Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 513.82

О ТИПОВОМ ЧИСЛЕ КОСИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ 6–МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

М. Б. Банару

Аннотация: Исследуются 6-мерные ориентируемые подмногообразия алгебры Кэли, на которых 3-векторные произведения индуцируют эрмитову структуру. Доказано, что типовое число косимплектической гиперповерхности 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли не превосходит трех, а 6-мерное келерово подмногообразие алгебры октав не допускает косимплектических гиперповерхностей с типовым числом, большим единицы.

Ключевые слова: алгебра Кэли, эрмитово многообразие, гиперповерхность, косимплектическая структура, типовое число.

Особенностью геометрии гиперповерхностей почти эрмитова многообразия является наличие на них внутренним образом определенной почти контактной метрической структуры. Такие структуры чаще всего изучались для гиперповерхностей келеровых [1, 2], приближенно келеровых, а также квазикелеровых [3, 4] многообразий. В случае, когда объемлющее многообразие эрмитово, о геометрии его гиперповерхностей известно сравнительно мало.

В настоящей работе приводятся несколько результатов, полученных в этом направлении с использованием структурных уравнений гиперповерхности эрмитова многообразия, записанных на пространстве присоединенной G-структуры. Эти результаты продолжают и развивают предыдущие исследования автора в этой области (см. [5–10] и др.).

Автор выражает сердечную благодарность профессорам М. Трипати (университет Лахнау, Индия) и Х. Курихаре (университет Сэйтама, Япония) за советы по поводу этой статьи. Автор признателен рецензенту за внимательное отношение к работе и ценные замечания.

1. Известно, что один из наиболее содержательных источников примеров почти эрмитовых структур обусловлен существованием 3-векторных произведений на пространстве R^8, несущем структуру алгебры Кэли. Напомним, что понятие r-векторного произведения в n-мерном евклидовом пространстве $\{E, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ введено Б. Экманном [11]: *r-векторным произведением* называется непрерывное отображение

$$P : E^r \to E,$$

обладающее свойствами:

1) $\langle P(X_1, \dots, X_r), X_j\rangle = 0$;

2) $\|P(X_1, \dots, X_r)\|^2 = \det(\langle X_j, X_k\rangle)$,

где $X_1, \dots, X_r \in E$; $k, j = 1, \dots, r$.

В [11, 12] Б. Экманн и Г. Уайтхед средствами алгебраической топологии доказали, что r-векторные произведения существуют только в следующих случаях:

1) n четное, $r = 1$;
2) n — произвольное натуральное число, $r = n - 1$;
3) $n = 7$, $r = 2$;
4) $n = 8$, $r = 3$.

С точки зрения геометрии наибольший интерес представляют r-векторные произведения, являющиеся r-линейными отображениями. Этот случай в предположении псевдоевклидовости метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ изучен американскими математиками Р. Брауном и А. Греем чисто алгебраическими средствами. Оказалось, что в этом случае результат Экманна и Уайтхеда сохраняет силу [13]. Более того, Браун и Грей указали явную конструкцию таких r-векторных произведений. Так, например, $(n-1)$-векторное произведение — это просто тензор типа $(n-1, 1)$, полученный при помощи операции поднятия индекса у элемента объема евклидова пространства. Кроме того, в [14] доказано, что r-векторное произведение в n-мерном евклидовом пространстве индуцирует $(m-n+r)$-векторное произведение в m-мерном его подпространстве. Отметим, что конструкция r-векторных произведений переносится и на случай отображения

$$P : (\aleph(M^{2n}))^r \to \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на четномерном многообразии M^{2n}.

Что касается 3-векторного произведения, то его существование связано с существованием классической структуры алгебры Кэли в 8-мерном евклидовом пространстве. В [13] указаны два неизоморфных 3-векторных произведения в алгебре октав:

$$\begin{aligned} P_1(X,Y,Z) &= -X(\overline{Y}Z) + \langle X,Y\rangle Z + \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,X\rangle Y, \\ P_2(X,Y,Z) &= -(X\overline{Y})Z + \langle X,Y\rangle Z + \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,X\rangle Y, \end{aligned} \tag{1}$$

где $X, Y, Z \in \mathbf{O}$, $\mathbf{O} \equiv R^8$ — алгебра октав, $X \to \overline{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$. Оказалось [14], что при этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из приведенных. Существование же 2-векторного произведения в R^7, установленное Экманном и Уайтхедом, следует из вышеупомянутого результата Брауна и Грея и включения $R^7 \subset R^8 \equiv \mathbf{O}$.

