}$ — слабо ω-универсальная модель теории T. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *совмещение T (почти) несущественно;*

(2) $\mathscr{M} = \mathrm{IEC}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)$ ($\mathscr{M} = \mathrm{AIEC}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)$), *где $\mathscr{M}_i$ — обеднение модели $\mathscr{M}$ до сигнатуры $\Sigma(T_i)$, $i = 1,2$.*

Доказательство очевидно.

Теорема 1.6. *Пусть T — совмещение Δ_i-базируемых теорий T_i, $i = 1,2$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *совмещение T несущественно;*

(2) *теория T $(\Delta_1 \cup \Delta_2)$-базируема.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что T — несущественное совмещение теорий T_1 и T_2, $\mathscr{M}$ — слабо ω-универсальная модель теории T. В силу леммы 1.3 достаточно показать, что для любого кортежа $\bar{a} \in M$ тип $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a})$ $(\Delta_1 \cup \Delta_2)$-базируем. Обозначим через $\mathscr{M}_i$ обеднение модели $\mathscr{M}$ до сигнатуры $\Sigma(T_i)$, $i = 1,2$. Так как по лемме 1.5 выполняется равенство $\mathscr{M} = \mathrm{IEC}(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)$, тип $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a})$ изолируется множеством $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}_1}(\bar{a}) \cup \mathrm{tp}_{\mathscr{M}_2}(\bar{a})$. В силу Δ_i-базируемости теории T_i по лемме 1.3 тип $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}_i}(\bar{a})$ изолируется некоторым множеством $\Phi_i(\bar{x})$ формул и отрицаний формул из Δ_i, $i = 1,2$. Тогда по лемме 1.1 тип $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a})$ изолируется множеством $\Phi_1(\bar{x}) \cup \Phi_2(\bar{x})$. Таким образом, тип $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a})$ $(\Delta_1 \cup \Delta_2)$-базируем.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть T — $(\Delta_1 \cup \Delta_2)$-базируемая теория, т. е. каждый тип $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a})$ кортежа $\bar{a}$ из слабо ω-универсальной модели $\mathscr{M}$ изолируется некото-

рым множеством $\Phi(\bar{x})$ формул и отрицаний формул из $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Так как $\Sigma(T_1) \cap \Sigma(T_2) = \varnothing$, то $\Phi(\bar{x}) = \Phi_1(\bar{x}) \cup \Phi_2(\bar{x})$, где $\Phi_i(\bar{x})$ — множество формул из $\Phi(\bar{x})$ сигнатуры $\Sigma(T_i)$. При этом по лемме 1.3 множество $\Phi_i(\bar{x})$ изолирует тип $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}_i}(\bar{a})$, где $\mathscr{M}_i$ — обеднение модели $\mathscr{M}$ до сигнатуры $\Sigma(T_i)$. Так как $\Phi_i(\bar{x}) \subseteq \mathrm{tp}_{\mathscr{M}_i}(\bar{a})$, множество $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}_1}(\bar{a}) \cup \mathrm{tp}_{\mathscr{M}_2}(\bar{a})$ изолирует тип $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a})$. Поскольку $\mathscr{M}$ — слабо ω-универсальная модель, по лемме 1.5 получаем, что T — несущественное совмещение теорий T_1 и T_2. $\square$

Теорема 1.7. *Пусть T — совмещение Δ_i-базируемых теорий T_i, $i = 1, 2$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *совмещение T почти несущественно;*

(2) *теория T почти $(\Delta_1 \cup \Delta_2)$-базируема.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.6 с использованием леммы 1.4 вместо леммы 1.3. $\square$

Теорема 1.8. *Если T — почти несущественное совмещение теорий T_1 и T_2, то теория T λ-стабильна* (мала) *тогда и только тогда, когда λ-стабильны* (малы) *теории T_1 и T_2.*

Доказательство. Поскольку T_1 и T_2 — обеднения теории T, то λ-стабильность (малость) теории T влечет λ-стабильность (малость) теорий T_1 и T_2.

Предположим, что теории T_1 и T_2 λ-стабильны. Рассмотрим модель $\mathscr{M}$ теории T, имеющую мощность λ, и ее элементарное расширение $\mathscr{M}'$ мощности λ, включающее с каждым кортежем $\bar{a}$ расширяющий его кортеж $\bar{b} \in \mathrm{IECT}_{\mathscr{M}'}$. Через $\mathscr{M}'_i$ обозначим обеднение модели $\mathscr{M}'$ до сигнатуры $\Sigma(T_i)$, $i = 1, 2$. Из λ-стабильности теорий T_i следуют неравенства $|S(M_i)| \leq \lambda$. С другой стороны, из почти несущественности совмещения теорий T_1 и T_2 вытекает, что

$$|S(M)| \leq |S(M')| \leq |S(M'_1)| \cdot |S(M'_2)| \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda.$$

В силу произвольности выбора модели $\mathscr{M}$ теория T λ-стабильна.