С другой стороны, из названного результата Брауна и Грея следует, что каждое из канонических 3-векторных произведений на любом 6-мерном подмногообразии $M^6 \subset \mathbf{O}$ индуцирует 1-векторное произведение, т. е. почти эрмитову структуру. Подобные почти эрмитовы структуры на 6-мерных подмногообразиях алгебры октав хорошо изучены лишь в случае так называемых структур Калаби. Американский геометр Т. Калаби [15] указал несколько конкретных почти эрмитовых 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли. Структуры Калаби индуцируются 2-векторными произведениями в R^7. Эти произведения, как мы уже напоминали, могут рассматриваться как индуцированные вложением $R^7 \subset R^8$. Таким образом, структуры Калаби — частный случай почти эрмитовых структур, индуцированных на $M^6 \subset \mathbf{O}$. Самые значительные работы, посвященные структурам Калаби на 6-мерных подмногообразиях алгебры октав, на наш взгляд, принадлежат А. Грею [16, 17] и К. Яно и Т. Сумитомо [18].

Об общем случае ориентируемых 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав известно гораздо меньше. Из полученных ранее результатов, несомненно, следует отметить принадлежащую В. Ф. Кириченко полную классификацию приближенно келеровых [19] и келеровых [20] 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли, а также изученное им же $M^6 \subset \mathbf{O}$ с так называемой устойчивой почти эрмитовой структурой [21]. Кроме того, выделим и несколько совсем новых значительных работ [22–24], посвященных, в основном, изучению келеровых и квазикелеровых структур на $M^6 \subset \mathbf{O}$.

Геометрия эрмитовых (т. е. интегрируемых почти эрмитовых) структур на $M^6 \subset \mathbf{O}$ изучалась до сих пор сравнительно мало и только в частных случаях. Здесь можно отметить работу В. Ф. Кириченко [25], где приведена полная классификация локально-симметрических эрмитовых 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли. В этой же работе указан такой изящный пример 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав, как произведение келеровых многообразий C^2 и CH^1, «скрученное» вдоль CH^1. (Здесь через C^2 обозначено двумерное комплексное евклидово пространство, через CH^1 — комплексное гиперболическое пространство).

2. Напомним [26], что *почти эрмитовой* (AH-)*структурой на четномерном многообразии* M^{2n} называется пара $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика. При этом J и g должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle \quad \forall X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Здесь $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (AH-)многообразием. С каждой AH-структурой $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (т. е. 2-формы) F, определяемого равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY\rangle \quad \forall X, Y \in \aleph(M^{2n})$$

и называемого *фундаментальной* (или *келеровой* [27]) *формой структуры.*

Пусть $(M^{2n} \mid \{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\})$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p \in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию в точке p, $\{J_p, g_p = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$. Реперы, адаптированные почти эрмитовой структуре (или A-реперы), устроены следующим образом:

$$(p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}),$$

где ε_a — собственные векторы оператора структуры J_p, отвечающие собственному значению оператора i, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ — собственные векторы оператора J_p, отвечающие собственному значению $-i$. Здесь $i = \sqrt{-1}$; $a = 1, \ldots, n$; $\hat{a} = a + n$. Матрица оператора структуры J_p в точке p в A-репере выглядит так:

$$(J_j^k) = \left(\begin{array}{c|c} iI_n & 0 \\ \hline 0 & -iI_n \end{array}\right),$$

где I_n — единичная матрица порядка n; $k, j = 1, \ldots, 2n$. Непосредственная проверка показывает, что матрицы римановой метрики g и фундаментальной формы F в A-репере примут соответственно вид

$$(g_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right), \quad (F_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & iI_n \\ \hline -iI_n & 0 \end{array}\right).$$

Первая группа структурных уравнений эрмитова многообразия в A-репере имеет вид [26]

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b, \\ d\omega_a &= -\omega^b_a \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\left\{B^{ab}{}_c\right\}$ и $\left\{B_{ab}{}^c\right\}$ — компоненты виртуальных тензоров Кириченко [28].

Пусть $M^6 \subset \mathbf{O}$ — 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли. Тогда каждое из 3-векторных произведений (1) в $\mathbf{O}$ индуцирует на M^6 почти эрмитову структуру $\{J_\alpha, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, определяемую в каждой точке $p \in M^6$ соотношением

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2), \quad \alpha = 1, 2,$$

где $\{e_1, e_2\}$ — произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$ [14]. Как мы уже отмечали, подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется *эрмитовым*, если индуцированная на нем почти эрмитова структура интегрируема. Напомним [19], что точка $p \in M^6$ называется *общей*, если

$$e_0 \notin T_p(M^6),$$

где $e_0 \in \mathbf{O}$ — единица алгебры Кэли. Подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$, состоящее только из общих точек, называется *подмногообразием общего типа* [20]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа.

Ранее установлено [20], что для эрмитовых $M^6 \subset \mathbf{O}$ структурные уравнения (2) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b, \\ d\omega_a &= -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b; \\ d\omega^a_b &= \omega^a_c \wedge \omega^c_b - \left(\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg} D_{hd} D^{gc} + \sum_\varphi T^\varphi_{\hat{a}\hat{c}} T^\varphi_{bd}\right) \omega_c \wedge \omega^d. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon_{abc} = \varepsilon^{123}_{abc}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon^{abc}_{123}$ — компоненты тензора Кронекера порядка три [29];

$$D_{hc} = \pm T^8_{hc} + iT^7_{hc}, \quad D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}} = \pm T^8_{\hat{h}\hat{c}} - iT^7_{\hat{h}\hat{c}},$$

где $\left\{T^\varphi_{kj}\right\}$ — компоненты конфигурационного тензора эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ (в наиболее употребительной терминологии Грея [16, 17], или тензора эйлеровой кривизны [30]). Здесь и далее $\varphi = 7, 8$; $a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3$; $\hat{a} = a + 3$; $k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

3. Пусть N — ориентируемая гиперповерхность эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$, σ — вторая квадратичная форма ее погружения в M^6. Как хорошо известно [3, 31], на N внутренним образом индуцируется почти контактная метрическая структура. Напомним [31], что *почти контактной метрической* *структурой на многообразии* N называется система $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ тензорных полей на этом многообразии, где ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, Φ — поле тензора типа $(1,1)$, g — риманова метрика на N. При этом

$$\eta(\xi) = 1, \quad \Phi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \Phi = 0, \quad \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta,$$
$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y) \quad \forall X, Y \in \aleph(N).$$

Почти контактная метрическая структура называется *косимплектической*, если

$$\nabla \eta = \nabla \Phi = 0$$

(здесь ∇ — риманова связность метрики g). В [32] В. Ф. Кириченко доказал, что всякое косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.

Таким образом, самым простым примером пятимерного косимплектического многообразия может служить $C^2 \times R$, поскольку хорошо известно, что на C^2 индуцируется каноническая келерова структура.

Первая группа структурных уравнений гиперповерхности N эрмитова многообразия M^6 имеет вид [4, 8]

$$\begin{aligned}
d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + \big(\sqrt{2} B^{\alpha 3}{}_\beta + i\sigma^\alpha_\beta\big)\omega^\beta \wedge \omega \\
&\qquad + \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_3 + i\sigma^{\alpha\beta}\Big)\omega_\beta \wedge \omega, \\
d\omega_\alpha &= -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \big(\sqrt{2} B_{\alpha 3}{}^\beta - i\sigma^\beta_\alpha\big)\omega_\beta \wedge \omega \\
&\qquad + \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} B_{\alpha\beta}{}^3 - i\sigma_{\alpha\beta}\Big)\omega^\beta \wedge \omega; \\
d\omega &= \big(\sqrt{2} B^{3\alpha}{}_\beta - \sqrt{2} B_{3\beta}{}^\alpha - 2i\sigma^\alpha_\beta\big)\omega^\beta \wedge \omega_\alpha + \big(B_{3\beta}{}^3 + i\sigma_{3\beta}\big)\omega \wedge \omega^\beta \\
&\qquad + \big(B^{3\beta}{}_3 - i\sigma^\beta_3\big)\omega \wedge \omega_\beta,
\end{aligned} \tag{4}$$

здесь и далее $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$.