Допустим теперь, что теории T_1 и T_2 малы, т. е. $|S(T_1)| = |S(T_2)| = \omega$. Тогда из почти несущественности совмещения теорий T_1 и T_2 получаем, что

$$|S(T)| \leq |S(T_1)| \cdot |S(T_2)| = \omega \cdot \omega = \omega,$$

т. е. теория T также является малой. $\square$

Пусть $p(\bar{x})$ — тип из $S(T)$, $\Phi(\bar{x})$ — изолирующее тип $p(\bar{x})$ множество формул $\varphi_n(\bar{x})$, $n \in \omega$, таких, что $\vdash \varphi_{n+1}(\bar{x}) \to \varphi_n(\bar{x})$. Рассмотрим некоторую модель $\mathscr{M}$ теории T. Последовательность $(\bar{a}_n)_{n\in\omega}$ кортежей из $\mathscr{M}$ называется *определяющей последовательностью* типа $p(\bar{x})$, если $\models \varphi_n(\bar{a}_n)$ для любого $n \in \omega$. Определяющая последовательность типа $p(\bar{x})$ называется *сходящейся в модели* $\mathscr{M}$, если тип $p(\bar{x})$ реализуется в модели $\mathscr{M}$. В противном случае определяющая последовательность называется *расходящейся в модели* $\mathscr{M}$.

Очевидно, что последовательность кортежей может быть определяющей лишь для одного типа. Поэтому можно не указывать тип, к реализациям которого сходится определяющая последовательность.

Если $(\bar{a}_n)_{n\in\omega}$ — сходящаяся в $\mathscr{M}$ определяющая последовательность типа $p(\bar{x})$ и $\mathscr{M} \models p(\bar{a})$, то будем говорить, что $\bar{a}$ есть *предел последовательности* $(\bar{a}_n)_{n\in\omega}$ *в модели* $\mathscr{M}$, и этот факт будем обозначать через $\bar{a} \in (\lim\limits_{n\to\infty} \bar{a}_n)_{\mathscr{M}}$. При этом $(\lim\limits_{n\to\infty} \bar{a}_n)_{\mathscr{M}}$ образует множество $p(\mathscr{M})$ реализаций типа $p(\bar{x})$ в модели $\mathscr{M}$.

Предложение 1.9. *Пусть $\mathscr{M}$ — несущественное совмещение слабо ω-универсальных моделей $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ такое, что любая сходящаяся последовательность $(\bar{a}_n)_{n\in\omega}$ в модели $\mathscr{M}_i$ является сходящейся в модели $\mathscr{M}_{2-i}$, $i = 0, 1$, и при этом*

$$(\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n)_{\mathscr{M}_1} \cap (\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n)_{\mathscr{M}_2} \neq \varnothing.$$

Тогда $\mathscr{M}$ — слабо ω-универсальная модель и $\mathrm{Th}(\mathscr{M})$ — несущественное совмещение теорий $\mathrm{Th}(\mathscr{M}_1)$ и $\mathrm{Th}(\mathscr{M}_2)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный тип $p(\bar{x}) \in S(\varnothing)$ теории $\mathrm{Th}(\mathscr{M})$ и докажем, что $p(\bar{x})$ реализуется в модели $\mathscr{M}$. Действительно, пусть $(\bar{a}_n)_{n\in\omega}$ — определяющая последовательность типа $p(\bar{x})$ в модели $\mathscr{M}$. Тогда последовательность $(\bar{a}_n)_{n\in\omega}$ будет определяющей в моделях $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$. Из слабой ω-универсальности моделей $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ следует сходимость этой последовательности как в $\mathscr{M}_1$, так и в $\mathscr{M}_2$. Более того, из условия вытекает, что найдется кортеж $\bar{a}$ такой, что $\bar{a} \in (\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n)_{\mathscr{M}_1} \cap (\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n)_{\mathscr{M}_2}$. Из несущественности совмещения моделей получаем, что множество $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}_1}(\bar{a}) \cup \mathrm{tp}_{\mathscr{M}_2}(\bar{a})$ изолирует тип $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a})$. Вместе с тем справедливо включение $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}_1}(\bar{a}) \cup \mathrm{tp}_{\mathscr{M}_2}(\bar{a}) \subseteq p(\bar{x})$. Отсюда $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a})$ и кортеж $\bar{a}$ является реализацией типа $p(\bar{x})$ в модели $\mathscr{M}$. Таким образом, $\mathscr{M}$ — слабо ω-универсальная модель.