Принимая во внимание, что первая группа структурных уравнений косимплектической структуры должна иметь следующий вид [33]:

$$\begin{aligned}
d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta, \\
d\omega_\alpha &= -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta, \\
d\omega &= 0,
\end{aligned}$$

получаем условия, одновременное выполнение которых есть критерий косимплектичности гиперповерхности N:

$$B^{\alpha\beta}{}_\gamma = 0, \tag{5_1}$$
$$\sqrt{2} B^{\alpha 3}{}_\beta + i\sigma^\alpha_\beta = 0, \tag{5_2}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_3 + i\sigma^{\alpha\beta} = 0, \tag{5_3}$$
$$\sqrt{2} B^{3\alpha}{}_\beta - \sqrt{2} B_{3\beta}{}^\alpha - 2i\sigma^\alpha_\beta = 0, \tag{5_4}$$
$$B^{3\beta}{}_3 - i\sigma^\beta_3 = 0, \tag{5_5}$$

и формулы комплексного сопряжения, запись которых мы опустим.

Лемма 1. *Матрица второй квадратичной формы погружения косимплектической гиперповерхности N в эрмитово подмногообразие общего типа $M^6 \subset \mathbf{O}$ имеет вид*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & iD^{12} & iD^{22} \\ 0 & 0 & 0 & -iD^{11} & -iD^{12} \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ -iD_{12} & -iD_{22} & 0 & 0 & 0 \\ iD_{11} & iD_{12} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Из (5_3) следует, что

$$\sigma^{\alpha\beta} = -\frac{i}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_3.$$

Проальтернируем это соотношение:

$$0 = \sigma^{[\alpha\beta]} = -\frac{i}{\sqrt{2}} B^{[\alpha\beta]}{}_3 = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \big(B^{\alpha\beta}{}_3 - B^{\beta\alpha}{}_3\big) = -\frac{i}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_3.$$

Следовательно, $B^{\alpha\beta}{}_3 = 0$, а значит, и $\sigma^{\alpha\beta} = 0$. Из (5_2) получаем, что $B^{3\alpha}{}_\beta = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sigma^\alpha_\beta$. Подставим в (5_4). В итоге окажется, что

$$\sigma^\alpha_\beta = i\sqrt{2} B_{3\beta}{}^\alpha.$$

Теперь воспользуемся выражением для виртуальных тензоров Кириченко 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли (см. (2), (3)):

$$B^{ab}{}_{\mathrm{c}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc}; \quad B_{ab}{}^c = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc}.$$

Из (5_1) можем извлечь:

$$B^{\alpha\beta}{}_\gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\alpha\beta c} D_{c\gamma} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^{\alpha\beta 3} D_{3\gamma} = 0 \Leftrightarrow D_{3\gamma} = 0.$$

Точно такие же рассуждения применим к условию $B^{\alpha\beta}{}_3 = 0$, полученному выше:

$$B^{\alpha\beta}{}_3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\alpha\beta c} D_{c3} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^{\alpha\beta 3} D_{33} = 0 \Leftrightarrow D_{33} = 0.$$

Итак, $D_{3\gamma} = D_{33} = 0$, т. е.

$$D_{3c} = 0.$$

Из (5_5) получаем

$$\sigma^\beta_3 = \sigma_{3\hat\beta} = -iB^{3\beta}{}_3 = -i\frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{3\beta c} D_{c3} = 0.$$

Следовательно, $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\hat\alpha\hat\beta} = \sigma_{3\beta} = \sigma_{3\hat\beta} = 0$. Вычислим и остальные компоненты второй квадратичной формы σ, используя (5_2):

$$\sigma_{\hat\alpha\beta} = \sigma^\alpha_\beta = i\sqrt{2} B^{\alpha 3}{}_\beta = i\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\alpha 3c} D_{c\beta} = i\varepsilon^{\alpha 3\gamma} D_{\gamma\beta}.$$

Тогда

$$\sigma_{\hat{1}1} = i\varepsilon^{13\gamma} D_{\gamma 1} = i\varepsilon^{132} D_{21} = -iD_{21}, \quad \sigma_{\hat{1}2} = i\varepsilon^{13\gamma} D_{\gamma 2} = i\varepsilon^{132} D_{22} = -iD_{22},$$

$$\sigma_{\hat{2}1} = i\varepsilon^{23\gamma} D_{\gamma 1} = i\varepsilon^{231} D_{11} = iD_{11}, \quad \sigma_{\hat{2}2} = i\varepsilon^{23\gamma} D_{\gamma 2} = i\varepsilon^{231} D_{12} = iD_{12},$$

$$\sigma_{1\hat{1}} = \overline{\sigma_{\hat{1}1}} = iD^{12}, \quad \sigma_{1\hat{2}} = \overline{\sigma_{\hat{1}2}} = iD^{22}, \quad \sigma_{2\hat{1}} = \overline{\sigma_{\hat{2}1}} = -iD^{11}, \quad \sigma_{2\hat{2}} = \overline{\sigma_{\hat{2}2}} = -iD^{12}.$$

Лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. *Для всякого 6-мерного эрмитова (общего типа) подмногообразия алгебры Кэли имеют место тождества*

$$D_{11}D_{22} = (D_{12})^2, \quad D^{11}D^{22} = (D^{12})^2.$$

Доказательство. Продифференцировав внешним образом структурные уравнения (3) 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав, получим такие дифференциальные следствия:

$$\varepsilon^{1\alpha\gamma}D_{\gamma[c}T^8_{b]\alpha} = 0, \tag{6_1}$$

$$\varepsilon^{1\beta\gamma}D_{\gamma[c}T^8_{b]1} + \varepsilon^{1\alpha\beta}D_{1[c}T^8_{b]\alpha} = 0, \tag{6_2}$$

$$\varepsilon^{1\alpha\gamma}D_{\gamma[c}T^7_{b]\alpha} = 0, \tag{6_3}$$

$$\varepsilon^{1\beta\gamma}D_{\gamma[c}T^7_{b]1} + \varepsilon^{1\alpha\beta}D_{1[c}T^7_{b]\alpha} = 0, \tag{6_4}$$

где по индексам в квадратных скобках подразумевается альтернирование. Соотношения (6_1) и (6_2) равносильны системе

$$\begin{cases} D_{22}T^8_{13} + D_{13}T^8_{22} = D_{23}T^8_{12} + D_{12}T^8_{23} \\ D_{33}T^8_{12} + D_{12}T^8_{33} = D_{23}T^8_{13} + D_{13}T^8_{23} \\ D_{11}T^8_{23} + D_{23}T^8_{11} = D_{13}T^8_{12} + D_{12}T^8_{13} \\ D_{33}T^8_{22} + D_{22}T^8_{33} = 2D_{23}T^8_{23} \\ D_{33}T^8_{11} + D_{11}T^8_{33} = 2D_{13}T^8_{13} \\ D_{22}T^8_{11} + D_{11}T^8_{22} = 2D_{12}T^8_{12}. \end{cases} \tag{7}$$

Аналогично соотношения (6_3) и (6_4) приведут нас к такой системе:

$$\begin{cases} D_{22}T^7_{13} + D_{13}T^7_{22} = D_{23}T^7_{12} + D_{12}T^7_{23} \\ D_{33}T^7_{12} + D_{12}T^7_{33} = D_{23}T^7_{13} + D_{13}T^7_{23} \\ D_{11}T^7_{23} + D_{23}T^7_{11} = D_{13}T^7_{12} + D_{12}T^7_{13} \\ D_{33}T^7_{22} + D_{22}T^7_{33} = 2D_{23}T^7_{23} \\ D_{33}T^7_{11} + D_{11}T^7_{33} = 2D_{13}T^7_{13} \\ D_{22}T^7_{11} + D_{11}T^7_{22} = 2D_{12}T^7_{12}. \end{cases} \tag{8}$$