Несущественность совмещения теорий $\mathrm{Th}(\mathscr{M}_1)$ и $\mathrm{Th}(\mathscr{M}_2)$ получается из слабой ω-универсальности модели $\mathscr{M}$ и леммы 1.5. $\square$

§ 2. Цветные модели

Пусть $\mathscr{M}$ — некоторая модель. *Раскраской модели* $\mathscr{M}$ называется любая функция $\mathrm{Col} : M \to \lambda \cup \{\infty\}$, где λ — некоторый кардинал, ∞ — символ бесконечности. При этом для любого $a \in M$ значение $\mathrm{Col}(a)$ называется *цветом элемента* a. Пара $\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle$ называется *цветной моделью*.

В дальнейшем цветная модель $\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle$ будет отождествляться с обогащением модели $\mathscr{M}$ одноместными предикатами $\mathrm{Col}_\mu = \{a \in M \mid \mathrm{Col}(a) = \mu\}$, $\mu < \lambda$. Очевидно, что цветная модель $\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle$ представляет собой совмещение модели $\mathscr{M}$ с *раскраской* ее *носителя*, т. е. с моделью $\langle M, \mathrm{Col}\rangle = \langle M, \mathrm{Col}_\mu\rangle_{\mu<\lambda}$: $\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle = \mathrm{Comb}(\mathscr{M}, \langle M, \mathrm{Col}\rangle)$.

Раскраска Col модели $\mathscr{M}$ называется *внутренне несущественной*, если для любого кортежа $\bar{a} \in M$ тип $\mathrm{tp}_{\langle \mathscr{M},\mathrm{Col}\rangle}(\bar{a})$ определяется типом кортежа $\bar{a}$ в модели $\mathscr{M}$, а также цветами элементов кортежа $\bar{a}$.

Очевидно, что внутренняя несущественность раскраски Col модели $\mathscr{M}$ равносильна соотношению $\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle = \mathrm{IEC}(\mathscr{M}, \langle M, \mathrm{Col}\rangle)$.

Раскраска Col модели $\mathscr{M}$ называется *внутренне почти несущественной*, если для любого кортежа $\bar{a} \in M$ существует кортеж $\bar{b} \in M$, расширяющий кортеж $\bar{a}$ и такой, что тип $\mathrm{tp}_{\langle \mathscr{M},\mathrm{Col}\rangle}(\bar{b})$ определяется типом кортежа $\bar{b}$ в модели $\mathscr{M}$, а также цветами элементов кортежа $\bar{b}$.

Внутренняя почти несущественность раскраски Col модели $\mathscr{M}$ характеризуется соотношением $\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle = \mathrm{AIEC}(\mathscr{M}, \langle M, \mathrm{Col}\rangle)$.

Для любой модели $\mathscr{M}' \models \mathrm{Th}(\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle)$ естественным образом определяется раскраска $\mathrm{Col}' : M' \to \lambda \cup \{\infty\}$ по следующим правилам:

1) $\mathrm{Col}'(a) = \mu$, если $\mathscr{M}' \models \mathrm{Col}_\mu(a)$;

2) $\mathrm{Col}'(a) = \infty$, если $\mathscr{M}' \not\models \mathrm{Col}_\mu(a)$ для любого $\mu < \lambda$.

В дальнейшем модель $\mathscr{M}'$ будет обозначаться через $\langle \mathscr{M}', \mathrm{Col}'\rangle$, а через $\mathscr{M}'$ будем обозначать обеднение модели $\langle \mathscr{M}', \mathrm{Col}'\rangle$ до сигнатуры $\Sigma(\mathscr{M})$.

Любое обогащение T' теории T попарно несовместными одноместными предикатами Col_μ, $\mu < \lambda$, называется *цветной теорией*. Очевидно, что любая цветная теория является теорией некоторой цветной модели $\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle$, где $\mathscr{M} \models T$.

Раскраска Col модели $\mathscr{M}$ называется (*почти*) *несущественной*, если для любой модели $\langle \mathscr{M}', \mathrm{Col}'\rangle$ цветной теории $\mathrm{Th}(\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle)$ соответствующая раскраска Col' внутренне (почти) несущественна.

Следующий пример показывает, что внутренняя несущественность раскраски модели не влечет несущественность раскраски.

Пример 1. Пусть $\mathscr{M}$ — модель, состоящая из констант $\{c_n^i \mid n \in \omega\}$, $i \in \{0,1,2\}$, и обогащенная подстановкой, действующей по правилам $f(c_n^0) = c_{2n}^2$, $f(c_{2n}^2) = c_n^0$, $f(c_n^1) = c_{2n+1}^2$, $f(c_{2n+1}^2) = c_n^1$, $n \in \omega$. Рассмотрим раскраску $\mathrm{Col} : M \to \{0,1,2\}$, определенную соотношениями $\mathrm{Col}(c_n^i) = i$, $n \in \omega$, $i \in \{0,1,2\}$. Очевидно, любая раскраска модели $\mathscr{M}$ внутренне несущественна, поскольку тип $p(\bar{x})$ любого кортежа $\bar{a} \in M$ изолируется некоторым множеством формул $\{x_j = c_{n_j}^{i_j} \mid 1 \le j \le l(\bar{x})\}$. Вместе с тем раскраска Col' слабо ω-универсальной модели $\langle \mathscr{M}', \mathrm{Col}'\rangle \models \mathrm{Th}(\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle)$ несущественной не является.

Действительно, рассмотрим элементы $a_k \in M'$ такие, что

$$\models \mathrm{Col}_2(a_k) \wedge \neg a_k = c_n^2 \wedge \exists x_k (\mathrm{Col}_k(x_k) \wedge f(x_k) = a_k),$$

$n \in \omega$, $k = 0, 1$. Очевидно, что

$$\mathrm{tp}_{\mathscr{M}'}(a_0) = \mathrm{tp}_{\mathscr{M}'}(a_1), \quad \mathrm{tp}_{\langle M', \mathrm{Col}'\rangle}(a_0) = \mathrm{tp}_{\langle M', \mathrm{Col}'\rangle}(a_1),$$

но $\mathrm{tp}_{\langle \mathscr{M}', \mathrm{Col}'\rangle}(a_0) \ne \mathrm{tp}_{\langle \mathscr{M}', \mathrm{Col}'\rangle}(a_1)$, т. е.

$$\langle \mathscr{M}', \mathrm{Col}'\rangle \ne \mathrm{IEC}(\mathscr{M}', \langle M', \mathrm{Col}'\rangle). \quad \square$$

Примеры внутренне почти несущественных раскрасок, не являющихся внутренне несущественными, легко строятся с помощью следующего утверждения.

Предложение 2.1. *Если в цветной модели $\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle$ существуют кортежи $\bar{a}$, $\bar{b}$ и элементы c, d такие, что $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a} \,\hat{}\, c) = \mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{b} \,\hat{}\, d)$, $\mathrm{tp}_{\langle M, \mathrm{Col}\rangle}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\langle M, \mathrm{Col}\rangle}(\bar{b})$, $c \in \mathrm{dcl}(\bar{a})$, $c \in \mathrm{dcl}(\bar{a})$, но $\mathrm{Col}(c) \ne \mathrm{Col}(d)$, то раскраска* Col *не является внутренне несущественной.*

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{tp}_{\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle}(\bar{a}) \ne \mathrm{tp}_{\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle}(\bar{b})$, поскольку из существования автоморфизма f однородного расширения модели $\langle \mathscr{M}, \mathrm{Col}\rangle$, переводящего $\bar{a}$ в $\bar{b}$, должно следовать $f(c) = d$, что невозможно при $\mathrm{Col}(c) \ne \mathrm{Col}(d)$. Так как $\mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathscr{M}}(\bar{b})$ и $\mathrm{tp}_{\langle M, \mathrm{Col}\rangle}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\langle M, \mathrm{Col}\rangle}(\bar{b})$, то $\bar{a}, \bar{b} \notin \mathrm{IECT}_{\mathscr{M}}$. Таким образом, раскраска Col не является внутренне несущественной. $\square$

Пример 2. Рассмотрим граф $\Gamma = \langle \{a,b,c,d\}, \{(a,b),(b,a),(c,d),\ (d,c)\}\rangle$ и его внутренне почти несущественную раскраску Col, задаваемую равенствами $\mathrm{Col}(a) = \mathrm{Col}(b) = \mathrm{Col}(c) = 0$, $\mathrm{Col}(d) = 1$. Раскраска Col не является внутренне несущественной, поскольку $\mathrm{tp}_\Gamma(a) = \mathrm{tp}_\Gamma(c)$, но $\mathrm{tp}_{\langle \Gamma, \mathrm{Col}\rangle}(a) \ne \mathrm{tp}_{\langle \Gamma, \mathrm{Col}\rangle}(c)$. $\square$

Заметим, что для любой цветной модели $\langle \mathscr{M}', \mathrm{Col}'\rangle$ теория $\mathrm{Th}(\langle M', \mathrm{Col}'\rangle)$ тотально трансцендентна и Δ_{Col}-базируема, где Δ_{Col} — замыкание над подстановками переменных множества $\{x = y\} \cup \{\mathrm{Col}_\mu(x) \mid \mu < \lambda\}$.