Из (7) и (8) получаем

$$\begin{cases} -D_{22}T^8_{13}+iD_{22}T^7_{13} - D_{13}T^8_{22}+iD_{13}T^7_{22} = -D_{23}T^8_{12}+iD_{23}T^7_{12} - D_{12}T^8_{23}+iD_{12}T^7_{23} \\ -D_{33}T^8_{12}+iD_{33}T^7_{12} - D_{12}T^8_{33}+iD_{12}T^7_{33} = -D_{23}T^8_{13}+iD_{23}T^7_{13} - D_{13}T^8_{23}+iD_{13}T^7_{23} \\ -D_{11}T^8_{23}+iD_{11}T^7_{23} - D_{23}T^8_{11}+iD_{23}T^7_{11} = -D_{13}T^8_{12}+iD_{13}T^7_{12} - D_{12}T^8_{13}+iD_{12}T^7_{13} \\ -D_{33}T^8_{22}+iD_{33}T^7_{22} - D_{22}T^8_{33}+iD_{22}T^7_{33} = -2D_{23}T^8_{23}+2iD_{23}T^7_{23} \\ -D_{33}T^8_{11}+iD_{33}T^7_{11} - D_{11}T^8_{33}+iD_{11}T^7_{33} = -2D_{13}T^8_{13}+2iD_{13}T^7_{13} \\ -D_{22}T^8_{11}+iD_{22}T^7_{11} - D_{11}T^8_{22}+iD_{11}T^7_{11} = -2D_{12}T^8_{12}+2iD_{12}T^7_{12}. \end{cases} \tag{9}$$

После очевидных упрощений система (9) примет вид

$$\begin{cases} D_{22}D_{13} = D_{23}D_{12} \\ D_{33}D_{12} = D_{23}D_{13} \\ D_{11}D_{23} = D_{13}D_{12} \\ D_{22}D_{33} = (D_{23})^2 \\ D_{11}D_{33} = (D_{13})^2 \\ D_{11}D_{22} = (D_{12})^2. \end{cases} \tag{10}$$

Из последнего равенства (10) с помощью комплексного сопряжения получаем

$$D^{11}D^{22} = \left(D^{12}\right)^2.$$

Итак, лемма 2 полностью доказана.

4. Прежде чем перейти к основному результату статьи, напомним, что *типовым числом* поверхности риманова многообразия называется ранг ее второй квадратичной формы. Это определение, введенное в [34], эквивалентно приведенному в [35].

Отметим, что в настоящее время именно математики Азии наиболее плодотворно занимаются изучением свойств типового числа гиперповерхностей почти комплексных (и, в частности, почти эрмитовых) многообразий. При этом они опираются на классические работы Р. Такаджи по геометрии гиперповерхностей (см., например, [36–38]). Не вдаваясь в подробности столь обширной тематики, выделим две работы о гиперповерхностях комплексного проективного пространства [39, 40], а также статьи о гиперповерхностях комплексных пространственных форм [41] и кватернионных пространственных форм [42].

Теорема. *Пусть t — типовое число косимплектической гиперповерхности N 6-мерного эрмитова подмногообразия общего типа M^6 алгебры Кэли $\mathbf{O}$. Тогда*

1) $t \leq 3$*;*

2) *N окажется минимальной гиперповерхностью в том и только том случае, когда t четное ($t = 0$ или $t = 2$);*

3) *келерово подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ не допускает косимплектических гиперповерхностей с типовым числом, большим единицы.*

Доказательство. 1. Матрица второй квадратичной формы вложения косимплектической гиперповерхности N в эрмитово $M^6 \subset \mathbf{O}$ имеет вид (см. лемму 1):

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & iD^{12} & iD^{22} \\ 0 & 0 & 0 & -iD^{11} & -iD^{12} \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ -iD_{12} & -iD_{22} & 0 & 0 & 0 \\ iD_{11} & iD_{12} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\operatorname{rang}\sigma \leq \operatorname{rang}\begin{pmatrix} D_{12} & D_{22} \\ D_{11} & D_{12} \end{pmatrix} + \operatorname{rang}\begin{pmatrix} D^{12} & D^{22} \\ D^{11} & D^{12} \end{pmatrix} + 1.$$