На основании теорем 1.6–1.8 справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть* Col — *раскраска модели* $\mathscr{M}$ Δ*-базируемой теории* T. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *раскраска* Col (*почти*) *несущественна;*

(2) *теория* $\mathrm{Th}(\langle\mathscr{M},\mathrm{Col}\rangle)$ (*почти*) $(\Delta\cup\Delta_{\mathrm{Col}})$*-базируема.*

Теорема 2.3. *Если* Col — *почти несущественная раскраска модели* $\mathscr{M}$ *мощности* $|\Sigma(\mathscr{M})|+\omega$, *то теория* $\mathrm{Th}(\langle\mathscr{M},\mathrm{Col}\rangle)$ λ*-стабильна* (*мала*) *тогда и только тогда, когда* λ*-стабильна* (*мала*) *теория* $\mathrm{Th}(\mathscr{M})$.

§ 3. Цветные полигонометрии

Пусть $\mathrm{pm}=\mathrm{pm}(G,\mathscr{P},g_0)$ — бесконечная связная полигонометрия на псевдоплоскости $\mathscr{P}=\langle P,L\in\rangle$. *Раскраской полигонометрии* pm называется любая функция $\mathrm{Col}:P\to\lambda$, где λ — некоторый кардинал. При этом если $p\in P$, то значение $\mathrm{Col}(p)$ называется *цветом точки* p. Пара $\langle\mathrm{pm},\mathrm{Col}\rangle$ называется *цветной полигонометрией*.

Напомним, что полигонометрии pm соответствует простая модель $\mathscr{M}(\mathrm{pm})=\langle P,\{Q_g\mid g\in G\}\rangle$, где $Q_g=\{(p,p')\mid p'=pg$ на некоторой линии$\}$. Естественным образом цветной полигонометрии $\langle\mathrm{pm},\mathrm{Col}\rangle$ ставится в соответствие обогащение $\langle\mathscr{M}(\mathrm{pm}),\mathrm{Col}\rangle$ простой модели $\mathscr{M}(\mathrm{pm})$ одноместными предикатами $\mathrm{Col}_\mu=\{p\mid\mathrm{Col}(p)=\mu\}$, $\mu<\lambda$. При этом модель $\langle\mathscr{M}(\mathrm{pm}),\mathrm{Col}\rangle$ снова является простой.

Раскраска Col полигонометрии pm называется *внутренне несущественной*, если Col — внутренне несущественная раскраска модели $\mathscr{M}(\mathrm{pm})$.

Теорема 3.1. *Пусть* Col — *раскраска не имеющей h.p.-многоугольников связной полигонометрии* $\mathrm{pm}=\mathrm{pm}(G,\mathscr{P},g_0)$ *бесконечной группы* G. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) Col — *внутренне несущественная раскраска;*

(2) *выполняются следующие условия:*

(i) *для любых точек* p_1 *и* p_2 *если* $\mathrm{Col}(p_1)=\mathrm{Col}(p_2)$ *и* S_1 — (p_1,p_1')*-маршрут, то существует точка* p_2' *такая, что некоторый* (p_2,p_2')*-маршрут* S_2 *имеет те же параметры сторон и углов, что и маршрут* S_1, *при этом* $\mathrm{Col}(p_1')=\mathrm{Col}(p_2')$;

(ii) *для любых точек* $p_1,p_2,p_3,p_1',p_2',p_3'$ *если* $p_1\neq p_2$, $\mathrm{Col}(p_1)=\mathrm{Col}(p_1')$, $\mathrm{Col}(p_2)=\mathrm{Col}(p_2')$ *и существуют* (p_1,p_2)*-маршрут* S_1, (p_2,p_3)*-маршрут* S_2, (p_1',p_2')*-маршрут* S_1' *и* (p_2',p_3')*-маршрут* S_2' *такие, что маршруты* $S_1\,\hat{}\,S_2$ *и* $S_1'\,\hat{}\,S_2'$ *имеют одинаковые параметры сторон и углов, то* $\mathrm{Col}(p_3)=\mathrm{Col}(p_3')$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что Col — внутренне несущественная раскраска полигонометрии pm. Покажем, что выполняется условие (i). Рассмотрим произвольные элементы $a,b\in M(\mathrm{pm})$ такие, что $\mathrm{Col}(a)=\mathrm{Col}(b)$, и (a,c)-маршрут S_1 в модели $\mathscr{M}(\mathrm{pm})$. Выберем формулу $\varphi(x,y)$, описывающую параметры сторон и углов маршрута S_1 при подстановке пары (a,c) вместо пары (x,y). Поскольку для элемента a справедливо $\models\exists y(\varphi(a,y)\wedge\mathrm{Col}_{\mathrm{Col}(c)}(y))$, в силу внутренней несущественности раскраски имеем $\models\exists y(\varphi(b,y)\wedge\mathrm{Col}_{\mathrm{Col}(c)}(y))$. Рассмотрим элемент d такой, что $\models\varphi(b,d)\wedge\mathrm{Col}_{\mathrm{Col}(c)}(d)$. Тогда найдется (b,d)-маршрут S_2, имеющий те же параметры сторон и углов, что и маршрут S_1, при этом $\mathrm{Col}(c)=\mathrm{Col}(d)$. Таким образом, раскраска Col удовлетворяет условию (i).

Докажем выполнение условия (ii). Рассмотрим точки $p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3'$ такие, что $p_1 \neq p_2$, $\mathrm{Col}(p_1) = \mathrm{Col}(p_1')$, $\mathrm{Col}(p_2) = \mathrm{Col}(p_2')$ и существуют (p_1, p_2)-маршрут S_1, (p_2, p_3)-маршрут S_2, (p_1', p_2')-маршрут S_1' и (p_2', p_3')-маршрут S_2' такие, что маршруты $S_1 \mathbin{\hat{}} S_2$ и $S_1' \mathbin{\hat{}} S_2'$ имеют одинаковые параметры сторон и углов. Тогда из внутренней несущественности раскраски следует совпадение типов $\mathrm{tp}_{\langle \mathscr{M}(\mathrm{pm}), \mathrm{Col}\rangle}(p_1 \mathbin{\hat{}} p_2)$ и $\mathrm{tp}_{\langle \mathscr{M}(\mathrm{pm}), \mathrm{Col}\rangle}(p_1' \mathbin{\hat{}} p_2')$. Кроме того, из отсутствия h.p.-многоугольников вытекает, что $p_3 \in \mathrm{dcl}\{p_1, p_2\}$ и $p_3' \in \mathrm{dcl}\{p_1, p_2\}$ посредством формул $\varphi(p_1, p_2, z)$ и $\varphi(p_1', p_2', z)$, где $\varphi(x, y, z)$ — формула, описывающая параметры сторон и углов маршрутов $S_1 \mathbin{\hat{}} S_2$ и $S_1' \mathbin{\hat{}} S_2'$. Если $\mathrm{Col}(p_3) = \mu \neq \mathrm{Col}(p_3')$, то $\models \exists z(\varphi(p_1, p_2, z) \wedge \mathrm{Col}_\mu(z))$ и $\models \neg\exists z(\varphi(p_1', p_2', z) \wedge \mathrm{Col}_\mu(z))$, что противоречит равенству $\mathrm{tp}_{\langle \mathscr{M}(\mathrm{pm}), \mathrm{Col}\rangle}(p_1 \mathbin{\hat{}} p_2) = \mathrm{tp}_{\langle \mathscr{M}(\mathrm{pm}), \mathrm{Col}\rangle}(p_1' \mathbin{\hat{}} p_2')$. Таким образом, выполняется $\mathrm{Col}(p_3) = \mathrm{Col}(p_3')$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть Col — раскраска модели $\mathscr{M}(\mathrm{pm})$, удовлетворяющая условиям (i) и (ii), $q(\bar{x})$ — полный тип над пустым множеством кортежа из цветной модели $\langle \mathscr{M}(\mathrm{pm}), \mathrm{Col}\rangle$. Рассмотрим кортежи $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_0, \ldots, b_n)$ из модели $\mathscr{M}(\mathrm{pm})$ такие, что $q(\bar{x}) = \mathrm{tp}_{\mathscr{M}(\mathrm{pm})}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\langle \mathscr{M}(\mathrm{pm})}(\bar{b})$ и $\mathrm{Col}(a_i) = \mathrm{Col}(b_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Покажем, что $\mathrm{tp}_{\langle \mathscr{M}(\mathrm{pm}), \mathrm{Col}\rangle}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\langle \mathscr{M}(\mathrm{pm}), \mathrm{Col}\rangle}(\bar{b})$.