Поскольку матрицы $\begin{pmatrix} D_{12} & D_{22} \\ D_{11} & D_{12} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} D^{12} & D^{22} \\ D^{11} & D^{12} \end{pmatrix}$ вырожденные (см. лемму 2), то сумма их рангов не больше двух. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\sigma \leq 3.$$

2. Известно [35], что критерием минимальности гиперповерхности N является тождество

$$g^{ps}\sigma_{ps} = 0,$$

где $p, s = 1, 2, 3, 4, 5$.

Матрица метрического тензора гиперповерхности $N \subset M^6$ в A-репере выглядит так:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проделав следующие выкладки:

$$g^{ps}\sigma_{ps} = g^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + g^{\hat{\alpha}\beta}\sigma_{\hat{\alpha}\beta} + g^{\alpha\hat{\beta}}\sigma_{\alpha\hat{\beta}} + g^{33}\sigma_{33}$$
$$= iD_{12} - iD_{12} + iD^{12} - iD^{12} + \sigma_{33} = \sigma_{33},$$

получим

$$g^{ps}\sigma_{ps} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{33} = 0.$$

Следовательно, гиперповерхность N эрмитова $M^6 \subset \mathbf{O}$ будет минимальной тогда и только тогда, когда матрица σ имеет вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & iD^{12} & iD^{22} \\ 0 & 0 & 0 & -iD^{11} & -iD^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -iD_{12} & -iD_{22} & 0 & 0 & 0 \\ iD_{11} & iD_{12} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранги матриц $\begin{pmatrix} D_{12} & D_{22} \\ D_{11} & D_{12} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} D^{12} & D^{22} \\ D^{11} & D^{12} \end{pmatrix}$ одинаковы, то

$$t = 0 \quad \text{или} \quad t = 2.$$

3. Если $t = \operatorname{rang}\sigma > 1$, то ни одна из матриц $\begin{pmatrix} D_{12} & D_{22} \\ D_{11} & D_{12} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} D^{12} & D^{22} \\ D^{11} & D^{12} \end{pmatrix}$ не может быть нулевой. Почти эрмитова (в нашем случае эрмитова) структура на 6-мерном подмногообразии алгебры октав является келеровой в том и только том случае [20], когда

$$D_{kj} \equiv 0.$$

Но в рассматриваемом случае на M^6 найдутся точки, в которых некоторые компоненты D отличны от нуля. Поэтому структура не может быть келеровой. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goldberg S.* Totally geodesic hypersurfaces of Kaehler manifolds // Pacific J. Math. 1968. V. 27, N 2. P. 275–281.
2. *Tashiro Y.* On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds // Tôhoku. Math. J. 1963. V. 15, N 1. P. 62–78.
3. *Кириченко В. Ф., Степанова Л. В.* О геометрии гиперповерхностей квазикелеровых многообразий // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50, № 2. С. 213–214.
4. *Степанова Л. В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий. Дис. … канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ. 1995.
5. *Банару М. Б.* О спектрах важнейших тензоров 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Новейшие проблемы теории поля. Казань: КГУ-КЦ РАН, 2000. С. 18–21.
6. *Banaru M.* A note on six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Bul. Stin. Univ. «Politehnica». Timisoara. 2000. V. 45, N 2. P. 17–20.
7. *Banaru M.* Six theorems on six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Изв. АН Респ. Молдова. Сер. мат. 2000. N 3. P. 3–10.