Достаточно рассмотреть случай, когда элементы кортежа $\bar{a}$ попарно различны, и установить существование автоморфизма $f \in \mathrm{Aut}(\langle \mathscr{M}(\mathrm{pm}), \mathrm{Col}\rangle)$ такого, что $f(\bar{a}) = \bar{b}$. Пусть $(a_\mu)_{\mu<\lambda}$ — нумерация элементов модели $\langle \mathscr{M}(\mathrm{pm}), \mathrm{Col}\rangle$ с начальным отрезком $\bar{a}$. Построим последовательность частичных изоморфизмов $(f_\mu)_{n+1 \le \mu < \lambda}$ такую, что $\mathrm{dom}\, f_\mu = \{a_i \mid i < \mu\}$, $f_{n+1}(\bar{a}) = \bar{b}$ и $f_\mu \subset f_\nu$ при $\mu < \nu$. Существование изоморфизма f_{n+1} следует из условия на кортежи $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Предположим, что построены изоморфизмы f_ν для всех $\nu < \mu$. Если μ — предельный ординал, то в качестве частичного изоморфизма f_μ берется $\bigcup\limits_{\nu<\mu} f_\nu$.

Если $n = 0$ и $\mu = 2$, то по п. (i) найдется элемент b_1, удовлетворяющий условию $\mathrm{Col}(b_1) = \mathrm{Col}(a_1)$ и связанный с элементом b_0 маршрутом, имеющим те же параметры сторон и углов, что и некоторый (a_0, a_1)-маршрут. Тогда $f_2 \rightleftharpoons f_1 \cup \{(a_1, b_1)\}$ — частичный изоморфизм, расширяющий частичный изоморфизм f_1.

Допустим теперь, что $\mu = \nu + 1 > 2$. Пусть a_i, a_j — два различных элемента, $i < j < \nu$, S_1 — некоторый (a_i, a_j)-маршрут, S_2 — некоторый (a_j, a_ν)-маршрут, S_1' — $(f(a_i), f(a_j))$-маршрут, имеющий те же параметры сторон и углов, что и маршрут S_1. Рассмотрим $(f(a_j), b_\nu)$-маршрут S_2' такой, что $S_1' \mathbin{\hat{}} S_2'$ имеет те же параметры сторон и углов, что и маршрут $S_1 \mathbin{\hat{}} S_2$. Тогда по условию (ii) отношение $f_\mu \rightleftharpoons f_\nu \cup \{(a_\nu, b_\nu)\}$ образует частичный изоморфизм, расширяющий частичный изоморфизм f_ν. Полагая $f_\lambda \rightleftharpoons \bigcup\limits_{\mu<\lambda} f_\mu$, получаем изоморфное вложение модели $\langle \mathscr{M}(\mathrm{pm}), \mathrm{Col}\rangle$ в себя, которое является наложением в силу минимальности модели $\langle \mathscr{M}(\mathrm{pm}), \mathrm{Col}\rangle$. Таким образом, f_λ — автоморфизм модели $\langle \mathscr{M}(\mathrm{pm}), \mathrm{Col}\rangle$, переводящий кортеж $\bar{a}$ в кортеж $\bar{b}$. В силу произвольности выбора типа $q(\bar{x})$ раскраска Col несущественна. $\square$

Опишем структуру произвольной линии $l = p\uparrow$ простой модели цветной тригонометрии $\langle \mathrm{trm}, \mathrm{Col}\rangle$, где $\mathrm{trm} = \mathrm{trm}(G, \langle P, L, \in\rangle, g_0)$, $\mathrm{Col} : P \to \lambda$ — внутренне несущественная раскраска тригонометрии trm такая, что $\mathrm{Col}_\mu \neq \varnothing$ для любого $\mu < \lambda$.

Как известно, структура любой l линии из L представляет собой *полигон* над группой G, т. е. взаимоопределима с алгеброй одноместных функций

$\langle l, f_g\rangle_{g\in G}$ такой, что для любых $p_1, p_2 \in l$ выполняется

$$f_g(p_1) = p_2 \Leftrightarrow p_2 = p_1 g \quad \text{на линии } l.$$

Зафиксируем линию $l = p\uparrow$ и точку $p_0 \in l$ цвета μ. Обозначим через $G_\mu(p_0)$ множество элементов $g \in G$ таких, что $\mathrm{Col}(p_0 g) = \mu$.