8. *Banaru M.* Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // J. Harbin Inst. Tech. 2001. V. 8, N 1. P. 38–40.
9. *Banaru M.* On six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Studia Univ. «Babes-Bolyai». Math. Cluj-Napoca. 2001. V. 46, N 1. P. 11–14.
10. *Banaru M.* On six-dimensional $G1$-sumabnifolds of Cayley algebra // Acta Univ. Palacki. Olomuc. Math. 2001. V. 40. P. 17–21.
11. *Eckmann B.* Stetige losungen linearer gleichungsysteme // Comm. Math. Helv. 1942–1943. V. 15. P. 318–339.
12. *Whitehead G.* Note on cross-sections in Stiefel manifolds // Comm. Math. Helv. 1962. V. 37. P. 239–245.
13. *Brown R., Gray A.* Vector cross products // Comm. Math. Helv. 1967. V. 42. P. 222–236.
14. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969 V. 141. P. 465–504.
15. *Calabi T.* Construction and properties of some six-dimensional almost complex manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. V. 87. P. 407–438.
16. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. V. 10. P. 353–366.
17. *Gray A.* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three folds vector cross products // Tôhoku Math. J. 1969. V. 21. P. 614–620.
18. *Yano K., Sumitomo T.* Differential geometry of hypersurfaces in a Cayley space // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A66. 1962–1964. P. 216–231.
19. *Кириченко В. Ф.* Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Вестн. МГУ. 1973. № 3. С. 70–75.
20. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 1980. № 8. С. 32–38.
21. *Кириченко В. Ф.* Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Укр. геом. сб. 1982. Т. 25. С. 60–68.
22. *Haizhong Li.* The Ricci curvature of totally real 3-dimensional submanifolds of the nearly Kaehler 6-sphere // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 1996. V. 3. P. 193–199.
23. *Cho J. T., Sekigawa K.* Six-dimensional quasi-Kählerian manifolds of constant sectional curvature // Tsukuba J. Math. 1998. V. 22, N 3. P. 611–627.
24. *Deszcz R., Dillen F., Verstraelen L., Vrancken L.* Quasi-Einstein totally real submanifolds of nearly-Kähler 6-sphere // Tôhoku Math. J. 1999. V. 51. P. 461–478.
25. *Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестн. МГУ. 1994. № 3. С. 6–13.
26. *Арсеньева О. Е., Кириченко В. Ф.* Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 1. С. 21–44.
27. *Sato T.* An example of an almost Kähler manifold with pointwise constant holomorphic sectional curvature // Tokyo J. Math. 2000. V. 23, N 2. P. 387–401.
28. *Банару М. Б.* Тензоры Кириченко // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. Смоленск. 2000. № 2. С. 42–48.
29. *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономий. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
30. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960.
31. *Blair D.E.* The theory of quasi-Sasakian structures // J. Differential Geom. 1967. V. 1. P. 331–345.
32. *Kirichenko V. F.* Sur la gèomètrie des variètès approximativement cosymplectiques // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. 1982. V. 295, N 12. P. 673–676.
33. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий. Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 18. С. 25–71. (Итоги науки и техники).
34. *Kurihara H., Takagi R.* A note on the type number of real hypersurfaces in $P_n(C)$ // Tsukuba J. Math. 1998. V. 22. P. 793–802.
35. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. I, II.
36. *Takagi R.* On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space // Osaka J. Math. 1973. V. 10. P. 495–506.

37. *Takagi R.* Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principial curvatures. I, II // J. Math. Soc. Japan. 1975. V. 27. P. 45–57, 507–516.
38. *Takagi R.* A class of hypersurfaces with constant principial curvatures in a sphere // J. Differential Geom. 1976. V. 11. P. 225–233.
39. *Kim H. S., Takagi R.* The type number of real hypersurfaces in $P_n(C)$ // Tsukuba J. Math. 1996. V. 20. P. 349–356.
40. *Takagi R, Kim I.-B., Kim B. H.* The rigidity for real hypersurfaces in a complex projective space // Tôhoku Math. J. 1998. V. 50. P. 531–536.
41. *Kurihara H.* On real hypersurfaces in a complex space form // Math. J. Okayama Univ. 1998. V. 40. P. 177–186.
42. *Kurihara H.* The type number on real hypersurfaces in a quaternionic space form // Tsukuba J. Math. 2000. V. 24. P. 127–132.

Статья поступила 20 ноября 2001 г., окончательный вариант — 23 сентября 2002 г.

Банару Михаил Борисович
Смоленский гуманитарный университет, кафедра математического моделирования, ул. Герцена, 2, Смоленск 214014
banaru@keytown.com