Лемма 3.2. *Множество $G_\mu(p_0)$ образует подгруппу группы G.*

Доказательство. Пусть g_1, g_2 — элементы из $G_\mu(p_0)$. Покажем, что $g_1 \cdot g_2 \in G_\mu(p_0)$. Действительно, тип $q(x, y)$ пары $(p_0, p_0 g_2)$ изолируется формулой $\mathrm{Col}_\mu(x) \wedge \mathrm{Col}_\mu(y) \wedge f_{g_2}(x) = y$. Из существования автоморфизма цветной модели, переводящего p_0 в $p_0 g_1$, следует, что $\mathrm{tp}(p_0 \,\hat{}\, p_0 g_2) = \mathrm{tp}(p_0 g_1 \,\hat{}\, p_0 g_1 g_2)$, т. е.

$$\models \mathrm{Col}_\mu(p_0 g_1) \wedge \mathrm{Col}_\mu(p_0 g_1 g_2) \wedge f_{g_2}(p_0 g_1) = p_0 g_1 g_2.$$

В частности, $\mathrm{Col}(p_0 g_1 g_2) = \mu$ и $g_1 g_2 \in G_\mu(p_0)$. $\square$

Лемма 3.3. *Для любых точек $p_0, p_1 \in l$ цвета μ выполняется $G_\mu(p_0) = G_\mu(p_1)$.*

Доказательство очевидно, поскольку одноцветные элементы связаны автоморфизмом цветной модели. $\square$

Из леммы 3.3 следует, что подгруппа $G_\mu(p_0)$ не зависит от выбора точки p_0 цвета μ. Поэтому в дальнейшем эту подгруппу будем обозначать через G_μ.

Лемма 3.4. *Для любых $\mu, \nu < \lambda$ подгруппы G_μ и G_ν сопряжены.*

Доказательство. Рассмотрим точки p_μ, p_ν цвета μ и ν соответственно, а также элемент $g \in G$ такой, что $p_\nu = p_\mu g$. Покажем, что $g^{-1} G_\mu g = G_\nu$. Действительно, поскольку $p_\mu = p_\nu g^{-1}$, то для любого элемента $g_\mu \in G_m u$ имеем

$$\mathrm{Col}(p_\nu g^{-1} g_\mu g) = \mathrm{Col}(p_\mu g_\mu g) = \mathrm{Col}(p_\mu g) = \mathrm{Col}(p_\nu) = \nu,$$

т. е. $g^{-1} G_\mu g \subseteq G_\nu$. Аналогично устанавливается, что $g G_\nu g^{-1} \subseteq G_\mu$ и, значит, подгруппы G_μ и G_ν сопряжены. $\square$

Из леммы 3.4 следует, что все группы G_μ, $\mu < \lambda$, изоморфны. Любая из указанных групп называется *группой цветопостоянства* линии l и обозначается через $G_{\mathrm{Col}}(l)$ или просто через G_{Col}.

Так как переход от одного цвета к другому осуществляется посредством смежных классов $G_\mu g$ (или $g G_\mu$) и при этом разные смежные классы соответствуют разным цветам, то количество λ различных цветов равно индексу подгруппы G_{Col} в группе G: $|G : G_{\mathrm{Col}}| = \lambda$.

Таким образом, внутренне несущественная раскраска Col на линии l полигонометрии определяется фиксацией точки $p_0 \in l$ и подгруппы $G_{\mathrm{Col}} \leq G$. Перенумеровывая классы смежности $G_{\mathrm{Col}} \cdot g_\mu$, $\mu < \lambda = |G : G_{\mathrm{Col}}|$, получаем раскраску с λ цветами, задаваемую следующим соотношением для точек $p_1 \in l$:

$$\mathrm{Col}(p_1) = \mu \Leftrightarrow p_1 = p_0 g g_\mu \quad \text{для некоторого элемента} \quad g \in G_{\mathrm{Col}}.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность Е. А. Палютину за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Справочная* книга по математической логике. Ч. 1. Теория моделей / Под ред. Дж. Барвайса, Ю. Л. Ершова, Е. А. Палютина, А. Д. Тайманова. М.: Наука, 1982.
2. *Sudoplatov S. V.* Group polygonometries and related algebraic systems // Contributions to General Algebra 11: Proc. of the Olomouc Workshop '98 on General Algebra. Klagenfurt: Verl. Johannes Heyn, 1999. P. 191–210.
3. *Заффе Ю., Палютин Е. А., Старченко С. С.* Модели суперстабильных хорновых теорий // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 3. С. 278–326.
4. *Судоплатов С. В.* Об одной оценке сложности теорий графов // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 700–703.

Статья поступила 24 октября 2001 г.

Судоплатов Сергей Владимирович,
Новосибирский гос. технический университет,
Кафедра алгебры и математической логики,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru, sudoplat@ngs.ru